الصف الثالث المتوسط

منهاج موهبة الإضافي المتقدم

الرياضيات

دليل المُعلِّم

مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع
King Abdulaziz & his Companions Foundation for Giftedness & Creativity

موهبة

يتعيّن دراسة هذا الدليل جنبًا إلى جنب مع كتاب الطالب من المنهاج الإضافيّ المتقدّم.
ولقد طوّرت موادّ المنهاج الإضافيّ المتقدّم للمدارس في شراكة موهبة مع المدارس.

حقوق النشر محفوظة لمؤسسة الملك عبد العزيز ورجاله للموهبة والإبداع

شارع تركي بن عبدالعزيز الأول
صندوق بريد ٣٠٠٨٢٠ الرياض ١١٣٧٢، المملكة العربية السعودية – www.mawhiba.org.sa

بسم الله الرحمن الرحيم

المحتويات

استعمال هذا الدليل ٩

الوحدة الأولى: المعادلات الخطية
نظرة عامة ١١
النشاط الأول: صحيحة دائماً ، صحيحة أحياناً ، أم خاطئة دائماً ؟ ١٢
النشاط الثاني: مساحات مستطيلة الشكل ١٥
النشاط الثالث: الأهرامات العددية ١٩
النشاط الرابع: شبكة المربعات ٢١

الوحدة الثانية: الدوال الخطية
نظرة عامة ٢٥
النشاط الأول: المخططات السهمية للدوال الخطية ٢٦
النشاط الثاني: تركيب الدوال الخطية ٣٠
النشاط الثالث: معكوس الدالة الخطية ٣٢
النشاط الرابع: متتابعات يتم توليدها باستخدام تطبيقات متكررة من الدوال الخطية ٣٤

الوحدة الثالثة: الدوال الخطية والعلاقات
نظرة عامة ٣٧
النشاط الأول: شكل الانتشار ٣٩
النشاط الثاني: المتغيرات المقترنة ٤٢
النشاط الثالث: بناء نموذج رياضي ٤٦

الوحدة الرابعة: المتباينات الخطية
نظرة عامة ٥٠
النشاط الأول: أساسيات في المتباينات ٥١
النشاط الثاني: المتباينات والمضلعات الهندسية ٥٧
النشاط الثالث: الحل الأمثل ٥٩

الوحدة الخامسة: أنظمة المعادلات الخطية
نظرة عامة ٦٢
النشاط الأول: أي الطرق سأستخدم؟ ٦٣
النشاط الثاني: كم عدد الحلول ؟ ٦٦

الوحدة السادسة: كثيرات الحدود

نظرة عامة ٧١
النشاط الأول: دراسة القطع المكافئ ٧٢
النشاط الثاني: استكشاف التمثيلات البيانية للمعادلات التكعيبية و ما بعدها ٧٥
النشاط الثالث: دراسة الجذور والعوامل ٧٧

الوحدة السابعة: التحليل إلى العوامل والمعادلات التربيعية

نظرة عامة ٨٠
النشاط الأول: مطابقة العوامل ٨١
النشاط الثاني: حل معادلات تم تحليلها ٨٣
النشاط الثالث: حل المعادلات التربيعية ٨٥
النشاط الرابع: دراسة القطع المكافئ ومنحنيات أخرى ٨٧

الوحدة الثامنة: الدوال التربيعية والأُسيّة

نظرة عامة ٩٠
النشاط الأول: بناء نموذج لمسار ٩١
النشاط الثاني: النمو أو الاضمحلال ٩٤
النشاط الثالث: تطوير المهارات التفسيرية ٩٧

الوحدة التاسعة: الدوال الجذرية والهندسة

نظرة عامة ١٠٠
النشاط الأول: الأعداد غير النسبية والجذور ١٠١
النشاط الثاني: تمثيل الدوال الجذرية بيانياً ١٠٥
النشاط الثالث: عجلة ثيودورس ١٠٨
النشاط الرابع: فن طي الورق ١١١

الوحدة العاشرة: الإحصاء والاحتمالات

نظرة عامة ١١٤
النشاط الأول: أي الكراسي سأختار؟ ١١٥
النشاط الثاني: تجربة إسقاط الدبوس ١١٧
النشاط الثالث: المكعبات المرقمة بشكل خاطئ ١١٩
النشاط الرابع: المكعبات المرقّمة المتسلسلة ١٢٢
النشاط الخامس: أي الطرق أختار؟ ١٢٣
النشاط السادس: إجراء تحليلات إحصائية ١٢٥

شراكة موهبة مع المدارس

أنتجت موادّ المناهج الإضافيّة المتقدّمة بغرض استعمالها في مدارس موهبة دعمًا لجهود تحقيق المخرجات التربويّة المرجوّة من برنامج موهبة والتّي تتلخّص في تنمية القيادات الشابّة، والمتعلّمين الناجحين وروّاد قطاع الأعمال المتميّزين بالإبداع والابتكار.

تُعدُّ شراكة موهبة مع المدارس واحدة من أهمّ مبادرات الخطّة الاستراتيجيّة للموهبة والإبداع والابتكار التّي تبنّتها مؤسّسة الملك عبد العزيز ورجاله للموهبة والإبداع (موهبة). وتهدف هذه المبادرة إلى إنشاء بيئة تعليميّة تعلّميّة ترعى الموهبة والإبداع من خلال تقديم منح دراسية للطلاّب المتميّزين للالتحاق بمدارس متميّزة في المملكة. ويوفّر هذا البرنامج أنشطة تعليميّة متقدّمة يقدّمها معلّمون مؤهّلون تأهيلاً عاليًا؛ ممّا يؤدّي إلى تحسين قدرات الطلاّب وتنمية مواهبهم، فضلاً عن تحسين نوعيّة التعليم المقدّم لطلاّب المدارس الأخرى في الشراكة بوجّه عامّ.

موادّ المنهاج الإضافيّ المتقدّم

لقد صمّم المنهاج الإضافيّ المتقدّم باستعمال الأساليب المتميّزة لتعزيز التحدّي والإثراء في المناهج الدراسيّة الحاليّة، واتّباع المنحى الاستقصائيّ والتوقّعات العالية. وتضمّ هذه الموادّ مجموعة كبيرة من الأنشطة التّي تهدف إلى إيجاد المتعلّم المستقلّ والمتمكّن، وذلك عن طريق تشجيع المتعلّمين على استعمال القدرات فوق المعرفيّة، والمرونة في اختيار الاستراتيجيّات والتخطيط لها، وصياغة الفرضيّات، إضافة إلى الربط الواسع بين خيوط المعرفة التّي تشمل الحقائق الموضوعيّة والعمليّات الإجرائيّة معًا.

يضاف إلى ما تقدّم فإنّ طلاّب مدارس شراكة موهبة يتدرّبون كي يكونوا خبراء في المباحث التّي يستهدفها البرنامج وهي: الرياضيّات، والعلوم، واللغة الإنجليزيّة، وتكنولوجيا المعلومات والاتّصالات ICT. وفي حين يتميّز الخبراء بالمعرفة المتقدّمة، فإنّ الأهمّ من ذلك أنّهم يعملون على مستويات فكريّة عليا؛ الأمر الذي ينعكس على أساليب تدريسهم وتقويمهم. ويتعيّن على الخبير ألاّ يكتفي بتذكّر المعلومات، بل أن يدمج معارفه في منظومة نظريّة ، ويعمد إلى توظيفها في مواقف واقعيّة متجدّدة. ومن هذا المنطلق فإنّ الأنشطة الواردة في كتاب الطالب تشجّع هذا النمط من التفكير، وتركّز تعلّم الطلاّب الموهوبين والمبدعين على أبعاد ثلاثة، هي:

القيم والاتّجاهات والسمات المتقدّمة، مثل: الإستقصاء، و المرونة ،و القبول بحالة الشك ، والإبداع، والاستقلاليّة في الدراسة، والانفتاح على البدائل المختلفة، وتبنّي منهجيّة منظّمة، والمثابرة.

المعرفة والفهم المتقدّمان، مثل: وضوح المفاهيم، وإقامة الصلات بين مختلف مجالات الرياضيّات، وفهم موضوعات الرياضيّات ومبادئها، وتفهّم البنية الأساسيّة للرياضيّات، واستيعاب الأفكار الكبرى، واستعمال البراهين، ومعرفة علماء الرياضيّات ومساهماتهم.

المهارات المتقدّمة، مثل: التفكير المنطقيّ والاستدلال، وتكوين الصورة الذهنيّة المجرّدة، والربط بين المهارات المكتسبة من ناحية وسياق الحياة الاعتياديّة ومشاكلها من ناحية أخرى، والطلاقة، والدقّة في استعمال مهارات الرياضيّات وأدواتها، والقدرات فوق المعرفيّة، والتعميم، والنمذجة.

القيم والاتجاهات والسمات

ينبني المنهاج الإضافي المتقدم على قيم واتجاهات وسمات ست تميز مشروع شراكة مدارس موهبة، وتقدم وصفا واضحا للخصائص التي يتميز بها الطلاب الذين صمم هذا المنهاج لرعايتهم وتنميتهم.

الإستقصاء

سوف ينمي طلاب مدارس شراكة موهبة روح الاستقصاء، وسيرغبون في التعلم الذاتي، وينشطون فيه، ويتوقون إليه. وستظهر عليهم سمات المبادرة والتفكير المستقل، وتحدي الافتراضات، وطلب البرهان على الفرضيات والاستنتاجات. وسينظمون مسيرة تعلمهم بفعالية، منتقلين من استيعاب المعارف وإتقان الخطوات العملية، إلى تطوير وجهات النظر الشخصية والحلول الفردية.

المجازفة

سوف ينمي طلاب مدارس شراكة موهبة روح المجازفة، وسيظهرون ثقة بأنفسهم، ويتناولون الأفكار والظواهر الجديدة عليهم بالتجربة والنقد، ويقدمون على التخمين وإعطاء الفرضيات، ولن يزعجهم العمل في ظل ظروف جديدة عليهم. وسوف يرجئون التوصل إلى الاستنتاجات قبل نضوجها في أذهانهم، ويتحملون الشك المؤقت.

الإبداع

سوف ينمي طلاب مدارس شراكة موهبة روح الإبداع والابتكار، وسيصبحوا مُتَفتّحي العقول، ومرنين في طريقة تفكيرهم. إلى جانب إبداء استعدادهم للابتكار، وإيجاد حلول متعددة للمشاكل والمواقف، مظهرين قدرة تكيف أساليب عملهم لتتلاءم مع الظروف. وسيغدو عملهم مثيرا للدهشة، ودليلا على الأصالة، ومتميزا بأسلوبهم الشخصي الخاص.

المثابرة

سوف ينمي طلاب مدارس شراكة موهبة روح المثابرة، ولن تثبط العقبات والصعوبات من عزائمهم، بل سيصرون على مواصلة بذل الجهود. وسوف يبرهنون على تميزهم بالتأني في العمل، والالتزام بأسلوبهم المنهجي المنظم، ولن يكلوا من المثابرة لتحقيق النتائج المرجوة بأعلى مستويات الجودة والدقة الممكنة.

التعاون

سوف ينمي طلاب مدارس شراكة موهبة روح التعاون والعمل الجماعي، وسيسعون إلى الحصول على الملاحظات والتعليقات على أعمالهم، وسيدلون بأرائهم وأفكارهم بوضوح واختصار، مصغين إلى وجهات نظر الآخرين وأفكارهم. وسيتمتعون بالقدرة على العمل الجماعي والاستعداد له، ويؤدون أدوار متنوعة ضمن فريق العمل، ويتمكنون من تقويم أفكارهم ومساهماتهم.

الاهتمام بالمجتمع

سوف ينمي طلاب مدارس شراكة موهبة روح الاهتمام بالمجتمع. ففي الوقت الذي سيكونون فيه مدفوعين بالطموح الشخصي والرغبة في تحقيق النجاح، فإنهم سيمتلكون أيضا إحساسا قويا بأهمية المساهمات التي يقدمونها للمجتمع تحقيقا لمصلحة الوطن، ومنفعة أولئك الذين هم أقل منهم حظا. وسيكونون مثالا للمواطن الصالح المتعاطف مع المصلحة الجماعية لمحيطه الاجتماعي، المدرك لأوجه التباين والتشابه بين الأفراد والشعوب، والواعي بتراثه الثقافي، والتراث الثقافي للأخرين، كما سيكون الطلاب متجاوبين مع القضايا الأخلاقية التي تثار في سياق دراساتهم.

فئات الأداء المعرفي المتقدم

تهتم مواد المناهج الإضافية المتقدمة باكتساب وتنمية خصائص محددة للأداء تتركز عليها جهود التعلم والتقويم على حد سواء. يضاف إلى ذلك فإن عمليات التدريس والتعلم في ظل هذه البرامج تضع بين أيدي المعلمين الأدوات اللازمة لرصد وتقويم قدرات الطلاب على تطوير المهارات المعرفية المتقدمة المرتبطة بالمهارات المعرفية الآتية:

القيم والاتجاهات والسمات المتقدمة

١. التعميم: القدرة على الحكم على إمكانية استعمال نتائج موقف معين لتوقع ما يمكن أن يحدث في مواقف أخرى مماثلة.
٢. التجريد: القدرة على الانتقال السريع من المحسوس إلى المجرد
٣. إيجاد الروابط: استعمال الخبرات السابقة لصياغة تعميمات جديدة.
٤. التخيل: القدرة على عرض المشكلة وتصنيفها في سياق ما يمتلكه الطالب من معارف سابقة واسعة مرتبطة بها.
٥. التفكير الشامل: القدرة على التعامل مع الأفكار الكبيرة والمفاهيم الشاملة
٦. الثقة الفكرية: القدرة على توضيح وجهة النظر الشخصية الخاصة المعتمدة على الأدلة، وتقديمها للآخرين، والدفاع عنها.
٧. التصاوغ الفكري: القدرة على معرفة القواعد السارية وتطويعها لإيجاد صيغ صحيحة جديدة.
٨. الأتمتة: القدرة على استعمال بعض المهارات بيسر وسهولة ؛ لأنها لا تتطلب تفكيرا فعالا
٩. القدرة على رؤية وجهات النظر البديلة: استيعاب آراء الآخرين في التعامل مع الأمور المبهمة والمعقدة.
١٠. القدرات فوق المعرفية: القدرة على استعمال أنماط تفكير مختلفة ونقل المعرفة من موقف إلى آخر.
١١. القدرة على التعامل مع مسائل معقدة، ومتعددة الخطوات: يستطيع تجزئة المهمة، واختيار الأسلوب المناسب للحل، وتنفيذ النشاط.
١٢. التخطيط الاستراتيجي: القدرة على التصدي لخبرات تعلمية جديدة، وذلك لمحاولة ربطها بالمعرفة والمفاهيم الحالية، ومن ثم تحديد نمط التفكير المناسب.
١٣. التفكير الناقد أو المنطقي: القدرة على الاستنتاج ووضع الفرضيات والاستدلال والبحث عن الأدلة المؤيدة.
١٤. التفكير المرن: القدرة على التخلي عن فكرة واستبدالها بفكرة أفضل منها، أو ايجاد حلول متعددة.
١٥. طلاقة التفكير: القدرة على إنتاج الأفكار.
١٦. الأصالة: استحداث شي جديد كليا.
١٧. التفكير التطويري والتحولي: القدرة على تكوين أفكار جديدة بوساطة البناء على الأفكار القائمة وتطويرها، أو بالتحول عنها إلى اتجاه جديد.
١٨. عمليات التنظيم الذاتية: قدرة الطالب على متابعة عمله ومُراقبته وتقويمه وتصحيح مسارُه.
١٩. السرعة والدقة: القدرة على العمل بسرعة وبدقة عالية في الوقت نفسه.
٢٠. الإحكام: القدرة على العمل بفعالية ضمن قواعد المجال.
٢١. التركيز والمثابرة والصلابة: القدرة على مواصلة العمل حتى إنجاز المهمة.

استعمال هذا الدليل

يتعيّن أن يُقرأ هذا الدّليل جنباً إلى جنب مع كتاب الطالب من المنهاج الإضافيّ المتقدِّم . فهو يوفّر معلومات عن كيفيّة تدريس وحدات الكتاب ، وعما يحتاج الطالب معرفته ليكون قادراً على أدائه قبل التعامل مع أنشطة الكتاب كما يزوّد المعلّم بأساليب متنوّعة يمكن أن يسترشد بها لتدريس الأنشطة ، و خطّةَ زمنيّة ممكنة .

و يتضمّن كتاب الطالب العديد من الأنشطة المتنوّعة التي صُمّم معظمها للتدريس الصفيّ التمايزي مع ترك الخيار للمعلمين في تدريس بعض الأنشطة لمجموعات مُنْتقاة من الطلاّب .

يتعيّن ألاّ يشعر المعلّم أنّه مقيّد و مُلْزم بتدريس الأنشطة كما هي معروضة في الكتاب تماماً ، فقد يرغب بعض المعلمين في تعديل أو تبديل بعض الأنشطة تبعاً لاحتياجات طلاّبهم ، فيُمكن على سبيل المثال أن يخصص لبعض الأنشطة وقتاً أطول من الوقت المقترح في الدليل ، و ذلك لإتاحة الفرصة للطلاّب لمتابعة الموضوعات التي تثير اهتماماتهم بصورة متعمّقة ، أو كي يستكشفوا المادّة المقترحة بصورة أوسع .

و يُطلب إلى المعلّمين ألاّ يضعوا سقفاً لما يمكن أن يُنجزه طلاّبهم . و تُفيد التجربة أن المُعلّم الذي ينتظر من طلبته أعلى مستويات التميّز و التحصيل سوف يلقى منهم أداءً يفوق توقعاته .

الوحدة الأولى

المعادلات الخطية

نظرة عامّة

في هذه الوحدة سوف يستخدم الطلاب الجبر لتعميم النتائج وسوف يكون لديهم الفرصة كذلك لدراسة تركيب المعادلات الجبرية وتمييز الاستخداماتاالمختلفة للحروف كرموز.
وسوف يقوم الطلاب كذلك باستكشاف معادلات مشتقة من سياقات مختلفة و بناء عبارات جبرية بعدة طرق مختلفة ، بالإضافة الى تطوير التفكير المرن لديهم وزيادة التبصُّر الداخلي لدى الطالب في قوة المنطق الجبري.

الأهداف التعلمية للوحدة

- القدرة على بناء تعابير و معادلات خطية
- حل مسائل متعلقة بالمعادلات و التعابير الخطية

المعرفة السابقة

معرفة طرق لحل المعادلات الخطية

خصائص الأداء المتقدم

القيم والاتجاهات والسمات

- الإبداع (النشاط الأول)
- الانفتاح على البدائل (النشاط الرابع)
- تبني منهجية منظمة (النشاط الرابع)

المهارات المتقدّمة

- تكوين الصور الذهنية (النشاط الثاني)
- التعميم (الأنشطة الثاني، والثالث، والرابع)
- النمذجة (الأنشطة الثاني، والثالث، والرابع)
- القدرات فوق المعرفية (جميع الأنشطة)

المعرفة و الفهم المتقدمان

- وضوح المفاهيم (النشاط الأول)

الخطة الزمنيّة

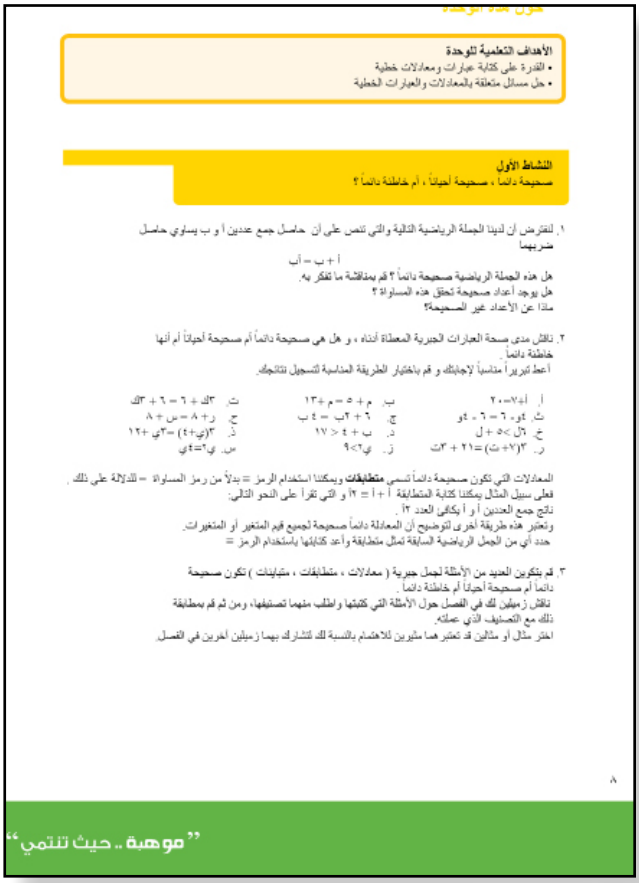
ست ساعات تقريبًا

المصادر

أعواد أو قطع مستقيمة

حول هذا النشاط

هذا النشاط يدعو الطلاب الى النظر في حل المعادلات الخطية بالإضافة الى وجود بعض الأمثلة للمتتابعات و معادلات الدرجة الثانية وذلك لإعطائهم الفرصة للمقارنة والإستنتاج. إضافةً الى ذلك فإن هذا النشاط سيعطي الطلاب فرصة للنظر في بنية المعادلات والتعرف على الإستخدامات المختلفة للحروف كرموز في هذه المعادلات. وسوف يساعد هذا النشاط الطلاب على التفريق بين المعادلة والمتطابقة (جملة رياضية صحيحة لجميع المتغيرات). وسيكون هذا مهماً لعدد من الأنشطة التي سيتم طرحها، حيث سيتم اشتقاق المعادلات من ضمن السياق.


الأهداف التعليمية للوحدة
• القدرة على كتابة عبارات ومعادلات خطية
• حل مسائل متعلقة بالمعادلات والعبارات الخطية

النشاط الأول
صحيحة دائماً ، صحيحة أحياناً ، أم خاطئة دائماً ؟

١. لنفترض أن لدينا الجملة الرياضية التالية والتي تنص على أن حاصل جمع عددين أ و ب يساوي حاصل ضربهما
أ + ب = أ ب
هل هذه الجملة الرياضية صحيحة دائماً ؟ قم بمناقشة ما تفكر به.
هل يوجد أعداد صحيحة تحقق هذه المساواة ؟
ماذا عن الأعداد غير الصحيحة؟

٢. ناقش مدى صحة العبارات الجبرية المعطاة أدناه ، و هل هي صحيحة دائماً أم صحيحة أحياناً أم أنها خاطئة دائماً .
أعط تبريراً مناسباً لإجابتك و قم باختيار الطريقة المناسبة لتسجيل نتائجك.

أ. أ+٧=٢٠ ب. م + ٥ = م+١٣ ت. ٣ك + ٦ = ٦ + ٣ك
ث. ٥و + ٦ = ٦ + ٥و ج. ٦ + ٢ب = ٤ ب ح. ر+ ٨ = س + ٨
خ. ٢ل > ٥ + ل د. ب + ٤ > ١٧ ذ. ٣(ي+٤) =٣ي +١٢
ر. ٣(٧+ت) =٢١ + ٣ت ز. ي>٩ س. ي٢=٤ي

المعادلات التي تكون صحيحة دائماً تسمى **متطابقات** ويمكننا استخدام الرمز ≡ بدلاً من رمز المساواة = للدلالة على ذلك.
فعلى سبيل المثال يمكننا كتابة المتطابقة أ + أ ≡ ٢ أ و التي تقرأ على النحو التالي:
ناتج جمع العددين أ و أ يكافئ العدد ٢ أ .
وتعتبر هذه طريقة أخرى لتوضيح أن المعادلة دائماً صحيحة لجميع قيم المتغير أو المتغيرات.
حدد أي من الجمل الرياضية السابقة تمثل متطابقة وأعد كتابتها باستخدام الرمز ≡

٣. قم بتكوين العديد من الأمثلة لجمل جبرية (معادلات ، متطابقات ، متباينات) تكون صحيحة دائماً أم صحيحة أحياناً أم خاطئة دائماً.
ناقش زميلين لك في الفصل حول الأمثلة التي كتبتها واطلب منهما تصنيفها، ومن ثم قم بمطابقة ذلك مع التصنيف الذي عملته.
اختر مثال أو مثالين قد تعتبر هما مثيرين للاهتمام بالنسبة لك لتشارك بهما زميلين آخرين في الفصل.

٨

"موهبة .. حيث تنتمي"

خصائص الأداء المتقدّم

- التمييز بين المعادلات و المتطابقات و القدرة على تبرير تلك التصنيفات .
- العمل بإبداع في ايجاد امثلة مختلفة و مشاركة الطلاب تفكيرهم .

توصيات أسلوب التدريس

يعتبر النشاط الأول هو الأنسب للمناقشة الجماعية مع اعطاء فترات زمنية قصيرة للطلاب للعمل في مجموعات ثنائية لاستكشاف الحل .
يمكن استخدام النشاطين الثاني والثالث للعمل في مجموعات ثنائية أو في مجموعات صغيرة مع المشاركة والنقاش مع المجموعات الأخرى.

إجابات الأسئلة

السؤال الأول

يعتبر هذا السؤال مناقشة مبدئية وذلك استعداداً للنشاط الثاني .

اكتب الجملة الرياضية التالية على السبورة :

أ + ب = أب

سوف يلاحظ الطلاب سريعاً أن هذه الجملة الرياضية ليست صحيحة بشكل عام وسيكون لديهم القدرة على اعطاء أمثلة لبيان السبب في ذلك .

من المرجح أن تنبثق عن النقاش الحلول التالية :

أ = ب = ٢ و أ = ب = ٠ .

يتوجب على المعلم أن يطلب حلول أخرى للمعادلة مع اعطاء وقت كاف للطلاب للعمل في مجموعات ثنائية وأن يقوم بحثّ الطلاب على ايجاد الحل باقتراح طرق معينة ، على سبيل المثال ، اختيار قيمة للمتغير أ

ومن ثم ايجاد قيمة ب .

اذا كان أ = ٣ فإنه يصبح لدينا المعادلة ٣ + ب = ٣ب وهذا يقودنا الى الحل

$$ب = \frac{٣}{٢}$$

اذا كان أ = ٤ فإنه يصبح لدينا المعادلة ٤ + ب = ٤ب وهذا يقودنا الى الحل

$$ب = \frac{٤}{٣}$$

اطلب من بعض الطلاب أن يقوموا بشرح ذلك للمجموعة .

هناك حالة مثيرة للإهتمام يجب النظر اليها وهي عندما تكون أ = ١

فإن هذا يقودنا الى المعادلة ١ + ب = ب ،

وهذه المعادلة خاطئة دائماً .

يمكن لأحد الطلاب المتمكنين أن يجد الحل العام للمعادلة عن طريق اعادة ترتيبها للحصول على الحل

$$ب = \frac{أ}{١ - أ}$$

و يمكن اختبار الحل باستخدام العديد من القيم . لماذا لاتمثل القيمة أ = ١ حلاً للمعادلة ؟

السؤال الثاني

على الرغم من أن الأمثلة في هذا السؤال أكثر وضوحاً من تلك الموجودة في السؤال الأول، فإن هذا السؤال يدعو الى فحص المعادلات (وبعض المتباينات) من خلال مجموعات الحل و طبيعة الأعداد التي تم تمثيلها بحروف .

يفضل أن تتم المناقشة في مجموعات مكونة من طالبين أو ثلاثة طلاب .

يتوجب على المعلم أن يتنقل بين الطلاب و يحثهم على إعطاء أمثلة متوافقة وأمثلة مضادة للحل مع تبرير استنتاجاتهم لبعضهم البعض.

يجب على الطلاب ايجاد طريقة منهجية مناسبة لكل منهم لتسجيل نتائجهم.

في الجدول أدناه، ستجد التصنيف الملائم للحل.

باتباع العمل الجماعي، يجب دعوة الطلاب لشرح والتحقق من نتائجهم من خلال المناقشة. و من المهم جداً استخلاص الفرق بين المعادلة و المتطابقة .

صحيحة أحياناً	صحيحة دائماً	خاطئة دائماً
أ. أ+ ٧=٢٠ (عندما أ = ١٣)	ت. ٣ك + ٦ =٦ + ٣ك	ب. م + ٥ = م + ١٣
ث. ٤و - ٦= ٦- ٤و (عندما و = ١,٥)	ذ. ٣(ي + ٤) = ي + ١٢	
ج. ٦+٢ب = ٤ب (عندما ب = ٣)	ر. ٣(٧ + ت) = ٢١ + ٣ت	
ح. ر+ ٨= س +٨ (عندما ر = س)		
خ. ٦ل > ٥+ ل (عندما ل > ١)		
د. ب+٤>١٧ (عندما ب > ١٣)		
ز. ي^{٢} >٩ (عندما ي > ٣ أو ي > -٣)		
س. ي^{٢} = ٤ي (عندما ي = ٠ أو ي = ٤)		

مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع
King Abdulaziz & his Companions Foundation for Giftedness & Creativity
موهبة

السؤال الثالث

من الأفضل في هذا السؤال العمل على حله من خلال مجموعات ثنائية او مجموعات صغيرة. يجب حث الطلاب على ايجاد امثلة عديدة لكل نوع من التصنيفات الثلاث السابقة وهي :

صحيحة دائماً و صحيحة أحيانا و خاطئة دائماً.

يتوجب على المعلم التنقل بين الطلاب و سؤالهم لتوضيح أمثلتهم المختارة.

(تعتبرالمقدرة على ايجاد امثلة متنوعة اختباراً جيداً لمقدرة الطالب على فهم الرياضيات . ابحث عن امثلة مفاجئة و ابداعية للطلاب تستحق الأهتمام لعرضها على المجموعات الأخرى) .

عندما يقوم الطلاب بعمل وتسجيل قائمة من الأمثلة ، يمكن أن تطلب منهم مبادلتها مع المجموعات الأخرى ، و بالتالي فإن لكل مجموعة مهمة جديدة وهي التحقق مما تم انجازه من المجموعة الأخرى ومناقشتهم والفصل في أي خلاف بينهم حول النتائج .

و في النهاية فإن المناقشة الجماعية ستخلق فرصة جيدة للمعلم لدعوة الطلاب لشرح بعض الأمثلة المختارة.

قم باختيار بعض الأمثلة التي ترى أنها ستؤدي الى مناقشات وحوارات أخرى بين الطلاب .

فرص التقويم

ستسمح المهام السابقة للطلاب أن يُظهروا مدى فهمهم لكيفية استخدام الحروف كرموز في الجمل الجبرية و الشروط المطلوبة لكي تكون هذه الجمل الجبرية صحيحة.

- هل للطلاب المقدرة على تصنيف الجمل الجبرية؟ (على سبيل المثال لماذا يعتبر بعضها متطابقات ؟)
- هل للطلاب المقدرة على ايجاد أمثلة مثيرة للإهتمام لمعادلات ومتطابقات ومتباينات تحقق الشروط: صحيحة أحياناً أم صحيحة دائماً أم خاطئة دائماً ؟

حول هذا النشاط

في هذا النشاط سوف يطلب من الطلاب أن يقوموا باستخدام الجبر لايجاد الحلول بصيغتها العامة . إن حمل الطلاب على ايجاد التعبيرات الجبرية المناسبة سوف يطور لديهم المرونة في التفكير و سيعطيهم المزيد من التبصر في قوة الجبر.

هذا سوف يؤدي الى تطوير الثقة لدى الطالب في التعامل ببراعة مع أشكال التعابير الجبرية المختلفة و في ايجاد التحويل المناسب و الأفضل لتلك التعابير الجبرية ، و منها على سبيل المثال عند حل المعادلات.

إن حل المسائل المتعلقة بمساحات المستطيلات سوف توفر مادة غنية للطالب و ستعطية القدرة على تخيل العلاقات الجبرية من خلال الإستخدام المميز للأشكال الهندسية.

خصائص الأداء المتقدم

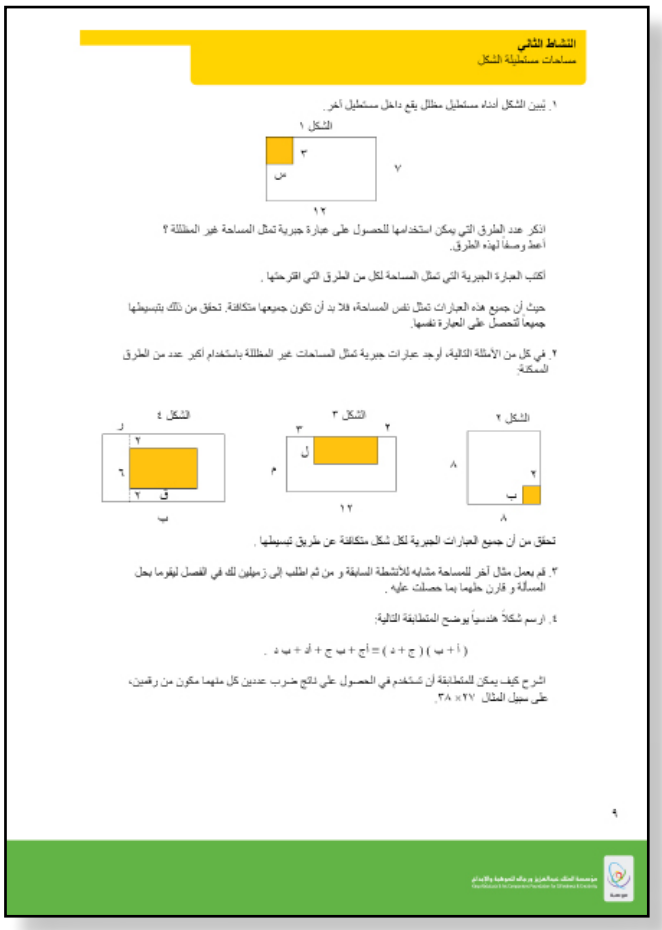
- القدرة على التخيل و وضع صيغ جبرية مختلفة لعلاقة جبرية أو لمسألة ما.
- القدرة على ايجاد نموذج رياضي للحالة و من ثم تطوير صيغة عامة لها.

توصيات أسلوب التدريس

يعتبر النشاط الأول مقدمة لهذه الفعالية و ينصح بأن يتم تقديمه على شكل مجموعة ، مع أسهامات فرديه من الطلاب.

يمكن للطلاب أن يعملوا على بقية الأنشطة في مجموعات ثنائية أو في مجموعات صغيرة.

كما ينبغي على المعلم اختيار الوقت المناسب لضم تلك المجموعات وذلك لمناقشة الصعوبات التي تواجههم وكذلك مشاركة الطلاب أفكارهم للعمل على تطوير تلك المسائل.


النشاط الثاني
مساحات مستطيلة الشكل

١. يُبين الشكل أدناه مستطيل مظلل يقع داخل مستطيل آخر.

الشكل ١

٣
س
٧
١٢

اذكر عدد الطرق التي يمكن استخدامها للحصول على عبارة جبرية تمثل المساحة غير المظللة ؟ أعط وصفاً لهذه الطرق.

أكتب العبارة الجبرية التي تمثل المساحة لكل من الطرق التي اقترحتها .

حيث أن جميع هذه العبارات تمثل نفس المساحة، فلا بد أن تكون جميعها متكافئة. تحقق من ذلك بتبسيطها جميعاً لتحصل على العبارة نفسها.

٢. في كل من الأمثلة التالية، أوجد عبارات جبرية تمثل المساحات غير المظللة باستخدام أكبر عدد من الطرق الممكنة.

الشكل ٢
٨
٢
ب
٨

الشكل ٣
٣
٢
ل
م
١٢

الشكل ٤
ر
٢
٦
ق
٢
ب

تحقق من أن جميع العبارات الجبرية لكل شكل متكافئة عن طريق تبسيطها .

٣. قم بعمل مثال آخر للمساحة مشابه للأنشطة السابقة و من ثم اطلب إلى زميلين لك في الفصل ليقوما بحل المسألة و قارن حلهما بما حصلت عليه .

٤. ارسم شكلاً هندسياً يوضح المتطابقة التالية:

$(أ + ب)(ج + د) = أج + ب ج + أد + ب د$.

اشرح كيف يمكن للمتطابقة أن تستخدم في الحصول على ناتج ضرب عددين كل منهما مكون من رقمين، على سبيل المثال ٢٧ × ٣٨.

٩

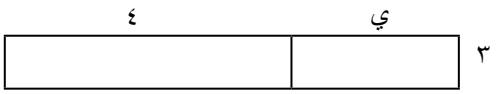
إجابات الأسئلة

السؤال الأول

تعتبر البراهين المرتبطة بنظرية فيثاغورس من أشهر البراهين في الهندسة. ولكن هنالك العديد من المتطابقات التي يمكن أيضاً توضيحها وتبريرها هندسياً .

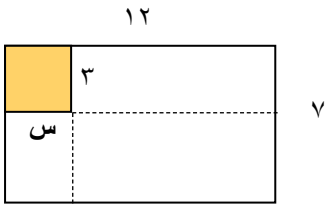
لنأخذ طريقتين متكافئتين لحساب مساحة الشكل الذي تمثله العبارة الجبرية ٣ (ي + ٤) = ٣ي + ١٢

في الفقرة (ذ) من السؤال الثاني في النشاط الأول



ربما يعتبر هذا المثال نقطة بداية مناسبة للنقاش الجماعي قبل طرح المسألة المعطاه للطلاب في هذا السؤال.

الشكل ١



من المحتمل أن يقوم الطلاب بإعطاء الطرق التالية لحساب المساحة غير المظللة :

طرح مساحة الجزء المظلل من مساحة المستطيل الكلي .

تقسيم المنطقة غير المظللة إلى مستطيلين باستخدام خط أفقي

تقسيم المنطقة غير المظللة إلى مستطيلين باستخدام خط راسي .

تقسيم المنطقة غير المظللة إلى ثلاث مستطيلات باستخدام خط أفقي واخر راسي .

الان أعط الطلاب الوقت الكافي للعمل بشكل فردي أو ثنائي لحساب الصيغة المقابلة لكل من الحالات التالية ومن ثم اطلب إلى المجموعات عرض حلولهم.

٨٤ – ٣س

٣ (١٢ – س) + ٤٨

٤س + ٧ (١٢ – س)

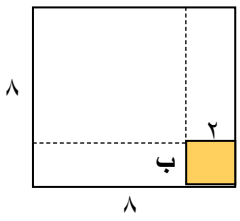
٤س + ٤ (١٢ – س) + ٣ (١٢ – س)

يعطي المعلم الطلاب وقتاً كافياً ليقوموا بفك الأقواس وجمع الحدود المتشابهة، لبيان أن جميع هذه العبارات الجبرية تختصر إلى ٨٤ –٣س. يجب على المعلم حث مجموعات الطلاب على تلخيص العمليات التي أجروها استعداداً للسؤال الثاني.

السؤال الثاني

بعد اتمام العمل مع مجموعة من الطلاب في مثال واحد فإن بإمكان الطلاب الآن اتمام هذا السؤال بأنفسهم.

الشكل ٢



بعض العبارات التالية يمكن صياغتها و من ثم اثبات انها جميعاً متكافئة

إطرح مساحة الجزء المظلل من مساحة المستطيل الكلي

٦٤ – ٢ب .

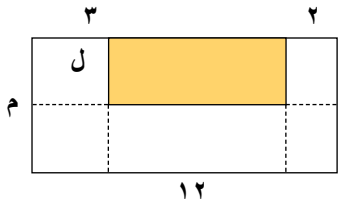
إقسم المنطقة غير المظللة باستخدام خط أفقي

٨(٨ – ب) + ٦ب .

إقسم المنطقة غير المظللة باستخدام خط رأسي

٤٨ + ٢(٨ – ب) .

الشكل ٣



إطرح مساحة الجزء المظلل من مساحة المستطيل الكلي

١٢م – ٧ل.

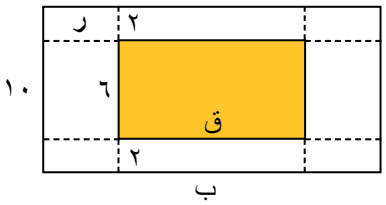
إقسم المنطقة غير المظللة باستخدام خط أفقي

٣ل + ١٢(م – ل) + ٢ل.

إقسم المنطقة غير المظللة باستخدام خطوط رأسية

٣م + ٧(م – ل) + ٢م.

الشكل ٤



إطرح مساحة الجزء المظلل من مساحة المستطيل الكلي

١٠ب – ٦ق.

إقسم المنطقة غير المظللة باستخدام خطوط أفقية

٢ب + ٦ر + ٦(ب – ق – ر) + ٢ب.

إقسم المنطقة غير المظللة باستخدام خطوط رأسية

١٠ر + ٢ق + ٢ق + ١٠(ب – ق – ر).

"موهبة .. حيث تنتمي"

السؤال الثالث

إن جعل الطلاب يقومون بتكوين مسائل مشابهه بأنفسهم سيساعد في تعزيز الفهم لديهم مما سيمكن المعلم من الكشف عن مدى إستيعابهم.

في بعض الأحيان يقوم الطلاب بوضع تمارين صعبة وهذا يعزز مدى فهمهم و تعلمهم لمجالات جديدة.

يمكن للمعلم تعيين بعض الأمثلة المثيرة للإهتمام لطالب أو طالبين و مشاركتها مع المجموعات الأخرى.

السؤال الرابع

في السؤالين الأخيرين سوف ننتقل الى التعابير الجبرية و التي تحتوي على قوسين.

يمكن ايضاح المتطابقة (أ + ب) (ج+ د) = أج + أد + ب ج + ب د

باستخدام الرسم البياني التالي :

الشكل ٥

	أ	ب
ج	أج	ب ج
د	أ د	ب د

من المهم أن يفهم الطلاب الهياكل الأساسية و أن تكون لديهم القدرة على الربط بين مجالات الرياضيات المختلفة.

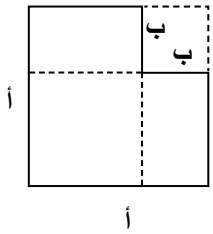
لهذا السبب تم سؤالهم عن شرح العلاقة بين خاصية التوزيع وحاصل ضرب عددين كل منهما مكون من رقمين. يجب مناقشة هذا الرابط مع المجموعات الأخرى.

السؤال الخامس

من المحتمل أن يقوم بعض الطلاب بعمل تصور هندسي للعبارة الجبرية أ^{٢} - ب^{٢} كفرق بين مربعين مساحتهما أ^{٢} و ب^{٢} .

(لاحظ أننا أضفنا خطوطاً منقّطة ليتم تشكيل مربعات)

الشكل ٦



من الممكن ايجاد عبارة جبرية اخرى مكافئة عن طريق تقسيم الشكل الى مستطيلين باستخدام اما خط رأسي أو خط أفقي :

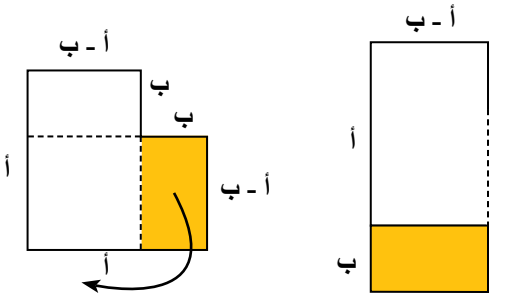
ب(أ – ب) + أ(أ – ب).

أو التفكير باستخدام خطين أفقي ورأسي معاً لتقسيم الشكل الى ثلاث مستطيلات:

ب(أ – ب) + (أ – ب) (أ – ب) + ب(أ – ب)

الإجابة عن السؤال الاخير هي المتطابقة

أ^{٢} - ب^{٢} = (أ – ب)(أ + ب)، وهذا يتطلب إعادة هيكلة الرسم وذلك بأخذ المستطيل الواقع على اليمين ولصقه تحت المستطيل الآخر لعمل مستطيل واحد كما في الشكل أدناه



يجب اعطاء الطلاب بعضا من الوقت للمشاركة.

مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع
King Abdulaziz & his Companions Foundation for Giftedness & Creativity
موهبة

فرص التقويم

سيشجع هذا النشاط الطلاب على التفكير بكل مرونة وستعطيهم المزيد من الثقة في التعامل مع العبارات الجبرية.

- هل الطلاب قادرون على التخيل و ايجاد صيغ جبرية متنوعة باستخدام رموز رياضية صحيحة و ذلك لحساب المساحة؟

- هل لدى الطلاب المقدرة على تبسيط العبارات الجبرية حتى يتمكنوا من اثبات انها متكافئة؟

حول هذا النشاط

يمثل هذا النشاط لغز عددي بسيط ، من الممكن حله عن طريق التجربه و التحسين و لكن من الممكن حله بطريقه أكثر فاعلية باستخدام بعض الطرق الجبرية. وهذا سيعطي للطلاب الفرصة لتركيب و حل المعادلات الجبرية في سياق هادف.

هنالك العديد من الطرق التي يمكن استخدامها للتوسع في هذه المسألة و من ثم تعميمها.

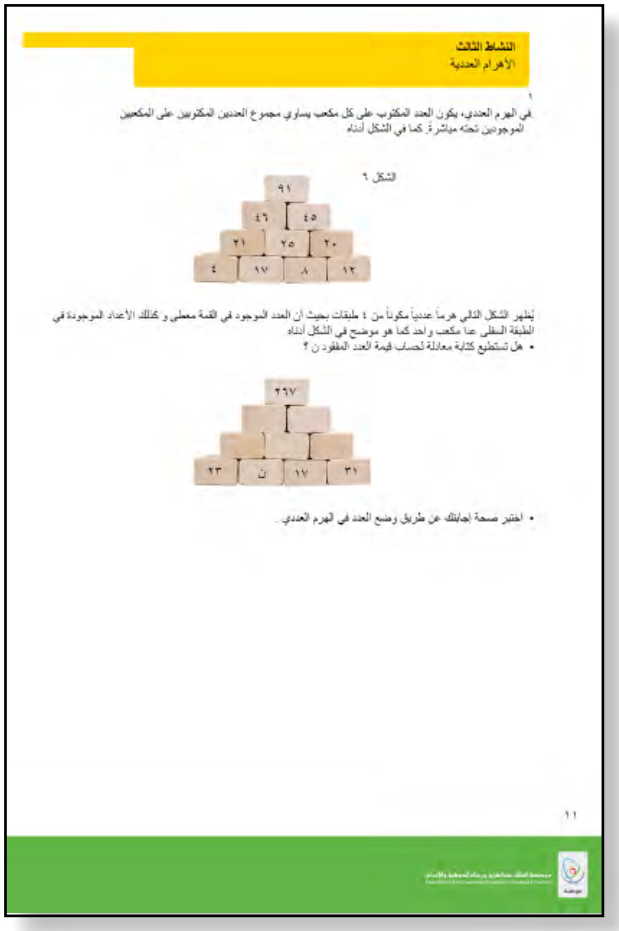
خصائص الأداء المتقدم

- صياغة معادلات جبرية لتمثيل مسألة ما.
- تعميم الطرق المستخدمة و كذلك الحلول .

توصيات اسلوب التدريس

يُعد هذا النشاط أكثر ملائمة لعمل الطلاب بإستقلالية عن المعلم ، حيث أن جميع الأسئلة في هذه النشاط ، تمكن الطلاب من إختبار نتائجهم ذاتياً.

من الممكن للمعلم أن يقوم بتجميع الطلاب معاً من وقت لآخر لمناقشتهم أفكارهم ومن ثم حل الصعوبات المشتركة التي تواجههم.


النشاط الثالث
الأهرام العددية

١

في الهرم العددي، يكون العدد المكتوب على كل مكعب يساوي مجموع العددين المكتوبين على المكعبين الموجودين تحته مباشرةً، كما في الشكل أدناه.

الشكل ٦

٩١
٤٦ ٤٥
٢١ ٢٥ ٢٠
٤ ١٧ ٨ ١٢

يُظهر الشكل التالي هرماً عددياً مكوناً من ٤ طبقات بحيث أن العدد الموجود في القمة معطى و كذلك الأعداد الموجودة في الطبقة السفلى عدا مكعب واحد كما هو موضح في الشكل أدناه.

- هل تستطيع كتابة معادلة لحساب قيمة العدد المفقود ن ؟

٢٦٧
٢٣ ن ١٧ ٣١

- اختبر صحة إجابتك عن طريق وضع العدد في الهرم العددي .

١١

إجابات الأسئلة

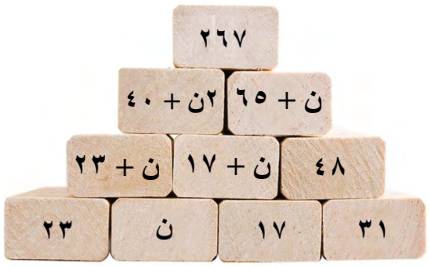
السؤال الأول

يمكن للطلاب أن يقوموا بحل هذه المسألة و بقية المسائل بمفردهم و يمكن أن يتم العمل في مجموعات ثنائية.

يتم التعامل مع هذا السؤال كلغز عددي ، و من الممكن أن يقوم بعض الطلاب باستخدام طريقة التجربة والتحسين و تعويض بعض الأعداد و من ثم تطوير الحل.

قم بمساعدة الطلاب وإيضاح أن هذه الطريقة غير فعالة خصوصاً أذا كانت الأعداد كبيرة .

إن استخدام الطرق الجبرية ، سيمكن الطلاب من اكمال الصيغ الجبرية لحساب قيمة العدد المجهول و ذلك على النحو التالي :



وهذا سيقودنا الى المعادلة

٤٠ + ٢ن + ن + ٦٥ = ٢٦٧، و بالتالي فإن الحل هو ن = ٥٤.

السؤال الثاني

مجموعة المعادلات و الحلول لهذه المسائل هي على النحو التالي:

١. ٢١ + ٢ن + ن + ٥٢ = ١٥٧، ن = ٢٨

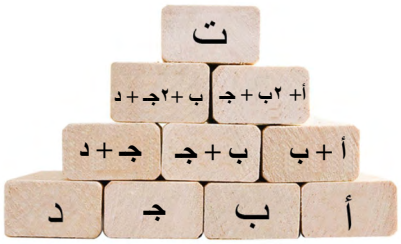
٢. ٩٠ + ن + ٥٥ + ٢ن = ٢١٧، ن = ٢٤

٣. ٦٠ + ٢١ + ن = ١١٩، ن = ٣٨

السؤال الثالث

يجب على الطلاب أن يقرروا بأنفسهم كيف يمكنهم إيجاد صيغة المعادلة. فعلى سبيل المثال ، من الممكن أن يقرروا اعطاء العدد الموجود في القمة الرمز ت والأعداد الموجودة في الطبقة السفلى الرموز أ، ب، جـ، د.

في هذه الحالة يمكن اكمال الهرم العددي كما في الشكل الاتي :



و بالتالي فإن الصيغة الرياضية التي تربط الأعداد هي

ت = أ + ٣ب + ٣جـ + د.

إذا كان العدد أ غير معلوم فإن قيمته ستكون

أ = ت - (٣ب + ٣جـ + د).

إذا كان العدد ب غير معلوم فإن قيمته ستكون

$$ب = \frac{(ت - أ - ٣جـ - د)}{٣}$$ و هكذا .

السؤال الرابع

هذه الأمثلة ستقودنا الى معادلات حيث تكون المجاهيل موجودة على الجانبين .

تأكد من أن لدى الطلاب المقدرة على حل المعادلات التالية:

١. ٢٠ + ٢ن + ٣٩ + ن = ١٠ن + ٣

وبالتالي نحصل على ن = ٨

٢. ١٢٦ + ن + ٨١ + ٢ن = ٤١٧ – ٢ن

وبالتالي نحصل على ن = ٤٢

من الممكن التوسع في الأهرام العددية في هذا السياق إذا رغبنا في ذلك. فعلى سبيل المثال يمكن زيادة عدد الطبقات في الهرم أو تغيير العلاقات بحيث يستخدم الطرح بدلاً من الجمع.

فرص التقويم

بما أن الطلاب في هذا النشاط يعملون بإستقلالية أكثر، فإن هذا سيعطي الفرصة للمعلم للإستماع لهم و سؤالهم و من ثم الحكم على مسيرتهم و تطورهم في هذا النشاط.

- هل للطلاب المقدرة على صياغة المعادلات و كذلك تعميم النتائج ؟
- هل الطلاب قادرين على حل هذه المعادلات بدقة و بثقة وهل هم قادرون على تبرير ما يقومون به؟

"موهبة .. حيث تنتمي"

حول هذا النشاط

في هذا النشاط يتم دراسة البناء الرياضي لشبكة المربعات. وهذا يعطي الفرصة للطلاب ليفكروا بمرونة أكثر و بإبداع من خلال عمل تصورٍ لطرق مختلفة باستخدام لغة الجبر التي تكون رمزاً للتواصل مع تفكيرهم .
هذا النشاط يركز على فهم الطلاب للمتطابقات الجبرية وعلى تطوير تقديرهم لقوة المنطق الجبري .

خصائص الأداء المتقدّم

- عمل نموذج لحالات و من ثم تكوين تعميم جبري لها.
- تصور العمل المنهجي و اعتبار طرق أخرى بديلة للحل .

توصيات أسلوب التدريس

السؤال الأول أكثر ملائمة للنقاش الجماعي مع ملاحظة مشاركة الطلاب النشطين.
بقية الأسئلة يمكن أعطاؤها للطلاب للعمل عليها في مجموعات ثنائية أو في مجموعات صغيرة مع ملاحظة أهمية مشاركة الجميع .

النشاط الرابع
شبكة المربعات

١. قم برسم شبكة مربعات بُعداها (٤ × ٤) باستخدام أعواد ثقاب أو قطع مستقيمة كما في الشكل أدناه :

كم عدد الأعواد التي تحتاجها لبناء هذه الشبكة ؟ هل تستطيع وصف الطريقة التي استخدمتها في العد ؟
كيف يمكنك تسجيل حساباتك لتوضيح النظام الذي استخدمته في العد ؟
هل يوجد طرق منهجية أخرى للعد يمكنك استخدامها؟ اشرح و سجل ملاحظاتك

٢. تصور شبكة مربعات مستطيلة الشكل بُعداها (٤ × ن)
هل تستطيع وصف طريقة منهجية لحساب عدد الأعواد الموجودة في الشبكة ؟
هل تستطيع كتابة صيغة جبرية لحساب عدد الأعواد الموجودة في الشبكة ، مستخدماً المتغير ن ؟
باستخدام طرق منهجية أخرى للعد، كم عدد الصيغ الجبرية التي تستطيع كتابتها؟

٣. أثبت أن جميع الصيغ الجبرية التي تُمثل الأعواد في الشبكة التي بُعداها (٤ × ن) والتي استخدمتها في العد هي متكافئة وذلك عن طريق تبسيط هذه الصيغ .

٤. قم بكتابة معادلة جبرية لإيجاد حل المسألة التالية:
إذا كان لدينا شبكة مربعات مستطيلة الشكل بُعداها (٤ × ن) و كان عدد الأعواد المستخدمة هو ١٣٠ عوداً ، فما هي قيمة ن ؟

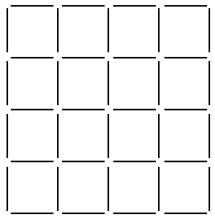
٥. قم بتعميم النتائج التي حصلت عليها في السؤال الثاني لإيجاد صيغة جبرية تبين عدد الأعواد في شبكة مربعات مستطيلة الشكل بُعداها (م × ن) .

١٣

إجابات الأسئلة

السؤال الأول

قبل العمل بشكل مجموعات ، على المعلم أن يطلب من الطلاب أن يقوموا برسم شبكة المربعات بأنفسهم.
وهذا ضروري لأنهم على الأغلب سيقومون بحل السؤال بطرق مختلفة.



ينبغي على المعلم أن يسأل الطلاب عن كيفية تعاملهم مع هذا السؤال . فعلى سبيل المثال ، من المحتمل أن يقول أحد الطلاب انه رسم خمس خطوط رأسية وبعد ذلك رسم خمس خطوط أفقية، بينما يقول طالب آخر أنه رسم حدود المربع أولاً ثم رسم ثلاث خطوط رأسية متبوعة بثلاث خطوط أفقية.
على المعلم أن يوضح للطلاب أن الهدف هو ايجاد و تسجيل الطرق المختلفة للعد المنهجي للأعواد المستخدمة.
يجب على الطلاب أن يسألوا شفهياً عن الطريقة (قد يكون من المفيد التأكيد على التركيبة باستخدام أقلام ملونة مختلفة).
و من ثم اطلب من الطلاب أن يشرحوا كيف قاموا بتسجيل طريقة العد .
هناك العديد من الطرق لعد الأعواد في الشبكة ، منها على سبيل المثال:

- حدود الشبكة (٤×٤) والصفوف الداخلية (٣×٤) والأعمدة الداخلية (٤×٣) ، ليصبح لدينا
  ٤×٤ + ٤×٣ + ٤×٣
- الأعمدة (٥×٤) و الخطوط الأفقية (٥×٤) ليصبح لدينا
  ٥×٤ + ٥×٤
- المربعات الفردية (٤×٤×٤) ناقص ضعف عدد الروابط بينها (٣×٤ + ٣×٤)
  ليصبح لدينا ٤×٤×٤ – (٣×٤ + ٣×٤)
- المربع الأول (٤) و بقية الصف الأفقي (٣×٣) و بقية الصفوف (٣(٣ + ٣×٢)) ليصبح لدينا
  ٤+٣×٣+٣+٣(٣+٣×٢)

على المعلم أن يجمع أكبر عدد من الطرق التي عملتها المجموعات مع التأكد من فهم الطلاب لطريقة التسجيل وارتباطها بنظام العد.

السؤال الثاني

ان تعميم السؤال ليشمل شبكة مربعات بُعداها (ن×٤) يمثل تحد آخر لقدرة الطلاب على التخيل.
يمكن للمعلم أن يطلب من المجموعة حل السؤال على مراحل فعلى سبيل المثال يمكن النظر في شبكة مربعات بُعداها (٤×٥) و (٤ × ٦) قبل البدء في النظر في الشبكة التي بُعداها (٤×ن).
على الطلاب العمل على هذا النشاط في مجموعات ثنائية أو في مجموعات صغيرة وعلى كل مجموعة أن تسجل أكبر عدد من الطرق لعد أعواد الشبكة .
سوف نذكر بعض الطرق المقترحة لتسجيل الصيغ لعدد الأعواد في الشبكة :

- الحدود الخارجية والداخل (الأعمدة والخطوط الأفقية)
  (٢×٤ + ٢ن) + ٤(ن – ١) + ٣ن
- الخطوط الرأسية والأفقية
  ٤(ن + ١) + ٥ن
- المربعات الفردية ناقص العد المزدوج المتكرر بينها
  ٤×٤×ن – (٤(ن – ١) + ٣ن)
- أول مربع و بقية الخط الأفقي و بقية الخطوط الأفقية
  ٤ + ٣(ن – ١) + ٣(٣ + ٢(ن – ١))

من الممكن أن يلاحظ المعلم أن الصيغ التي قام الطلاب بتسجيلها ليست مشابهه لأي من الطرق المذكوره آنفاً، وهذا مقبول و ينبغي تشجيعه ما دام الحل دقيقاً .
يمكن للطلاب أن يتأكدوا من حلولهم بتعويض بعض القيم الصغيرة للمتغير ن والطلب من زملائهم في المجموعات الأخرى التأكد من حلولهم.

"موهبة .. حيث تنتمي"

السؤال الثالث

قد يختار المعلم مناقشة ردود الطلاب حول السؤال السابق، مشيرا بشكل خاص الى كتابة المتطابقات الرياضية . فعلى سبيل المثال

(٢×٤ + ٢ن) + ٤(ن – ١) + ٣ن = ٤(ن + ١) + ٥ن

و ذلك لأن كل جانب من المتطابقة يمثل عدد الأعواد في شبكة المربعات التي بُعداها (٤×ن). بعد ذلك يمكن للطلاب انهاء المهمة بتبسيط الصيغة إلى الصورة ٩ن + ٤.

وهذا يعتبر اختبار لهم على مدى دقه عملهم.

السؤال الرابع

متابعةً لما تم انجازه في السؤال السابق، فإن أبسط معادلة يمكننا الحصول عليها هي:

٤ + ٩ن = ١٣٠ وهذا سيقودنا الى الحل ن = ١٤.

السؤال الخامس

ان الوصول الى هذه النقطة من العمل سيحفز الطلاب على محاولة اكتشاف صيغة عامة لحساب عدد الأعواد في شبكة المربعات بُعداها (م × ن) . فعلى سبيل المثال و بالإعتماد على طريقة عد الخطوط الأفقية والرأسية ، يمكننا الحصول على الصيغة:

م(ن + ١) + ن(م + ١) = م ن + م + ن م + ن =

٢م ن + م + ن

فرص التقويم

هذا النشاط يجمع المعرفة و الفهم والمهارات و ما تم تطويره في الأنشطة السابقة.

- هل كان الطلاب قادرين على العمل بشكل مستقل لعمل هيكلية للبحث و كذلك استخدام أفكار الآخرين بشكل فعّال؟
- هل كان الطلاب قادرين على عمل نموذج للحالة باستخدام الجبر وكذلك مهاراتهم في استخلاص النتائج الصحيحة؟

مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع
King Abdulaziz & his Companions Foundation for Giftedness & Creativity
موهبة

الوحدة الثانية

الدوال الخطية

نظرة عامّة

في هذه الوحدة يقوم الطلاب بربط خصائص الدوال الخطية مع الخصائص الهندسية للمخططات السهمية والتمثيل البياني.
يجب على الطلاب أن يقوموا بتصنيف الدوال وتعميمها وشرح ما سيحصلوا عليه من نتائج.
سوف يستكشف الطلاب تركيب الدوال وكذلك معكوسها وفي النهاية سيكون هناك فرصة لهم للحصول على نتائج غير متوقعة. لذا يجب حث الطلاب على اختيار الادوات والأفكار المناسبة لتطوير نتائجهم من الناحية الهندسية والجبرية.

الأهداف التعلميّة للوحدة

- تحديد خصائص الدوال الخطية وتمثيلها بيانياً بالإضافة إلى معرفة تحصيل ومعكوس تلك الدوال.
- استخدام الطرق الهندسية والجبرية لصياغة التعميم واثبات النتائج.

المعرفة السابقة

معرفة الدوال الخطية بما في ذلك الميل وتقاطع المستقيم مع المحور الصادي وطريقة ترميز الدوال وتمثيلها باستخدام المخططات السهمية و باستخدام التمثيل البياني.

خصائص الأداء المتقدم

القيم والاتجاهات والسمات

- الإستقلالية والمثابرة على الدراسة (النشاط الثالث)
- العمل المنهجي المنظم (النشاط الثاني)

المهارات المتقدّمة

- التفكير المنطقي والاستدلالي (الأنشطة الأول، والثالث، والرابع)
- تكوين الصورة الذهنية (النشاط الأول)
- التعميم (النشاط الأول)
- القدرات فوق المعرفية (جميع الأنشطة)

المعرفة والفهم المتقدمان

- إنشاء الروابط (النشاطان الثالث، والرابع)
- الفهم المتعمق للبيئة الرياضية الأساسية (النشاط الثاني)
- التبرير والبرهان (النشاط الرابع)

الخطة الزمنيّة

ست ساعات تقريباً

المصادر

برنامج الجداول الإلكترونية (إكسل)، برامج حاسوبية في الرسم، آلات حاسبة.

حول هذا النشاط

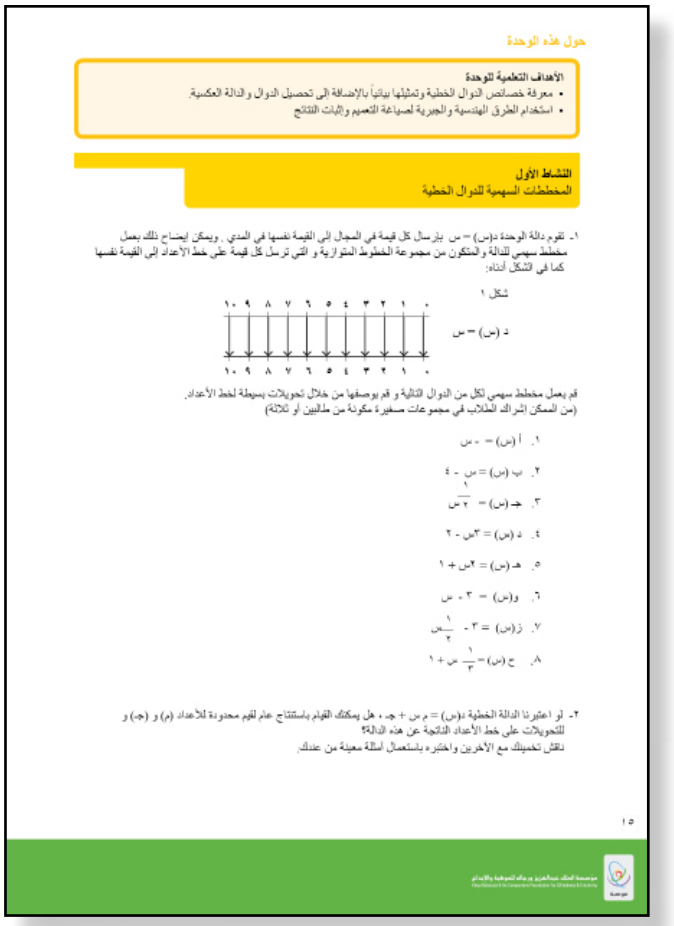
يُعطي هذا النشاط الطلاب الفرصة لكي يقوموا بالربط بين خصائص الدوال الخطية والخصائص الهندسية للمخطط السهمي وكذلك التمثيل البياني لهذه الدوال. يتوجب على الطلاب تصنيف الدوال و من ثم تعميمها وكذلك شرح نتائجهم.

خصائص الأداء المتقدّم

- بناء تصور للنتائج والربط بينها ومن ثم تعميم تلك النتائج.
- الإستدلال الجبري والهندسي.

توصيات أسلوب التدريس

قبل البدء في المهمة الأولى على المدرس التأكد من معرفة الطلاب المسبقة بترميز الدوال والتعريف بها في حالة عدم معرفتهم بذلك.
هذا النشاط ملائم للعمل في مجموعات صغيرة وخصوصاً عند استحداث عدد كبير من الأمثلة . يمكن للمعلم أن يجمع المجموعات مع بعضهم لتوضيح النقاط الغامضة وحثهم على مشاركة أفكارهم ودعوة الطلاب ليقوموا بشرح نتائجهم وتلخيصها.



حول هذه الوحدة

الأهداف التعليمية للوحدة
- معرفة خصائص الدوال الخطية وتمثيلها بيانياً بالإضافة الى تحصيل الدوال والدالة العكسية.
- استخدام الطرق الهندسية والجبرية لصياغة التعميم وإثبات النتائج

النشاط الأول
المخططات السهمية للدوال الخطية

١- تقوم دالة الوحدة د(س) = س بإرسال كل قيمة في المجال إلى القيمة نفسها في المدى . ويمكن إيضاح ذلك بعمل مخطط سهمي للدالة والمتكون من مجموعة الخطوط المتوازية و التي ترسل كل قيمة على خط الأعداد إلى القيمة نفسها كما في الشكل أدناه:

شكل ١

د (س) = س

قم بعمل مخطط سهمي لكل من الدوال التالية و قم بوصفها من خلال تحويلات بسيطة لخط الأعداد.
(من الممكن أن تراك الطلاب في مجموعات صغيرة مكونة من طالبين أو ثلاثة)

١. أ (س) = - س
٢. ب (س) = س - ٤
٣. جـ (س) = $\frac{1}{2}$ س
٤. د (س) = ٣س - ٢
٥. هـ (س) = ٢س + ١
٦. و (س) = ٣ - س
٧. ز (س) = $\frac{1}{2}$ س - ٣
٨. ح (س) = $\frac{1}{3}$ س + ١

٢- لو اعتبرنا الدالة الخطية د(س) = م س + جـ ، هل يمكنك القيام باستنتاج عام لقيم محدودة للأعداد (م) و (جـ) و للتحويلات على خط الأعداد الناتجة عن هذه الدالة؟
ناقش تخمينك مع الآخرين واختبره باستعمال أمثلة معينة من عندك.

١٥

إجابات الأسئلة

السؤال الأول

قبل أن يبدأ الطلاب بالعمل على هذا السؤال، يجب مشاركتهم في بعض المعاني والمصطلحات للدوال وترميزها باستخدام مثال أو مثالين حسب الحاجة لذلك، وهذا يشمل كل مما يلي:

- استخدام كلمة المجال وهي مجموعة القيم للمتغيرات المستقلة والتي تعرّف الدالة. وكذلك استخدام كلمة المدى والتي تعني مجموعة القيم التي تكون صورة للقيم الموجودة في المجال تحت تأثير الدالة.
- استخدام الحروف وترميز الدوال، على سبيل المثال د(س) = ٢س + ٣
- تمثيل الدوال باستخدام الرسوم التخطيطية.
- استخدام الرمز د(س) للتعبير عن الصورة تحت تأثير الدالة س ⟵ د(س)

إذا كان هناك بعض الطلاب غير متأكدين من تحديد التحويلات التالية، يمكنهم الإطلاع على الملاحظات الآتية حول الدوال الثلاث الأولى في السؤال الأول للمساعدة، ويجب على الطلاب التفكير بخط الأعداد كمخطط للدالة والمتجه إلى نفسه.

الإنعكاس

(١) تخيل مرآه متعامدة على خط الأعداد وتمر بنقطة الأصل . ستجد أن صورة العدد ١ هي -١ وكذلك فإن صورة العدد ٢ هي -٢.... وهكذا.

الإزاحة

(٢) الإزاحة هي التحويل الذي يرسل كل نقطة في شكل ما إلى نقطة أخرى بنفس المسافة والإتجاه.

يتم تحديد هذا التحويل باستخدام المسافة والإتجاه والذي يمكن صياغته باستخدام المتجه العمود $\begin{pmatrix} أ \\ ب \end{pmatrix}$ حيث يمثل أ مقدار الإزاحة الأفقية و يمثل ب مقدار الإزاحة العمودية.

في هذا المثال يوجد لدينا تحويل بمقدار –٤ لأن صورة العدد ٢ هي –٢ وكذلك صورة العدد ٣ هي –١، وهكذا.

التمدد

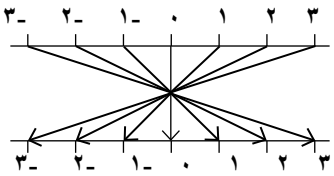
(٣) فكر فيما سيحدث للقطعة المستقيمة، فعلى سبيل المثال تم تصغير القطعة المستقيمة الواصلة بين ٠ و ١ إلى القطعة المستقيمة الواصلة بين ٠ و $\frac{١}{٢}$

وكذلك تم تصغير القطعة المستقيمة الواصلة بين ٠ و ٢ إلى القطعة المستقيمة الواصلة بين ٠ و ١ ...وهكذا. وهذا يسمى تمدد بمعامل قياس $\frac{١}{٢}$ (أقل من ١).

جميع أسهم الرسم التخطيطي إذا استمرت سوف تتقاطع في مركز التمدد وهو ٠.

الرسم التخطيطي لتحويل الدوال المعطاه هو كما يلي:

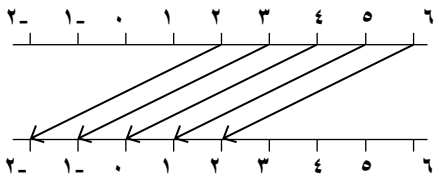
١- الشكل ١



أ(س) = - س

انعكاس في النقطة ٠

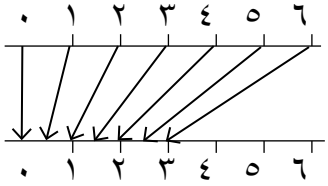
٢- الشكل ٢



ب (س) = س - ٤

إزاحة بمقدار -٤

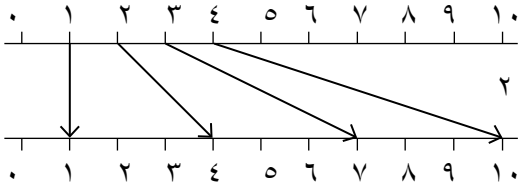
٣- الشكل ٣



ج $\frac{١}{٢}$ (س) س

تمدد بمعامل قياس $\frac{١}{٢}$ ومركزه ٠.

٤- الشكل ٤

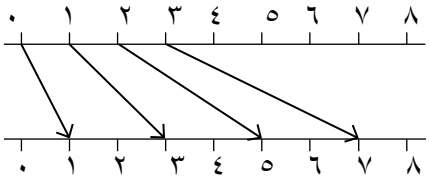


د(س) = ٣ س - ٢

تمدد بمعامل قياس ٣ و مركزه ١.

مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع
King Abdulaziz & his Companions Foundation for Giftedness & Creativity
موهبة

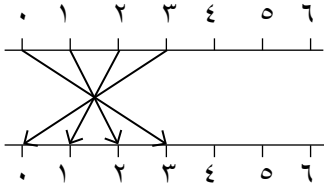
٥- الشكل ٥



هـ (س) = ٢ س + ١

تمدد بمعامل قياس ٢ و مركزه -١

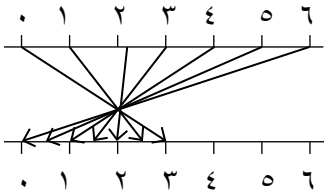
٦- الشكل ٦



و (س) = ٣ - س

انعكاس عند ١,٥

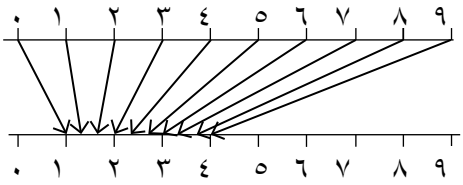
٧- الشكل ٧



ز(س)= ٣ - $\frac{١}{٢}$ س

تمدد بمعامل قياس - $\frac{١}{٢}$ ومركزه ٢

٨- الشكل ٨



ح (س) = $\frac{١}{٣}$ س + ١

تمدد بمعامل قياس $\frac{١}{٣}$ ومركزه ١,٥

السؤال الثاني

يمكن للطلاب أن يبدؤا هذا السؤال بإنشاء تصنيف للأمثلة التي مرّت عليهم في السؤال السابق. من المحتمل أن يقوم بعض الطلاب بعمل بعض التعميمات التالية:

- إذا كانت م = ١ فإن التحويل هو إزاحة بمقدار جـ
- إذا كانت م = -١ فإن التحويل هو إنعكاس في $\frac{جـ}{٢}$
- لجميع القيم الأخرى للعدد م فإن التحويل هو تمدد بمعامل قياس يمكن للطلاب كذلك كتابة ملاحظاتهم حول موقع مركز التمدد، فعلى سبيل المثال:
- عندما تكون م > ١ فإن مركز التمدد هو فوق الخط الذي يمثل المجال (مثال ٤ و ٥)
- عندما تكون ١> م > ٠ فإن مركز التمدد هو تحت الخط الذي يمثل المدى (مثال ٣ و ٨).
- عندما تكون م < ٠ فإن مركز التمدد يكون بين الخطين الذين يحتلان المجال والمدى كما في المثالين (١ و٦ و ٧).

من المحتمل أن يلاحظ الطلاب أن المثالين (٦) و (٧) هما تركيب من انعكاس وتمدد.

سيتم في السؤال الرابع مناقشة قيمة س التي تحدد المركز

السؤال الثالث

من المهم أن يتم تشجيع الطلبة للأخذ بالإعتبار المسائل من الناحيتين الجبرية والهندسية.

يمكن للطلاب من خلال المخطط السهمي للدوال أن يحددوا قيم الدالة من خلال القيمة إلتي ترتد إلى نفسها كما يلي:

١. س = ٠ ٢. لا يوجد ٣. س = ٠
٤. س = ١ ٥. س = -١ ٦. س = ١,٥
٧. س = ٢ ٨. س = ١,٥

من خلال المخطط السهمي للدوال في الفقرات (١) ، (٦) و(٧) فإن أسهم الرسم التخطيطي تتقاطع في نقطة تحدد قيمة س والتي تكون هي صورة نفسها.

أسهم المخطط السهمي للدوال ح (س) ، هـ (س) ، جـ (س) ، د(س)تحتاج إلى توسيع لتحوي نقطة التقاطع .

الإستثناء الوحيد هنا هو الدالة ب(س) = س - ٤ بحيث تكون جميع الأسهم في المخطط السهمي متوازية.

من ناحية جبرية فإن الدالة التي يكون فيها كل عنصر صورة من نفسه هي الدالة د(س) = س.

فعلى سبيل المثال حل المعادلة د(س) = ٣س - ٢ = س سوف يعطينا س = ١.

الحالات الخاصة سوف تكون مثيرة للإهتمام لأنها ستقودنا إلى معادلات لا حل لها. فعلى سبيل المثال

ب (س) = س - ٤= س .

"موهبة .. حيث تنتمي"

السؤال الرابع

في هذا السؤال سوف نقوم بتعميم النتائج الموجودة في السؤال الثالث بالإستعانة بالتمثيل البياني.

لإيجاد القيم التي تكون صورتها تحت تأثير الدالة

د(س) = م س + جـ هي نفسها نكتب س= م س + جـ

وبالتالي فإن الحل هو $س = \frac{جـ}{١ - م}$.

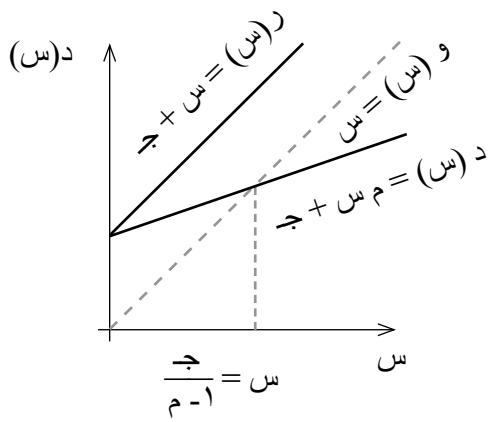
يمكن استخدام هذه الصيغة للتحقق من الأمثلة الموجودة في السؤالين الأول والثاني بما في ذلك الحالات الخاصة عندما م = ١ وعند عدم وجود أي قيمة.

في المستوى الإحداثي تكون القيم في السؤال هي نقاط تقاطع الدالة و دالة الوحدة و(س) = س. التمثيلات البيانية التي لا تتقاطع تكون موازية لدالة الوحدة و تكون على الصورة التالية

ر (س) = س + جـ

الأمثلة في الشكل التالي توضح ذلك:

الشكل ٩



فرص التقويم

- هل لدى الطلاب المقدرة على استخدام الترميز الصحيح و بناء الأشكال بدقة وتحديد الخصائص الهندسية؟
- هل باستطاعة الطلاب تصنيف وتعميم و شرح الروابط بين الجبر والهندسة؟

مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع
King Abdulaziz & his Companions Foundation for Giftedness & Creativity
موهبة

حول هذا النشاط

سوف يستكشف الطلاب في هذا النشاط كيفية كتابة الدوال كتركيب لضرب وجمع عناصر. و كذلك سيكون لديهم المقدرة على تطوير طرق في تحديد الدوال باستخدام مجموعة من البيانات المولدة من خلال خصائص تحصيل الدوال.

خصائص الأداء المتقدّم

- الحصول على تعمق أكثر في بنية وخصائص الدوال الخطية.
- العمل على المهام وتسجيلها بطريقة منهجية.

توصيات أسلوب التدريس

يعتبر السؤال الأول مناسباً أكثر للعمل ضمن مجموعات صغيرة مع الحرص على إجراء مناقشات بين تلك المجموعات عندما يستدعي الأمر ذلك.
يتوجب على المعلم التنقل بين المجموعات وطرح الأسئلة المناسبة سواءاً في النشاطات الفردية أو الجماعية.

إجابات الأسئلة

السؤال الأول

من الأفضل إعطاء الطلاب الفرصة لابتكار الطرق الخاصة بهم للحصول على هذه الدوال. أول ثلاث دوال قد تكون واضحة للطلاب من خلال فحص البيانات.
بشكل عام فإن أسرع طريقة لفحص ما إذا كانت مجموعة القيم المعطاه تمثل نسب هو استخدام الآلة الحاسبة لحساب قيمة الكسر $\frac{د(س)}{س}$
ومعرفة ما إذا كان هذا المقدار يمثل مقداراً ثابتاً.
إذا لم يكن المقدار ثابتاً فمن خلال معرفة أن جميع الدوال المعطاه هي خطية، فيجب إيجاد قيمة م، جـ من خلال كتابة وحل زوج من المعادلات الخطية المتزامنة.
لشرح ذلك نأخذ الدالة رقم (٤):
د(س) = م س + جـ
نعوض القيمة س = ١٠ والقيمة د(س) = ٥٥ لنحصل على المعادلة ١٠م + جـ = ٥٥
وكذلك نعوض القيمة س = ٣ ، د(س) = ٦ لنحصل على المعادلة ٣م + جـ = ٦.

النشاط الثاني
تركيب الدوال الخطية

١. الدالة التناسبية د(س) = م س هي حالة خاصة من الصورة العامة للدالة الخطية د(س) = م س + جـ .
في الجدول أدناه، حدد الدوال التناسبية وأوجد ثابت التناسب م. ثم اكتب الدوال الأخرى على الصورة د(س) = م س + جـ .

١	س	أ(س)	٢	ب(س)	٣	س	جـ(س)
	١	٤		٥		٣	٧
	٢	٨		٧		٧	١٥
	٦	٢٤		١١		١٢	٢٥
	٩	٣٦		١		٢٣	٤٧

٤	س	د(س)	٥	هـ(س)	٦	س	و(س)
	١٠	٥٥		١٩		٢٨	١٨٢
	٣	٦		٢٤		١٦	١٠٤
	٨	٤١		٤٦		٤٢	٢٧٣
	١٧	١٠٤		٣٥		٩٤	٦١١

٧	س	ز(س)	٨	ح(س)	٩	س	ط(س)
	١٢	٩٣,٦		١٤,٢		٨	١٢-
	٧	٥٤,٦		٩,٩		٢	٦
	٤٥	٣٥١		٣٢١		١٥	٣٣-
	٢٦	٢٠٢,٨		٥٥,٥٥		٧-	٣٣

٢. تتكون الدوال الخطية من عملية واحدة أو عمليتين: الضرب (أو القسمة) والجمع (أو الطرح). وهذه الدوال المبسطة يمكن كتابتها على النحو التالي: د(س) = م س وكذلك ر(س) = س + جـ . و يمكننا تجميع الدالتين معاً، وذلك بتطبيق الدالة ر(س) أولاً ومن ثم تعويض النتائج في الدالة د(س) وهذا يعطينا الدالة د(ر(س)) ويعبر عنها بالصورة د ○ ر(س). أو من الممكن تطبيق الدالة د(س) أولاً ومن ثم تعويض الدالة ر(س) وهذا يعطينا الدالة ر(د(س)) ويعبر عنها بالصورة ر ○ د(س).

لاحظ أن هذان التركيبان لا يعطيان نفس الإجابة في معظم الأحيان.
قارن بين الدالة د ○ ر(س) و الدالة ر ○ د (س) من حيث التالي:
١. ما علاقة الدالتين بمعضهما البعض؟
٢. هل تركيب هذه الدوال الخطية يكون دائماً دالة خطية؟
٣. تحت أي شرط يمكن أن تحدث المساواة د ○ ر(س) = ر ○ د (س).
وضح نتائجك باستخدام مخطط سهمي و كذلك إنشاء تمثيل بياني لدالة أو دالتين معينتين. قم بعمل ذلك بالمشاركة مع زميل لك أو من خلال مجموعة صغيرة وقم بتحديد دوال لزملاءه آخرين لك في الفصل و شاركهم في النتائج التي حصلت عليها.

٣- قم بالبحث عن تركيبات أخرى للدوال د(س) = م س ، ر(س) = س + جـ ، على سبيل المثال
د ○ ر ○ د ، ر ○ د ○ ر ○ د ، د ○ ر ○ د ○ ر ○ د وهكذا .
اشرح ما حصلت عليه ووضح اجابتك بإعطاء بعض الأمثلة.

١٧

إن حل هاتين المعادلتين سوف يعطينا م٧ = ٤٩ وبالتالي فإن م = ٧ ، جـ = -١٥.
من الممكن أن يقترح الطلاب كخيار بديل ايجاد قيمة الميل باستخدام القاعدة:

$$م = \frac{د(أ) - د(ب)}{أ - ب} = \frac{٥٥ - ٦}{١٠ - ٣}$$

"موهبة .. حيث تنتمي"

يتوجب على المعلم ترك هذا السؤال مفتوحاً للطلاب والتأكد من الطرق المختلفة التي سيأتي بها الطلاب ويتم مناقشتها حتى يقوم الطالب بالربط بما يعرفه مسبقاً.

الحلول هي كالتالي:

١- أ(س) = ٤ س

٢- ب (س) = $\frac{١}{٤}$ س

٣- جـ (س) = ٢س + ١

٤- د (س) = ٧س - ١٥

٥- هـ (س) = $\frac{١}{٣}$ س + ١٢

٦- و(س) = ٦,٥س

٧- ز(س) = ٧,٨ س

٨- ح (س) = ٤,٦ س

٩- ط (س) = ١٢ – ٣س

الدوال التناسبية هي: ١ ، ٢ ، ٦ ، ٨.

السؤال الثاني

د ○ ر(س) = م(س + جـ) = م س + م جـ

ر ○ د(س) = م س + جـ

كل من هاتين الدالتين هي دالة خطية ولهما نفس الميل وبالتالي فإن التمثيل البياني لهما سيكون متوازياً. وهذا يعني أن المسافة بين التمثيلين البيانيين لتركيبي الدالتين د ○ ر(س) ، ر ○ د(س) تكون ثابتة.

هذه المسافة يمكن رؤيتها بشكل أفضل على المحور الصادي وذلك بالنظر إلى المسافة بين تقاطع المستقيمين مع المحور الصادي في النقطتين (٠ ، م جـ) و (٠، جـ). القيمة المطلقة للمسافة بين تركيبي الدالتين هي |م جـ - جـ|.

من خلال التحويلات الهندسية نقول أن الدالة د ○ ر(س) هي إزاحة للدالة ر ○ د(س) باتجاه الإحداثي الصادي بمقدار |م جـ - جـ|. تكون الدالتان متطابقتان في حالة أن م = ١.

على المعلم أن يطلب من الطلاب شرح هذه التعميمات مقرونة بأمثلة و باستخدام المخطط السهمي و كذلك التمثيل البياني. وفي حال كان الطلاب يعملون في مجموعات صغيرة فيفضل أن يقوم كل طالب بالعمل على مثال مختلف و التأكد من أن هذه الأمثلة تحوي الحالة

د ○ ر(س) = ر ○ د(س).

السؤال الثالث

يعتبر هذا السؤال مفتوحاً للطلاب وعلى المعلم أن يطلب من الطلاب أن يقوموا بحله بأنفسهم و بطريقة منهجية.

د ○ د(س) = م^{٢}س

د ○ د ○ د(س) = م^{٣}س

ر ○ ر(س) = س + ٢جـ

ر ○ ر ○ ر(جـ) = س + ٣جـ

د ○ د ○ ر(س) = م^{٢}(س + جـ)

د ○ ر ○ د(س) = م (م س + جـ)

ر ○ د ○ د(س) = م^{٢}س + جـ

ر ○ ر ○ د(س) = م س + ٢جـ

ر ○ د ○ ر(س) = م (س + جـ) + جـ

د ○ ر ○ ر(س) = م (س + ٢جـ)

هنالك العديد من الملاحظات التي من المحتمل أن يسأل عنها الطلاب، فعلى سبيل المثال الدوال التالية:

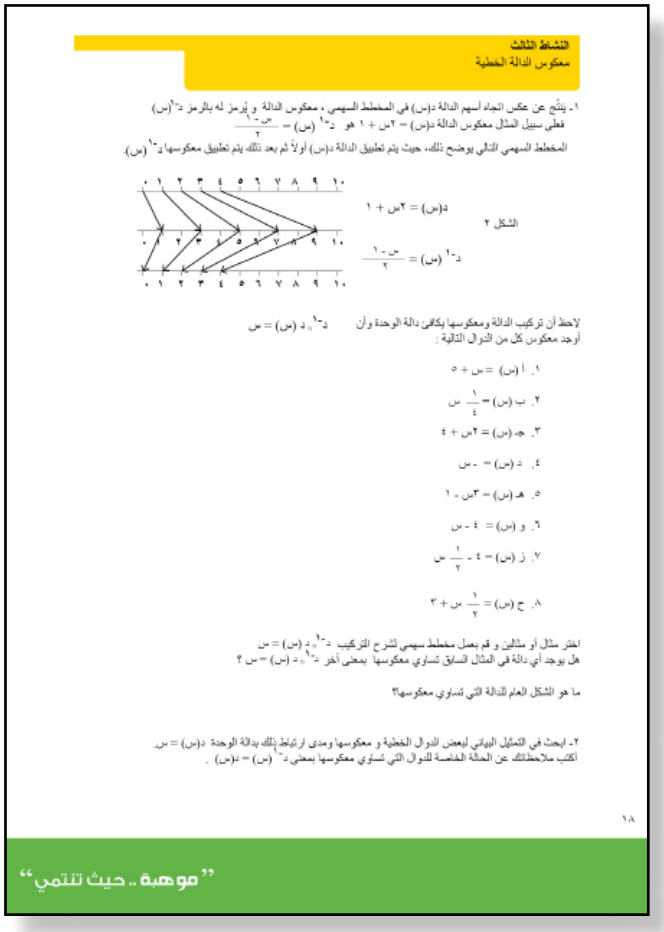
د ○ د ○ ر(س) ، د ○ ر ○ د(س) ، ر ○ د ○ د (س) لها نفس الميل وكذلك الحال بالنسبة للدوال ر ○ ر ○ د(س)، ر ○ د ○ ر(س)، د ○ ر ○ ر(س).

يجب حث الطلاب على إيجاد أمثلة مشابهة وكذلك تمثيلها بيانياً. سيكون من المفيد جدا للطلاب أن يقوموا بالتحقق من نتائج بعضهم البعض و مقارنتها وبيان أوجه التشابه والإختلاف.

فرص التقويم

- هل للطلاب المقدرة على تحديد دوال معينة باستخدام طرق جبرية عند الحاجة؟
- هل للطلاب المقدرة على بناء تركيب الدوال والعمل بمنهجية لتعميم تلك النتائج؟

مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع
King Abdulaziz & his Companions Foundation for Giftedness & Creativity
موهبة


النشاط الثالث
معكوس الدالة الخطية

١- ينتج عن عكس اتجاه أسهم الدالة د(س) في المخطط السهمي ، معكوس الدالة و يُرمز له بالرمز د$^{-١}$(س)
فعلى سبيل المثال معكوس الدالة د(س) = ٢س + ١ هو د$^{-١}$(س) = $\frac{س - ١}{٢}$
المخطط السهمي التالي يوضح ذلك، حيث يتم تطبيق الدالة د(س) أولاً ثم بعد ذلك يتم تطبيق معكوسها د$^{-١}$(س).

د(س) = ٢س + ١

الشكل ٢

د$^{-١}$(س) = $\frac{س - ١}{٢}$

لاحظ أن تركيب الدالة ومعكوسها يكافئ دالة الوحدة وأن د$^{-١}$ ○ د (س) = س
أوجد معكوس كل من الدوال التالية :

١. أ (س) = س + ٥
٢. ب (س) = $\frac{١}{٤}$ س
٣. جـ (س) = ٢س + ٤
٤. د (س) = - س
٥. هـ (س) = ٣س - ١
٦. و (س) = ٤ - س
٧. ز (س) = $\frac{١}{٢}$ س - ٤
٨. ح (س) = $\frac{١}{٣}$ س + ٣

اختر مثال أو مثالين و قم بعمل مخطط سهمي لشرح التركيب د$^{-١}$ ○ د (س) = س
هل يوجد أي دالة في المثال السابق تساوي معكوسها بمعنى آخر د$^{-١}$ = د (س) = س ؟

ما هو الشكل العام للدالة التي تساوي معكوسها؟

٢- ابحث في التمثيل البياني لبعض الدوال الخطية و معكوسها ومدى ارتباط ذلك بدالة الوحدة د(س) = س.
اكتب ملاحظاتك عن العلاقة الخاصة للدوال التي تساوي معكوسها بمعنى د$^{-١}$ (س) = د(س) .

١٨

"موهبة .. حيث تنتمي"

حول هذا النشاط

سوف يقوم الطلاب في هذا النشاط بتوسيع معرفتهم بتركيب الدوال جبرياً وهندسياً وذلك من خلال معكوس الدالة. وسوف يبدأوا استخدام ترميز الدوال بشكل أكثر عمومية من السابق.

خصائص الأداء المتقدّم

- العمل بشكل مستقل في إيجاد وشرح الأمثلة واستخلاص النتائج.
- الربط بين الصفات الجبرية والهندسية وتطوير مفهوم التبرير لدى الطلاب.

توصيات أسلوب التدريس

كما في النشاط السابق، يفضل العمل على هذا النشاط من خلال مجموعات صغيرة مع الحرص على إجراء بعض المناقشات من خلال العمل الفردي أو الجماعي. يتوجب على المعلم التنقل بين الطلاب وأخذ النقاط والتعليقات المهمة من الطلاب وطرح الأسئلة الملائمة.

إجابات الأسئلة

السؤال الأول

ليس من المتوقع أن يواجه الطلاب الكثير من الصعوبات في إيجاد معكوس الدوال كما يلي:

١- أ$^{-١}$(س) = س - ٥

٢- ب$^{-١}$(س) = ٤س

٣- جـ$^{-١}$(س) = $\frac{١}{٢}$(س - ٤)

٤- د$^{-١}$(س) = - س

٥- هـ$^{-١}$(س) = $\frac{١}{٣}$ (س + ١)

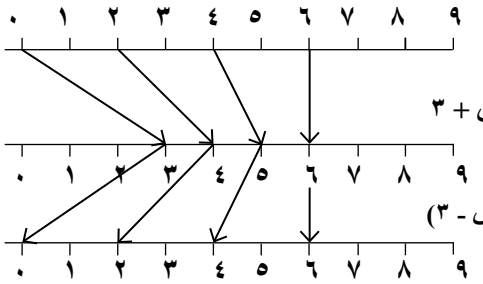
٦- و$^{-١}$(س) = ٤ - س

٧- ز$^{-١}$(س) = ٢ (س - ٤)

٨- ح$^{-١}$(س) = ٢ (س - ٣)

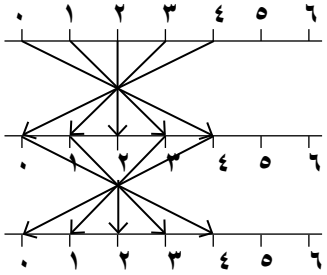
أمثلة على معكوس الدوال من خلال المخططات السهمية:

٨. ح (س) = $\frac{١}{٢}$ س + ٣



ح$^{-١}$(س) = ٢ (س - ٣)

٦. و (س) = ٤ - س



و$^{-١}$(س) = ٤ - س

الدوال التي تساوي معكوسها هي كالتالي:
د(س) = - س ، و(س) = ٤ - س
الصيغة العامة للدوال التي تساوي معكوسها تكون على الشكل التالي: د(س) = جـ - س، والإثبات يكون كالتالي:
إذا كان د(س) = م س + جـ. فإن المعكوس هو

$$د^{-١}(س) = \frac{س - جـ}{م}$$

وبأخذ المساواه د$^{-١}$(س) = د (س) نحصل على المعادلة

$$م س + جـ = \frac{س}{م} - \frac{جـ}{م}$$

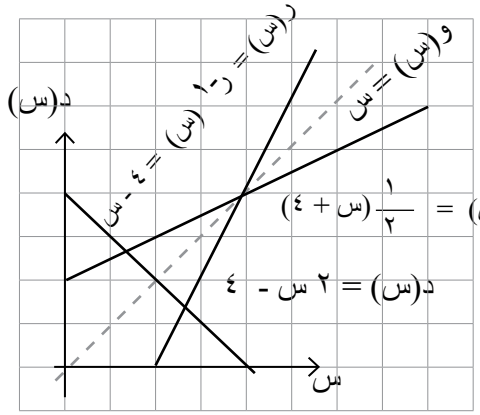
وتكون هذه الصيغ متطابقة إذا كان

م = $\frac{١}{م}$ و كذلك ١ = $\frac{-١}{م}$ وهذا يقودنا إلى الحل م = –١.

السؤال الثاني

التمثيلات البيانية للدوال د(س) = ٢س – ٤ ، ر(س) = ٤ – س معطاه في الشكل أدناه:

الشكل ١٢



نلاحظ في الشكل أن معكوس الدوال يمكن رسمه بعمل إنعكاس حول دالة الوحدة و(س) = س وكذلك فإن الدوال التي تساوي معكوسها تكون متعامدة مع دالة الوحدة. (انظر التمثيل البياني للدالة ر(س)).

السؤال الثالث

الهدف من هذا السؤال هو إيجاد معكوس تركيب الدوال
جـ(س) = د ∘ ر(س). يقترح أن يقوم الطلاب بإعطاء بعض الأمثلة موضحة بالمخططات السهمية و من ثم إيجاد المعكوس. ولكن من المحتمل أن يقوم بعض الطلاب بإعطاء توضيح عام لذلك بطريقة مباشرة.
حيث أنه في الدالة جـ(س) يتم أولاً تطبيق الدالة ر(س) ومن ثم تقوم بتطبيق الدالة د(س) بعد ذلك، وبالتالي فإن المعكوس جـ$^{-١}$(س) يتطلب في البداية تطبيق الدالة د$^{-١}$(س) ومن ثم يتم تطبيق الدالة ر (س) وهذا سيقودنا إلى الصيغة العامة للمعكوس
جـ$^{-١}$(س) = ر$^{-١}$ ∘ د$^{-١}$ (س).

السؤال الرابع

الأسئلة الأربعة الأولى هي تطبيق مباشر لتعاريف الدالة المحايدة، وكذلك معكوس الدوال.
أ) د(س) ب) د(س) جـ) و(س) د) و(س)
الحالات التالية تمثل إختباراً جيداً لمعرفة فهم الطلاب و إذا كان بإمكانهم استنتاج مايلي:
هـ) جـ ∘ ر$^{-١}$(س) = (د ∘ ر) ∘ ر$^{-١}$(س) = د ∘ (ر ∘ ر$^{-١}$) (س) = د ∘ و(س) = د(س)
و) د$^{-١}$ ∘ جـ (س) = د$^{-١}$ ∘ (د ∘ ر) (س) = (د ∘ د) ∘ ر$^{-١}$ (س) = و ∘ ر(س) = ر(س)
المثال التالي يمثل تعميم أكبر يناسب الطلاب للعمل عليه:
ر ∘ جـ ∘ ر$^{-١}$(س) = ر ∘ (د ∘ ر) ∘ ر$^{-١}$(س) = ر ∘ د ∘ (ر ∘ ر$^{-١}$)(س) = ر ∘ د(س)

فرص التقويم

- هل للطلاب المقدرة على إيجاد معكوس الدالة الخطية وتحديد الدوال التي تساوي معكوسها والعمل باستقلالية لشرح النتائج واستخلاص التعميمات؟
- هل يمكن للطلاب إبداء الأسباب باستخدام فرضيات جبرية وهندسية؟

مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع
King Abdulaziz & his Companions Foundation for Giftedness & Creativity
موهبة

حول هذا النشاط

يهدف هذا النشاط إلى إجراء المزيد من التوسع و البناء على ما تم انجازه في الأنشطة السابقة من هذه الوحدة. هذا ومن المحتمل أن يقوم الطلاب باستكشاف بعض النتائج المفاجئة. كما ينبغي حثهم على استخدام الوسائل المختلفة مثل برنامج الجداول الإلكترونية (إكسل) وبرامج الرسم البياني وغيرها) وذلك لمساعدتهم على تطوير تبريراتهم الجبرية والهندسية.

خصائص الأداء المتقدم

- الإستنتاجات الجبرية وربطها بالتمثيلات الهندسية
- بيان أهمية الشرح والبرهان الرياضي

توصيات أسلوب التدريس

يعتبر هذا النشاط أكثر ملائمة للطلاب للعمل في مجموعات ثنائية أو ضمن مجموعات صغيرة. كما هو الحال بالنسبة للأنشطة السابقة، ينبغي على المعلم السماح للطلاب العمل على هيكلة حلولهم في هذا النشاط بأنفسهم مع اعطاء جو من التحدي للطلاب في المسائل التي تحتاج إلى تفكير متقدم، على سبيل المثال استخدام البراهين.

إجابات الأسئلة

السؤال الأول

يجب حث الطلاب في هذا السؤال (وكذلك بقية الأسئلة) أن يقرروا بأنفسهم اختيار الأدوات المناسبة للعمل عليها (على سبيل المثال برنامج الجداول الإلكترونية (إكسل) أو برنامج الرسم البياني).

من المحتمل أن استخدام الجداول الإلكترونية هو أسرع طريقة لاستكشاف ما حدث للمتتابعات التالية:

عندما س = ١:

١، ٣,٥، ٤,٧٥، ٥,٣٧٥، ٥,٦٨٧٥، .....

عندما س = ٢:

٢، ٤، ٥، ٥,٥، ٥,٧٥، ٥,٨٧٥، .....

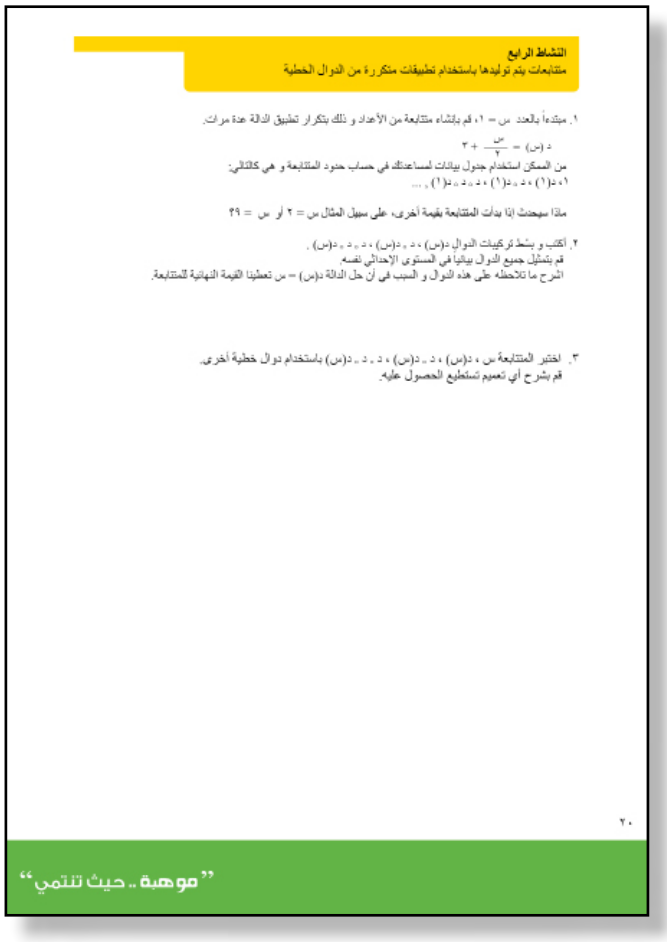
عندما س = ٩:

٩، ٧,٥، ٦,٧٥، ٦,٣٧٥، ٦,١٨٧٥ ، .....

سوف يلاحظ الطلاب أن هذه المتتابعات تقترب من القيمة٦.

وكذلك فإن قيمة الدالة عندما س = ٦ هي د(س) = ٦

وبالتالي فإن جميع حدود المتتابعة هي ٦.



السؤال الثاني

الشكل المبسط للدوال هو:

$$د(س) = \frac{س}{٢} + ٣$$

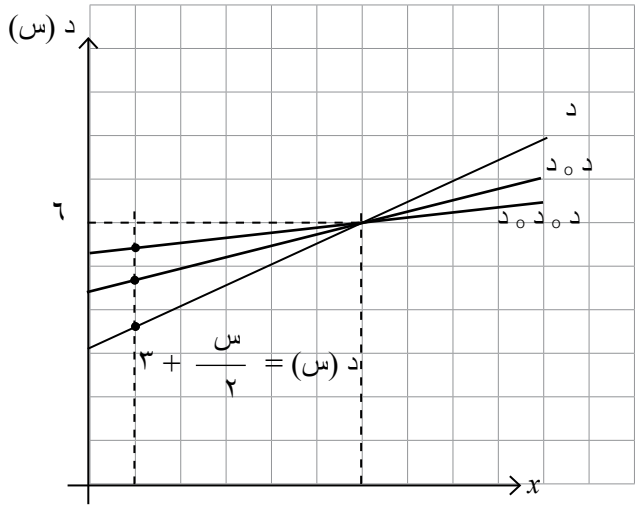
$$د \circ د(س) = ٣ + \frac{٣ + \frac{س}{٢}}{٢} = ٣ + \frac{س}{٤} + ٤,٥$$

$$د \circ د \circ د(س) = ٣ + \frac{٤,٥ + \frac{س}{٤}}{٢} = ٣ + \frac{س}{٨} + ٥,٢٥$$

$$د \circ د \circ د \circ د(س) = ٣ + \frac{٥,٢٥ + \frac{س}{٨}}{٢} = \frac{س}{١٦} + \frac{١١٢٥}{٢٠٠}$$

باستخدام أحد برامج الرسم البياني، يمكننا تمثيل الدوال في الشكل التالي:

شكل ١٣



مجموعة الخطوط المستقيمة تشترك في الخاصية التالية: ميل هذه المستقيمات تناقصي وتمر جميعها بالنقطة (٦,٦).

من المحتمل أن يلاحظ الطلاب أن معادلات الخطوط المستقيمة يمكن كتابتها على الشكل التالي:

$$ص - ٦ = \frac{١}{٢}(س - ٦)$$

$$ص - ٦ = \frac{١}{٤}(س - ٦) \quad \text{وهكذا.}$$

الحالة الخاصة منها هي الخط الأفقي والذي معادلته د(س) = ٦ أو (ص = ٦).

نقاط تقاطع المستقيمات مع المستقيم س = ١ تمثل حدود المتتابعة والتي تم حسابها مسبقاً في السؤال الأول. من خلال ملاحظات الطلاب لربما يكتشف الطلاب أن القيمة المحددة هي عبارة عن حل المعادلة د(س) = س. وهي $\frac{س}{٢} + ٣ = س$، لذلك فإن حل المعادلة هو س = ٦.

السؤال الثالث

للعمل على هذا السؤال يفضل العمل من خلال مجموعات مكونة من ثلاث أو أربع طلاب على أن يقوم كل منهم بالعمل على دالة خطية معيّنة أو دالتين، ومن الممكن أن يقوموا بتعميم نتائجهم.

بالنسبة للدالة د(س) = م س + جـ فلدينا الحالات التالية:

إذا كان م < ١ فإن المتتابعة ستكون تزايدية بطريقة غير خطية.

إذا كان م = ١فإن المتتابعة ستكون متسلسلة حسابية بفارق مشترك جـ.

إذا كان م > ١ فإن المتتابعة ستكون متقاربة إلى القيمة الناتجة عن حل المعادلة: س = م س + جـ وهذا يعني أن

$$س = \frac{جـ}{١ - م}$$

عوضا عن التعميم من حالات خاصة، فإن الطلاب الموهوبين يمكنهم استكشاف الصيغة العامة للدالة وهي على النحو التالي:

د(س) = م س + جـ

د ∘ د (س) = م(م س + جـ) + جـ = م^{٢}س + (١ + م)جـ

د ∘ د ∘ د (س) = م(م^{٢}س + (١ + م)جـ) + جـ =

م^{٣}س + (١ + م +م^{٢})جـ

د ∘ د ∘ د ∘ د (س) = م^{٤} س + (١ + م + م^{٢} + م^{٣})جـ

.....

$$\underbrace{د \circ د \circ د \circ د \ldots \circ د}_{\text{ن من المرات}}(س) = م^{ن} س + (١ + م + م^{٢} + \ldots + م^{ن-١})جـ$$

إذا كانت م > ١ فإنه عندما ن ← ∞ فإن م^{ن} ← ٠ وبالتالي فإن المتتابعة ستكون متقاربة إلى (١ + م + م^{٢} +... + م$^{ن-١}$) جـ.

ربما يكون هذا الموضوع فوق نطاق معرفة الطلاب وأن المتسلسلة الموجودة بين الأقواس هي متسلسلة هندسية بنسبة قيمتها م.

على المعلم أن يقرر مدى ملائمة هذا الموضوع للطلاب ومناقشة هذه المتسلسلة (لقيم مختلفة للعدد م) واعطاء برهان لبيان أن مجموع المتسلسلة هو $\frac{١}{١ - م}$.

فرص التقويم

- هل للطلاب المقدرة على البحث بأنفسهم واختيار الأدوات والطرق المناسبة للحل؟
- هل طوّر الطلاب مقدرتهم على الإستنتاج الجبري والهندسي وعملوا على تطوير مهاراتهم في استخدام الحُجة والبرهان؟

مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع
King Abdulaziz & his Companions Foundation for Giftedness & Creativity
موهبة

الوحدة الثالثة

الدوال الخطية والعلاقات

نظرة عامة

في هذه الوحدة، سوف يقوم الطلاب بالبحث في أوجه التشابه و الاختلاف بين العلاقات الخطية والممثلة في معادلات خطية والتمثيل البياني لتلك الدوال وربط تلك العلاقات مع العالم الحقيقي.
وسوف يقدر الطلاب الهدف من استخدام الرياضيات في إنشاء نماذج لحالات من واقع الحياة.

الأهداف التعلمية للوحدة

- تطبيق المعرفة السابقة للمعادلات الخطية لإيجاد وتفسير مستقيم يحتوي بشكل أفضل على البيانات الممثلة بشكل انتشار.
- استخدام وتقييم الإستنتاجات حول العلاقة بين المتغيرات الزوجية المعتمدة على بيانات النموذج باستخدام علاقات خطية.
- مقارنة العلاقات الرياضية الخطية بين المتغيرات مع العلاقة بين المتغيرات من واقع الحياة.

المعرفة المسبقة

معرفة طرق حساب الميل وكذلك تقاطع الدوال الخطية مع المحور الصادي.

خصائص الأداء المتقدم

القيم و الإتجاهات و السمات

- تقبل حالة عدم اليقين (النشاط الثاني).
- الانفتاح على البدائل (النشاط الأول).

المهارات المتقدمة

- التفكير المنطقي والاستدلال (النشاط الأول)
- الربط بين الرياضيات وسياق الحياة الاعتيادية وتطبيقاتها (النشاط الثالث).
- القدرات فوق المعرفية (جميع الأنشطة).

المعرفة والفهم المتقدمان

- الفهم المتعمق للبنية الرياضية الأساسية (الأنشطة الأول، والثاني، والثالث).

الخطة الزمنية

ست ساعات تقريباً

المصادر

كل مجموعة ثنائية من الطلاب بحاجة لكل مما يلي:

- ورقة عمل المصادر رقم (١).
- مجموعة واحدة من البطاقات لتقطيعها والموجودة في ورقة عمل المصادر رقم (٢).
- الأدوات التالية للتجارب في السؤال الأول من النشاط الثالث:
- مجموعة من القطع النقدية المعدنية أو الكرات الزجاجية.
- طريقة لتعليق الشريط المطاطي.
- وعاء لحمل القطع النقدية .
- طريقة لقياس مقدار الاستطالة في الشريط المطاطي.
- مجموعة واحدة من البطاقات والموجودة في ورقة عمل المصادررقم (٣).
- مقص لتقطيع البطاقات.

حول هذا النشاط

يدعو هذا النشاط الطلاب لدراسة ما إذا كان التمثيل البياني لأزواج البيانات يقع تقريباً حول مستقيم. وهذا يطرح موضوع مقياس الرسم والعلاقات الخطية وغير الخطية.

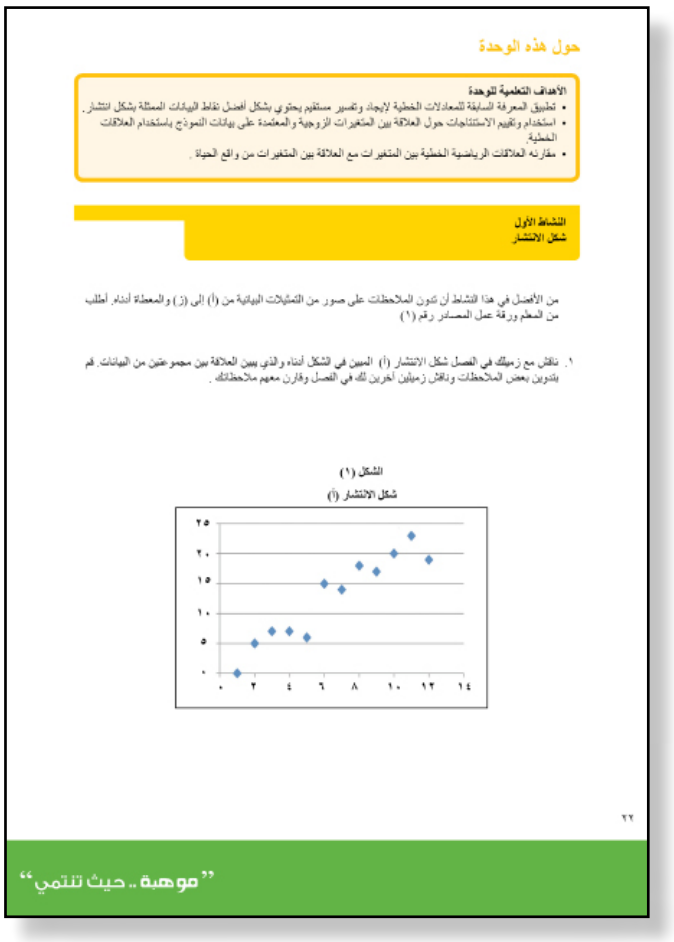
إن استخدام الحوار المفتوح مع الطلاب مهم جداً لخلق قاعدة للفعاليات القادمة. وسوف يؤسس لمبدأ أن الطلاب يتعاملون مع الحالات غير المؤكدة وكذلك استخدام الرياضيات لفهم أفضل لواقع الحياة.

خصائص الأداء المتقدم

- التفكير المنطقي واكتساب الفهم المتعمق للبنية الرياضية الأساسية للدوال الخطية.
- الانفتاح على حلول بديلة وتفسيرها.

توصيات أسلوب التدريس

يفضل العمل على جميع الأسئلة في مجموعات ثنائية من الطلاب ومن ثم يتم جمعهم في مجموعات من أربع طلاب وهذا سيدعم المناقشة والمقارنة مع إعطاء الفرصة كذلك لتصحيح الأفكار الناشئة عن ذلك، وسوف يستفيد الجميع من خلال تبادل الأفكار.



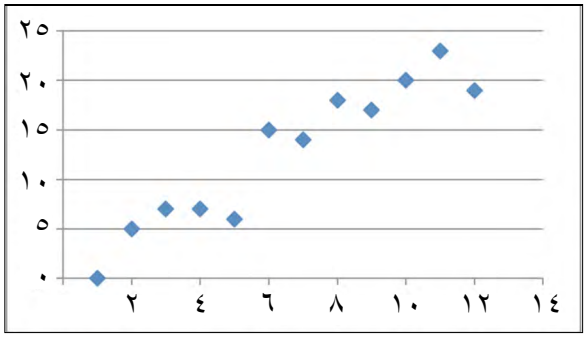
مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع
King Abdulaziz & his Companions Foundation for Giftedness & Creativity
موهبة

إجابات الأسئلة

السؤال الأول

الشكل ١

شكل الإنتشار أ



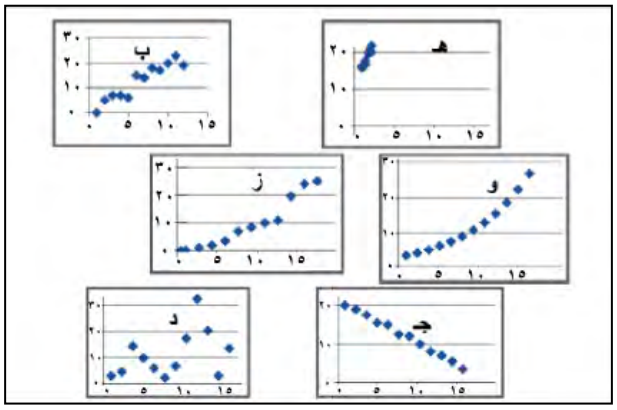
تحتاج كل مجموعة ثنائية من الطلاب إلى ورقة عمل المصادر رقم (١).
قم بعرض شكل الإنتشار على السبورة، واطلب من الطلاب النظر إلى النسخة المشابهة والموجودة في كتبهم. شجّع الطلاب على تدوين بعض الملاحظات عن العلاقات المحتملة. يُفضل بداية مقارنة حل كل مجموعة من الطلاب مع مجموعة أخرى ومن ثم اجراء مناقشة مفتوحة مع الجميع.
يمكنك استخلاص بعض الأسئلة الإضافية التالية:

- ما مدى دقة تلك العلاقات؟
- هل لدينا بيانات أو قراءات كافية؟
- هل العلاقة بين المتغيرات هي خطية على وجه التقريب؟
- هل من الممكن أن تؤدي إضافة بيانات إلى اضعاف أو تقوية تلك العلاقة؟ حاول إضافة بيانات أخرى واطلب ملاحظات الطلاب على ذلك.
- نحن نعرف فقط طبيعة العلاقة لمدى معين من البيانات. هل ستتغير هذه العلاقة إذا أخذنا قراءات أبعد من هذه القيم؟

قم بسؤال الطلاب السؤال التالي:
«في أي من المناهج الدراسية تعاملتم مع علاقات تحتمل وجود خطأ تقريبي أو حلول تقريبية؟»
هذا السؤال سوف يخلق جو من النقاش سينعكس على تفكير الطلاب ومدى فهمهم للوحدة.
من المحتمل أن يقترح الطلاب العلوم والجغرافيا على الأقل للإجابة على هذا السؤال. خذ أمثلة من الطلاب ما أمكنك ذلك.

السؤال الثاني

الشكل ٢



من خلال العمل في مجموعات ثنائية من الطلاب، اطلب من الطلاب دراسة شكل الإنتشار في شكل ١(شكل الإنتشار أ) مع أشكال الإنتشار الأخرى في شكل ٢.
سوف يتم سؤال الطلاب لإعطاء ملاحظاتهم حول ما إذا كان هناك دليل على وجود علاقة بين مجموعتي البيانات في كل حالة. وإذا كان هناك علاقة واضحة فعليهم توضيح مدى قوة تلك العلاقة باستخدام الأوصاف المقترحة.
الحلول لتلك العلاقات معطاة في الجدول التالي:

شكل الإنتشار	الملاحظات المحتملة
أ	خطية قوية إلى حد ما، الميل تصاعدية بقيمة إيجابية
ب	خطية نوعا ما
ج	خطية قوية إلى حد ما، الميل تنازلي بقيمة سلبية
د	لا يوجد نمط واضح، لا توجد علاقة واضحة
هـ	المقياس صغير جداً لتحديد نوع العلاقة، ربما يكون هناك علاقة إذا مدد الرسم بشكل أكبر
و	علاقة قوية غير خطية ، يمكن اقتراح العلاقة الأسية من خلال المعرفة في العلوم
ز	خطية نوعا ما أو علاقة على شكل منحنى

"موهبة .. حيث تنتمي"

السؤال الثالث

هذا السؤال يتضمن العمل بشكل أكبر على أشكال الإنتشار من (أ) إلى (ز) والتي تم تصنيفها على أنها تحتوي على نوع من العلاقات الخطية.

يبدأ الطلاب في العمل على هذه الأشكال في مجموعات ثنائية ويقومون بإيجاد أفضل مستقيم يلائم تلك البيانات. ومن ثم يعملون في مجموعات من أربع طلاب لمقارنة ومناقشة طريقتهم في إيجاد المستقيم وكذلك إيجاد معادلته.

يمكن للمعلم أن يقوم بتوجيه مجموعة ثنائية من الطلاب للإنضمام إلى مجموعة أخرى لديها حلول متناقضة لمحاولة تبرير وتوضيح الحل ومن ثم صقل الإجابة.

السؤال الرابع

يحتاج الطلاب في هذا السؤال إلى نُسخ إضافية من شكل الإنتشار (أ) للعمل عليها يدوياً و إيجاد أفضل مستقيم يمر بالبيانات. على الطلاب استخدام شكل الإنتشار (أ) ومعادلة المستقيم للتفكير فيما سيحدث للمستقيم عند إضافة بيانات جديدة إلى شكل الإنتشار. سوف يقوم الطلاب بإضافة نقاط جديدة بثلاث طرق مختلفة و هي كالتالي:

- التصور الأول: النقاط الجديدة سوف تغير ميل المستقيم المطلوب ولكن لا تغير نقطة التقاطع مع المحور الصادي.
- التصور الثاني: سوف تغير النقاط الجديدة نقطة التقاطع مع المحور الصادي ولكن تبقي على ميل المستقيم كما هو.
- التصور الثالث: النقاط الجديدة لا تقع على المستقيم و لا تغير معادلة المستقيم المطلوب.

إن إنجاز هذا السؤال باستخدام برنامج إكسل لا يعني إلغاء الحاجة إلى شرح أسباب تأثير (أو عدم تأثير) هذه النقاط على معادلة المستقيم.

حُث الطلاب على العمل بشكل منظم.

فرص التقويم

سوف تعطي هذه الأسئلة الفرصة للطلاب لإستكشاف كيفية استخدام أشكال الإنتشار في إيجاد العلاقات بين متغيرين.

- هل لدى الطلاب القدرة على تطوير ومقارنة أوصاف للعلاقات الخطية المبنية على أشكال الإنتشار؟
- هل لدى الطلاب القدرة على التعمق في البيئة الأساسية لتقريب العلاقات الخطية عن طريق إعتبار تأثير إضافة بيانات جديدة للرسم؟

حول هذا النشاط

لقد صمم هذا النشاط لمساعدة الطلاب على التمييز بين التمثيل البياني لمستقيم دقيق والمبني على حالة مبسطة وبين التمثيل المبني على حالة معقدة ومن الممكن تبسيطها و كذلك بين الرسم المبني على علاقة ما لا يمكن فهمها.
في هذا النشاط يجب على الطلاب أن يستوعبوا أن الترابط في واقع الحياة الحقيقي وبين المتغيرات هو عملية معقدة.

خصائص الأداء المتقدم

- القدرة على تقبل الغموض وكذلك العمل على العلاقات الغير مؤكدة.
- القدرة على النظر بعمق في طبيعة أنواع مختلفة من العلاقات الخطية في الرياضيات والعلوم.

توصيات أسلوب الدرس

من الأفضل العمل على السؤال الأول ضمن مجموعات ثنائية ومن ثم يتم جمع الطلاب في مجموعات مكونة من أربع طلاب. إن المناقشة والمقارنة في الحلول له أهمية كبيرة وتعتبر من العناصر المهمة في هذا النشاط.
الحلول المقترحة سوف تعطى أدناه ولكن يجب الأخذ في الإعتبار أنه من الممكن إيجاد حلول أخرى ويتم تبريرها.
يمكن كذلك العمل على السؤال الثاني ضمن مجموعات ثنائية أو مجموعات صغيرة. إن استخدام أسلوب الحوار واللغة الدقيقة في هذا السؤال يعتبر عنصراً أساسياً.
كمقدمة للسؤالين قم بتذكير الطلاب بأشكال الإنتشار التي أستخدمت في النشاط الأول. قم بالإيضاح للطلاب أن شكل الإنتشار هو تمثيل لمجموعة نقاط من الأزواج المرتبة والتي قد تشير إلى وجود علاقة بين المتغيرات. فعلى سبيل المثال العلاقة بين العمر وعدد الأسنان.
قم بإثارة النقاش حول استخدام شكل الإنتشار ودلالته في إيجاد نماذج من واقع الحياة.إسأل الطلاب السؤال التالي:
« لماذا تعتقدون أنه من المفيد تمثيل البيانات بهذا الشكل؟»
من الممكن أن تشمل الإجابات كل مما يلي:

- لأنها تساعدنا على تصور علاقات محتملة بين مجموعتين من البيانات.
- لأنها تساعدنا على إيجاد النقاط التي لا تتماشى مع النمط
- (قيم شاذة أو متطرفة).
- لأن أفضل مستقيم يمر بمعظم هذه النقاط سوف يعطينا أفضل تقدير لتلك العلاقة.
- لأنه يمكننا استخدام المستقيم للحصول على تنبؤات يمكن اختبارها.
- لأن هذه المعلومات يمكن أن تعطينا العديد من الفرضيات.

إجابات الأسئلة

السؤال الأول

يحتاج الطلاب في هذا السؤال إلى تقطيع البطاقات والموجودة في ورقة عمل المصادر رقم (٢).

يمكن اقتراح وضع هذه البطاقات كأزواج من المتغيرات بحيث أن المجموعة الأولى تمثل المتغيرات المستقلة والمجموعة الثانية تمثل المتغيرات التابعة. الحلول معطاة في الجدول أدناه:
يتم إعطاء الطلاب التعاريف المبسطة التالية لمساعدتهم على تحديد السياق ومن ثم الربط بين أزواج البطاقات.

- المتغير المستقل هو الذي يكون جواباً للسؤال «ماذا ينبغي علي تغييره؟»
- المتغير التابع هو الذي يكون جواباً للسؤال «ماذا ينبغي علي ملاحظته؟»

يمكن إعطاء مثال على ذلك. فعلى سبيل المثال يمكنك إعتبار السياق هو المصعد والمتغير الذي يتغير هنا هو عدد الأشخاص داخل المصعد والمتغير الذي ستسجله هو مجموع أوزانهم.
أعط الفرصة للطلاب للعمل على هذا السؤال بدون مقاطعة أو تدخل.
إن عملية المقارنة في هذا السؤال سوف تساعدهم على التمييز بين المتغيرات المستقلة والتابعة. وكذلك فإن من المحتمل أن يجد الطلاب أكثر من طريقة للإقتران بين هذه المتغيرات كأزواج.
على الطلاب أن يقوموا بمقارنة إجابتهم مع الآخرين وشرح وجهة نظرهم وأسباب الإختيار. قم كذلك بتشجيعهم على الدخول في نقاشات قوية حول أوجة الإختلاف بينهم. الحلول المحتملة لهذا السؤال هي:

المتغير المستقل	المتغير التابع
عدد الأشخاص داخل المصعد	مجموع أوزان الأشخاص
درجة الحرارة	نمو الشتلات
الزمن بالأشهر	أطوال الأطفال
عدد الأميال	استهلاك الوقود
عدد أجهزة التلفاز	فترة الحياة
الزمن بالساعات	تكاثر الفيروسات
الزمن بالسنوات	تناقص المواد المشعّه
الضغط	سرعة الرياح
كمية الأسمدة المعطاة للمحصول خلال نموه	غلّة المحاصيل المنتجة

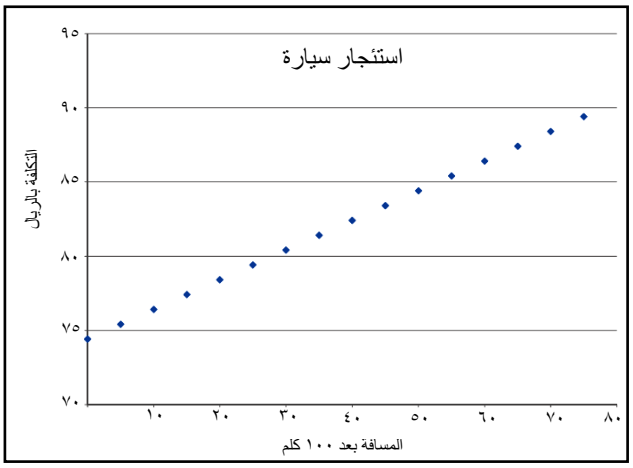
السؤال الثاني

هذا السؤال مبني على ما تم انجازه في السؤال السابق من خلال تشجيع الطلاب على التفكير في أنواع العلاقات الموجودة في العالم الحقيقي.
إن الشرح الموجود مع التمثيل البياني لكل حالة سوف يساعد الطلاب على إستكشاف أسباب عدم دقة العلاقات في العالم الحقيقي.
قم بحث الطلاب على التفكير في الأخطاء التجريبية ومدى تعقيد الفرضيات التي يتم طرحها وأثرها على دقة النموذج.يجب تشجيع الطلاب على الحوار فيما بينهم لتوضيح عدم الفهم لديهم ومن ثم الخروج كمجموعة بملاحظات حول العلاقات الموجودة و السياق الذي وصفت فيه. يتوجب على المعلم حث الطلاب على استخدام التعابير التالية في وصفهم، قدر الإمكان.

- العلاقة خطية تماماً
- العلاقة ليست خطية تماماً
- أخطاء تجريبية
- افتراضات محدودة
- افتراضات معقدة

استئجار سيارة

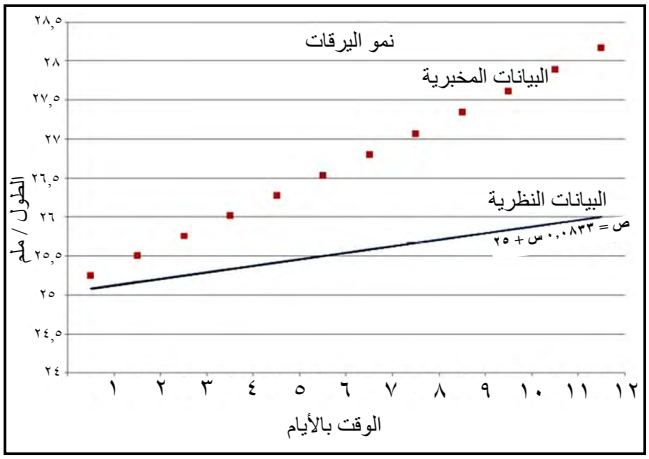
الشكل ٣



مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع
King Abdulaziz & his Companions Foundation for Giftedness & Creativity
موهبة

نمو اليرقات

الشكل ٤

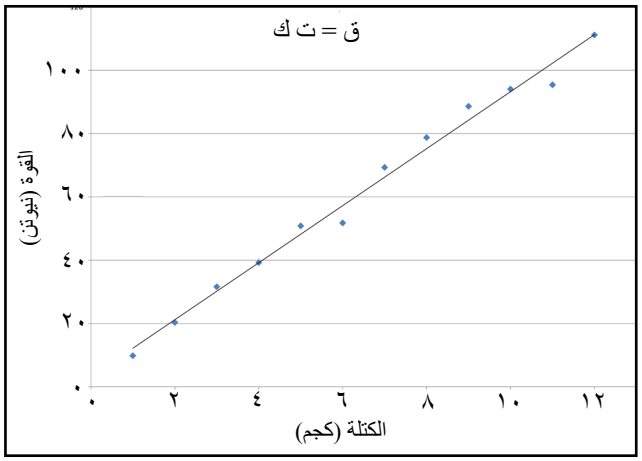


تنمو وتتكاثر المخلوقات الحية بشكل عام بالاعتماد على كل من البيئة والجينات الوراثية .
ومع ذلك وتحت المراقبة المخبرية يمكن للمرء أن يلاحظ في كثير من الأحيان وجود علاقة خطية قوية إلى حد ما بين الزمن ومقدار النمو. وغالبا ما يشار إلى هذه فترات النمو الثابت باسم "الأجزاء الخطية من منحنى النمو"
يعطينا هذا المثال نموذجاً لمرحلة خطية من نمو يرقة وهو كالتالي : $د(ز) = \frac{١}{١٢}$ ز + ٢٥

حيث ز الزمن بالأيام .
يبين الشكل أعلاه النموذج المخبري بالإضافة إلى النموذج النظري لنمو يرقة ليست تحت المراقبة المخبرية .
يعتبر هذا التطبيق نموذج بسيط وأخذ من بيانات حقيقية موجودة تحت المراقبة المخبرية وممثلة بمستقيم في الشكل٤.
إن استخدام نموذج النمو في بيئة خارجية سوف يشمل العديد من الفرضيات المعقدة، فعلى سبيل المثال ثبات درجة الحرارة خلال دورة الحياة وهذا غير واقعي في البيئة الخارجية.
ولكن من الممكن المقارنة مع أنماط النمو المستقبلية وذلك لصقل هذا النموذج.
البيانات الجديدة (الموجودة في شكل الإنتشار في الشكل ٤) تشير إلى الإختلاف في ميل المستقيم للبيانات المخبرية والبيانات النظرية ولكن كلا البيانات يقترح أن العلاقة هي خطية قوية نوعاً ما.
ولكن من خلال دورة الحياة الكاملة فإن العلاقة في الحقيقة تتبع نمط نمو أسّي بدون عوامل محدودة.
ولإستكشاف هذه العلاقة بشكل تام، يجب زيادة الفترة الزمنية المستخدمة لإستخلاص النتائج.

قانون نيوتن الثاني

الشكل ٥



إذا تسارع جسم (زادت سرعته أو غير اتجاهه) ، فإن قوة (ق) ما قد أثرت عليه و ذلك بحسب قانون نيوتن . حيث اعتقد أنه إذا تزايدت الكتلة (ك) للجسم فإن مقدار القوة اللازمة سيزداد كذلك.
لقد افترض نيوتن أن القوة و الكتلة و التسارع مرتبطة ببعضهما البعض و النتائج المخبرية تعطي البرهان على أن العلاقة كانت خطية تماماً.
الرسم البياني أعلاه للبيانات المخبرية يوضح العلاقة بين القوة (ق) والكتلة (ك) يعطينا ميل أفضل مستقيم يمر بالنقاط قيمة التسارع (ت).

يعتبر قانون نيوتن الثاني (ق = ك. ت) من أهم العلاقات التي تناقش في الغرف الصفية. ويجب على الطلاب أن يكونوا ممتنين على أن قياساتهم تقدم لهم عنصراً في حساب الخطأ التجريبي للبيانات الناتجة والتي ترجح ظهورعلاقة خطية غير دقيقة.
ولكن هذه البيانات تؤشر كما هو متوقع لعلاقة خطية إيجابية وقوية.

"موهبة .. حيث تنتمي"

فرص التقويم

يعطي السؤال الأول الطلاب الفرصة لتطبيق فهمهم للفرق بين المتغيرات المستقلة و التابعة. كما يعطي السؤال الثالث الفرصة لاستكشاف التأثيرات المختلفة في النمذجة الرياضية.

- هل للطلاب المقدرة على توضيح أسباب إختياراتهم وكذلك إعطاء تبريرات لذلك ما أمكن؟
- هل للطلاب المقدرة على استخدام لغة رياضية دقيقة لوصف بعض خصائص النماذج الرياضية؟

حول هذا النشاط

في هذا النشاط سوف يقوم الطلاب بتطبيق ما تم تعلمه في الأنشطة السابقة من هذه الوحدة على حالتين حقيقيتين معقدتين وغير معروفتين بالنسبة لهم. يستهدف هذين المثالين مجالين مختلفين من فهم الطلاب للعلاقات الدالية.

يستكشف السؤال الأول أثر الخطأ التجريبي عند استخدام الرياضيات لعمل نماذج من الواقع.

أما السؤال الثاني فيدعو الطلاب للتمعن في مدى التعقيد في المسائل الحياتية وإلى فهم أنه قد يكون هناك أكثر من تفسير واحد لما قد يبدو أنه علاقة واضحة بين متغيرين.

النشاط الثالث
بناء نموذج رياضي

يحوي هذا النشاط سؤالين يُلقيان الضوء على علاقة أكثر تفصيلاً بين النموذج الرياضي و العالم الحقيقي.

١. سوف تستكشف الآن إجابة السؤال الآتي:

هل العلاقة بين تمدد الشريط المطاطي وعدد القطع النقدية المعدنية التي علقت عليه خطية ؟

سوف تقوم بعمل تجربة ومن ثم ستقوم بتجميع البيانات اللازمة وتمثيلها بيانياً وبعد ذلك سوف تصدر حكمك على نوع العلاقة.

لإجراء التجربة سوف نحتاج إلى ما يلي:
- مجموعة من القطع النقدية المعدنية أو عدد من الكرات الزجاجية
- مجموعة من شرائط مطاطية
- طريقة لتعليق الشريط
- وعاء لحمل القطع النقدية
- طريقة ما لقياس مقدار استطالة المطاط

نظّم بياناتك في جدول، ثم قم بتمثيلها بيانياً واكتب ملخصاً لنتائجك التي حصلت عليها.

٢. نحتاج في هذا السؤال كلا مما يلي:
- مجموعة واحدة من البطاقات والموجودة في ورقة عمل المصادر رقم (٣).
- مقص لتقطيع البطاقات

٢٩

مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع

خصائص الأداء المتقدم

- ربط المهارات بمسائل من واقع الحياة.
- التحقق من النتائج عن طريق الربط بين الأشكال المختلفة للعلاقات الخطية.

توصيات أسلوب التدريس

يحتوي السؤال الأول على عناصر المناقشة الجماعية والتطبيق حتى يتم إعداد التجربة بحيث يتيح الفرصة للطلاب للمشاركة في مجموعات ثنائية.

يجب العمل على هذه التجربة من خلال مجموعات صغيرة مع وجود الفرصة لتقييم كل طالب لزميله والمشاركة كمجموعة واحدة خلال الجلسة.

يفضل العمل على السؤال الثاني من خلال مجموعات مكونة من طالبين أو ثلاثة ويتم متابعتهم عن طريق أخذ استنتاجاتهم وعرضها بين المجموعات.

إن وجود النقاش وإمكانية الإعتماد على وجود متغير ثالث (مخفي) سوف يزيد من مقدار الفائدة المرجوة من هذه الوحدة.

إجابات الأسئلة

السؤال الأول

سوف تساعد هذه التجربة الطلاب على تقدير أثر وجود الخطأ التجريبي في النمذجة الرياضية للمسائل الحياتية.

يحتاج الطالب لإجراء هذه التجربة على نحو مفصل ما يلي:

- مجموعة من القطع النقدية أو عدد من الكرات الزجاجية
- مجموعة من شرائط مطاطية
- طريقة لتعليق الشريط
- وعاء لحمل القطع النقدية
- طريقة ما لقياس مقدار استطالة الشريط المطاطي

لتشجيع الطلبة على الإختيار، يمكن تقديم عدة أدوات، مع توفير عدد كاف منها، للطلبة بحيث يمكنهم الأختيار منها بأنفسهم.

لا تقم بتوجيه الطلاب لآداء الواجب مباشرة ولكن اطلب منهم الإجابة على السؤال التالي:«هل العلاقة بين تمدد شريط المطاط وعدد القطع المعدنية، تمثل علاقة خطية؟»

اطلب منهم أن يقوموا بتسجيل نتائجهم بدقة وكذلك تسجيل القرارات التي سيتخذونها في كل مرحلة من مراحل التجربة.

يجب على الطلاب تقديم تقرير موجز يوضح الإثباتات القوية و المبنية على النتائج التي توصلوا إليها. ومن الممكن عرض هذه التقارير على المجموعات الأخرى أو في جلسة عامة مشتركة للجميع.

المعلومات التالية تخص المعلم:

تم تسمية قانون هوك نسبة إلى العالم الفيزيائي البريطاني روبرت هوك وذلك في القرن السابع عشر.

طرح هوك هذا القانون لأول مرة عام ١٦٦٠م ، ومن ثم تم نشر الحل في عام ١٦٧٨م باللغة اللاتينية تحت عنوان «كما التمدد، كذلك القوة».

في علم الميكانيكا والفيزياء، فإن قانون هوك للمرونة ينص على أن مقدار الإستطالة في طول النابض (الزنبرك) يتناسب طردياً مع مقدار الثقل المعلق فيه.

تتبع كثير من المواد هذا القانون طالما أن مقدار الثقل لا يتجاوز حد المرونة لتلك المادة.

تسمى المواد التي يمكن أن تتبع على وجه التقريب قانون هوك، بمواد ذات مرونة خطية أو مواد هوك.

بطريقة مبسطة فإن قانون هوك يقول إن مقدار الإستطالة يتناسب طردياً مع الإجهاد الحاصل. ويمكن صياغة قانون هوك رياضياً على الشكل ق = - أ . ت حيث ت تمثل مقدار الإستطالة الحاصلة للنابض، وتمثل ق مقدار قوة المقاومة (قوة الإستعادة) و أ يمثل مقدار ثابت يسمى بثابت النابض وهو عبارة عن القوة اللازمة لإحداث تغير في الطول بمقدار وحدة.

عندما يتحقق هذا القانون، نقول عندئذ أن العلاقة خطية. الإشارة السالبة في الجزء اليسار من المساواه لأن قوة المقاومة (ق) تؤثر في الإتجاه المعاكس للإستطالة

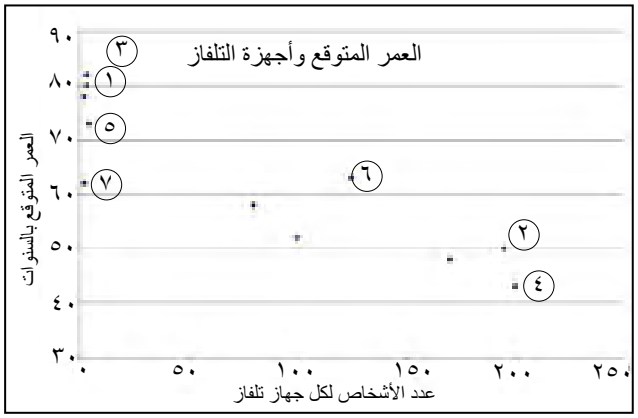
(فعلى سبيل المثال عند شد النابض إلى اليسار فإنه يحاول الرجوع إلى اليمين).

لاحظ أنه قد تم استخدام شريط مطاطي وليس نابض في التجربة التي قام بها الطلاب وبالتالي فإن النتائج لن تكون كما يقترح قانون هوك تماماً.

السؤال الثاني

لقد ذكرنا في النشاط الثاني أنه يمكن لمتغيرين أن يبدوان كما لو أنهما مرتبطان ببعضهما بدون وجود علاقة دالية بينهما. وفي الغالب فإن تفسير ذلك يكون بوجود متغير ثالث مرتبط بهذين المتغيرين ولم يتم قياسه.

الشكل ٦



يستخدم هذا السؤال صورة معدة مسبقاً تمثل شكل انتشار. اطلب إلى الطلاب أن يقوموا بعمل ربط وصفي للبيانات الموجودة على الرسم.

الشكل أعلاه يمثل المواقع المحتملة للبطاقات.

يحث هذا النوع من الأسئلة (ويسمى الرسم البياني الحي) الطلاب على التفكير بعمق في خصائص النقاط أو أجزاء من التمثيل البياني.

سوف يؤدي هذا السؤال إلى أن يقوم الطلاب بكتابة تفسيراتهم الخاصة بهم من خلال النظر إلى مدى تأثير المتغيرات الأخرى المحتملة وعلى وجه الخصوص الثروة والناتج القومي الإجمالي.

قد يحتاج الطلاب إلى ملاحظة أن الناتج القومي الإجمالي يشير إلى قيمة السوق لجميع السلع و الخدمات المنتجة محلياً في خلال فترة معينة. ويعتبر الناتج القومي المحلي مؤشراً على مستوى المعيشة لبلد ما.

من الممكن أن تثير بعض العبارات مثل: ("تطور هذا البلد حديثاً، والعمر المتوقع لسكان هذا البلد طويل") نقاشاً حول معنى أن تكون البلد متطورة.

مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع
King Abdulaziz & his Companions Foundation for Giftedness & Creativity
موهبة

هناك بعض البطاقات التعبيرية تشجع على المناقشة أيضاً مثل:

"هذا بلد غني وفي المتوسط يملك كل فرد في المجتمع جهاز تلفاز، وعلى الرغم من ذلك فإن العمر المتوقع لسكان هذا البلد في تناقص وهذا قد يكون بسبب ارتفاع نسبة الدهون والسكر في النظام الغذائي للسكان".

"هذا البلد فقير نوعاً ما مقارنة بالمقياس الغربي ومع ذلك فإن السكان في هذا البلد يتمتعون بحياة صحية جيدة من حيث ممارسة التمارين الرياضية واتباع للحمية الغذائية".

كجزء من هذا السؤال على الطلاب أن يقوموا بتكوين جملة أو جملتين لوصف ما يعتقدون أنه يحدث في هذا المثال.

ينبغي أن يتضمن هذا الملخص معرفتهم بإحتمال وجود متغير إضافي غير واضح في البيانات ومن الممكن توسيع هذا الملخص بحيث يشمل وجود فرضيات معقولة تصف ما قد يحصل في الواقع في هذا المثال.

لذا توقع من الطلاب يقولوا بأن هناك إرتباط بين العمر المتوقع للفرد وأجهزة التلفاز وبين الناتج القومي الإجمالي أو الثروة.

يمكن إنشاء مناقشات جماعية للحديث عن التحديات في محاولة تحديد العلاقات المسببة عند تحليل البيانات الحيوية.

يجب على الطلاب أن يكونوا مقدرين إلى أن شكل الإنتشار قد يشير إلى علاقة بين متغيرات ولكن لا يشير ولا يثبت بالضرورة وجود علاقة سببية.

وهذا يعني أنه عند فحص شكل الإنتشار فإن بعض الحالات يمكن دراستها من خلال دوال خطية وهذا يعطي الطلاب الفرصة لكي يقوموا بما يلي:

- تقليل فرصة وجود علاقات سببية.
- إعطاء إثبات يدعم فرضية العلاقات السببية.

فرص التقويم

سوف تعطي الأسئلة الموجودة في هذا النشاط الطلاب الفرصة ليظهروا مدى فهمهم لقدرة الرياضيات على بناء نماذج رياضية لمسائل واقعية.

ويجب عليهم ان يظهروا مدى قوة الدوال الجبرية الخطية في دعم تحليلاتهم وكذلك مدى التحدي في تحديد العلاقات السببية في البيانات المأخوذة من واقع الحياة مع الأخذ في الإعتبار تأثير الخطأ النسبي على البيانات التجريبية.

- هل الطلاب قادرين على تطبيق ما تعلموه على حالات جديدة وغير مألوفة لهم؟
- هل للطلاب القدرة على تفسير البيانات المخبرية واقتراح وجود علاقة محتملة؟
- هل يستطيع الطلاب تبرير اقتراحاتهم باستخدام علاقات خطية عن طريق مقارنة مدى تعقيد المسائل الحياتية مقارنة بالنمذجة الرياضية المبسطة؟

الوحدة الرابعة
المتباينات الخطية

مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع
King Abdulaziz & his Companions Foundation for Giftedness & Creativity
موهبة

نظرة عامة

يطور الطلاب في هذه الوحدة مهاراتهم في الإنتقال بين التمثيلات المختلفة للعلاقات والتي تشمل متباينات. يقوم الطلاب بإنشاء تمثيلات بيانية دقيقة للمتباينات ومن ثم تطبيقها في مسائل تحوي خصائص بعض الأشكال. في النشاط الأخير يعمل الطلاب على مسائل تشمل برمجة خطية وكذلك إيجاد الحل الأمثل لها.

الأهداف التعلمية للوحدة

- إنشاء ووصف تمثيلات بيانية دقيقة للمتباينات الخطية.
- تطبيق معرفة المعادلات الخطية وخصائص الأشكال على مسائل التمثيلات البيانية.
- حل مسائل تحوي متباينات خطية بما في ذلك إيجاد الحل الأمثل لتلك المسائل.

المعرفة السابقة

يحتاج الطلاب إلى المعرفة الوافية بالتمثيل البياني للدوال الخطية وكذلك الخبرة في التعامل مع المتباينات الخطية وإثبات البراهين بالإضافة إلى نظرية فيثاغورس.

خصائص الأداء المتقدم

المهارات المتقدمة

- التفكير المنطقي والاستدلال (النشاطان الثاني، والثالث)
- إقامة الصلات بين مختلف مجالات الرياضيات (النشاط الثالث)
- الطلاقة والدقة (النشاط الأول)

المعرفة والفهم المتقدمان

- إنشاء الروابط (النشاط الثاني)
- الفهم المتعمق للبنية الرياضية الأساسية (النشاطان الأول، والثاني)

الخطة الزمنية

من خمس إلى ست ساعات تقريباً

المصادر

- البرنامج الحاسوبي ICT (برنامج رسم بياني).
- ورقة عمل المصادر رقم (١).
- ورقة عمل المصادر رقم (٢).

حول هذا النشاط

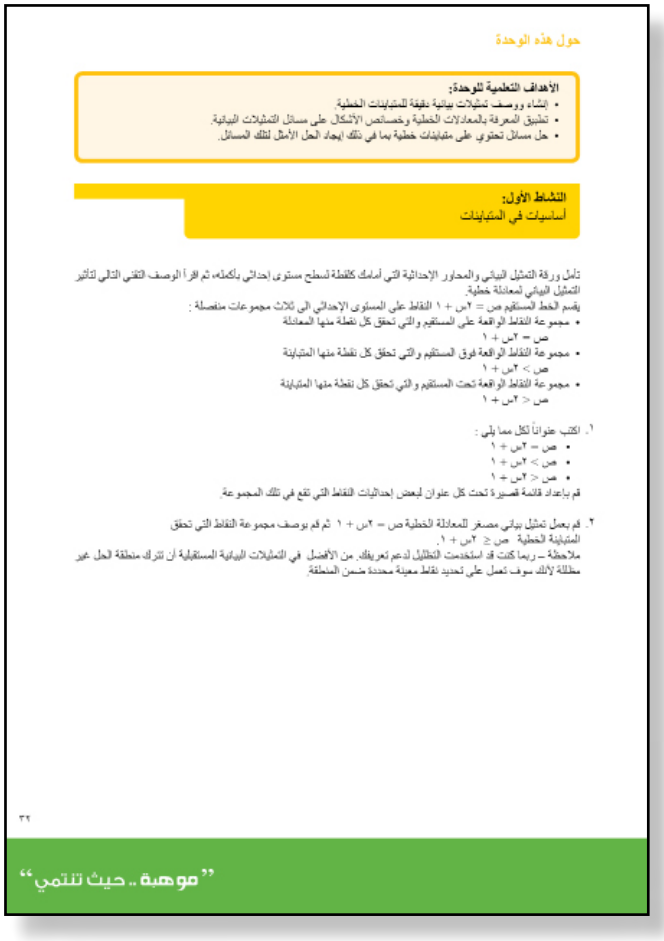
في هذا النشاط يتم دراسة المتباينات جبرياً لمجموعة من النقاط الإحداثية وكمنطقة موجودة في المستوى الإحداثي. سوف يعطي هذا النشاط الفرصة للطلاب للتنقل بين هذه التمثيلات المختلفة للمتباينات.

خصائص الأداء المتقدم

- الدراسة بتعمق في أسس تعريف الدوال الخطية لنقاط في مستوى ذو بعدين.
- تطوير مهارة التنقل بجدارة بين التمثيلات الجبرية والتمثيل البياني للمتباينات.

توصيات أسلوب التدريس

الأسئلة الموجودة في هذا النشاط تلائم العمل من خلال مجموعات صغيرة متبوعة بمناقشات بين المجموعات للكشف عن الأفكار الخاطئة.
يجب تشجيع الطلاب ليقوموا بإنشاء بطاقات إضافية بكل إبداع ودقة لهذه المهام.



حول هذه الوحدة

الأهداف التعليمية للوحدة:
- إنشاء ووصف تمثيلات بيانية دقيقة للمتباينات الخطية.
- تطبيق المعرفة بالمعادلات الخطية وخصائص الأشكال على مسائل التمثيلات البيانية.
- حل مسائل تحتوي على متباينات خطية بما في ذلك إيجاد الحل الأمثل لتلك المسائل.

النشاط الأول:
أساسيات في المتباينات

تأمل ورقة التمثيل البياني والمحاور الإحداثية التي أمامك كلقطة لسطح مستوى إحداثي بأكمله، ثم اقرأ الوصف التقني التالي لتأثير التمثيل البياني لمعادلة خطية.

يقسم الخط المستقيم ص = ٢س + ١ النقاط على المستوى الإحداثي إلى ثلاث مجموعات منفصلة :
- مجموعة النقاط الواقعة على المستقيم والتي تحقق كل نقطة منها المعادلة
  ص = ٢س + ١
- مجموعة النقاط الواقعة فوق المستقيم والتي تحقق كل نقطة منها المتباينة
  ص > ٢س + ١
- مجموعة النقاط الواقعة تحت المستقيم والتي تحقق كل نقطة منها المتباينة
  ص < ٢س + ١

١. اكتب عنواناً لكل مما يلي :
- ص = ٢س + ١
- ص > ٢س + ١
- ص ≤ ٢س + ١

قم بإعداد قائمة قصيرة تحت كل عنوان لبعض إحداثيات النقاط التي تقع في تلك المجموعة.

٢. قم بعمل تمثيل بياني مصغر للمعادلة الخطية ص = ٢س + ١ ثم قم بوصف مجموعة النقاط التي تحقق المتباينة الخطية ص ≥ ٢س + ١.

ملاحظة – ربما كنت قد استخدمت التظليل لدعم تعريفك. من الأفضل في التمثيلات البيانية المستقبلية أن تترك منطقة الحل غير مظللة لأنك سوف تعمل على تحديد نقاط معينة محددة ضمن المنطقة.

٣٢

"موهبة .. حيث تنتمي"

مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع
King Abdulaziz & his Companions Foundation for Giftedness & Creativity
موهبة

إجابات الأسئلة

السؤال الأول

إبحث عن الإحداثيات الدقيقة لتمثيل كل من:

ص = ٢س+١ ، ص > ٢س+١ ، ص < ٢س+١.

قم بكتابة أسئله حول نقاط معينة على المستوى الإحداثي مثل التي تشمل إحداثيات سالبة وأعداد غير صحيحة وكبيرة جداً وكذلك إحداثيات صغيرة جداً.

السؤال الثاني

قم بفحص المنطقة الموصوفة وتأكد من ترك المنطقة التي تحقق المتباينة **غير مظللة** وذلك لتسهيل عملية فحص النقاط المختارة.

السؤال الثالث

على كل مجموعة صغيرة من الطلاب قص البطاقات والموجودة في ورقة عمل المصادر رقم (١).

من المتوقع في هذا النشاط أن يوسع الطلاب مداركهم حول المتباينات الخطية والتمثيل البياني لها عن طريق ربط المتباينات بالتمثيلات البيانية وبمجموعة النقاط الممكنة.

تعتبر هذه إنطلاقة للتفكير في المناطق الممكنة والمستخدمة في البرمجة الخطية وإيجاد الحل الأمثل لها.

تحتوي المجموعة على ثلاث متباينات لن يتم ربطها وكذلك ثلاث تمثيلات بيانية لن يتم ربطها أيضا.

من المفترض أن يقوم الطلاب بإنشاء بطاقات خاصة لهم لإتمام المجموعات وعند الإنتهاء من ذلك يمكن للطلاب تنظيم هذه البطاقات في مجموعات وعرضها.

ويظهر الحل في المجموعة الظاهرة على اليسار (شكل ١).

وتعتبر عملية ترتيب البطاقات أكثر إثراءاً من العمل على تمرين يشمل تمثيل متباينات بيانياً وذلك لأنها تحفز الطلاب على مناقشة الطريقة التي يتم فيها مطابقة البطاقات.

لقد صممت هذه البطاقات لتساعد الطلاب على استكشاف بعض المفاهيم الخاطئة لدى بعضهم.

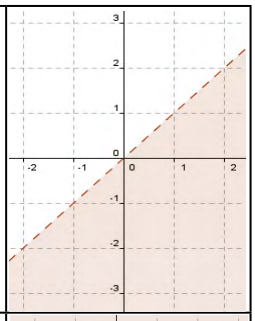
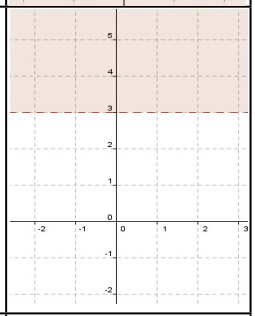
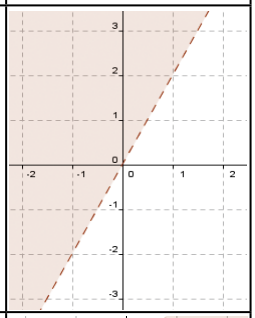
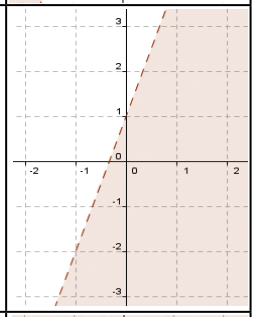
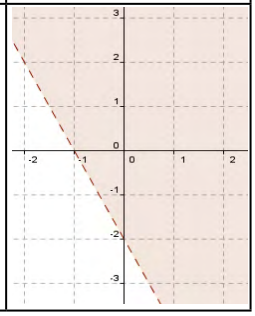
إن المراقبة الدقيقة وطرح الأسئلة المهمة على سبيل المثال، «اذكر أسباب ربط هاتين البطاقتين معاً؟» سوف تمكن المعلم من التأكد من فهم الطلاب للمتباينات.

يتوجب على المعلم اعطاء الوقت الكافي للطلاب كي يقوموا بترتيب وإعادة ترتيب البطاقات حسب الحاجة مع الحرص على عدم التدخل كثيراً.

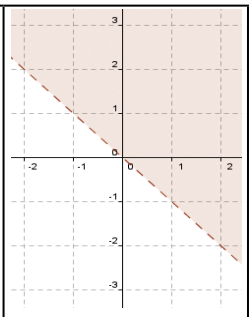
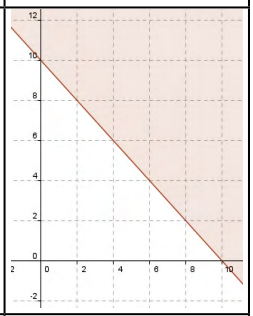
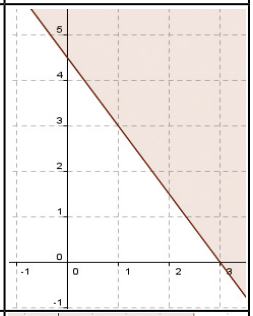
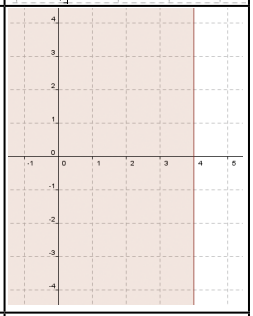
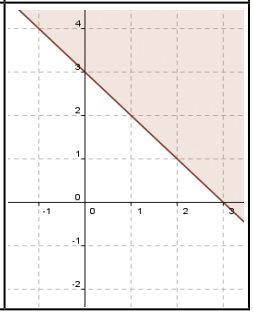
إسأل الطلاب عمّا تعنيه الخطوط المنقطة وكذلك الخطوط المتصلة بالنسبة إلى المتباينات الخطية؟

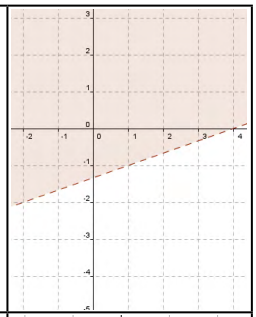
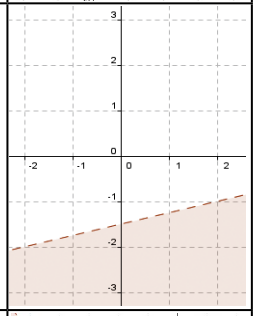
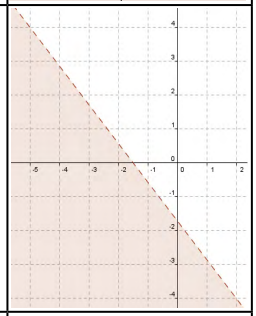
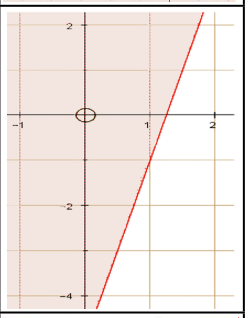
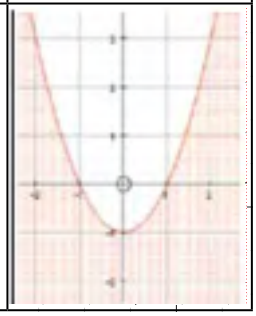
قم بالتأكيد على أن الخطوط المنقطة تعني متباينات لا تشمل حالة المساواه (> أو <) و ذلك من خلال اجراء حوار مع الطلاب.

شكل ١

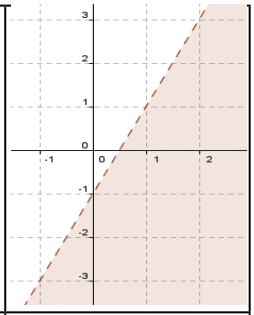
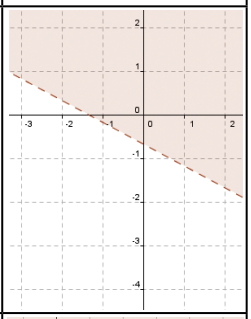
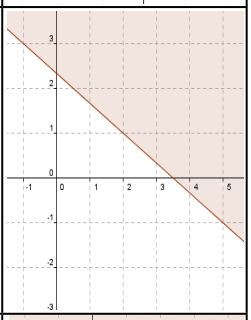
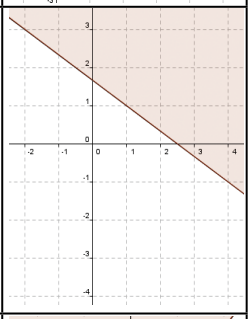
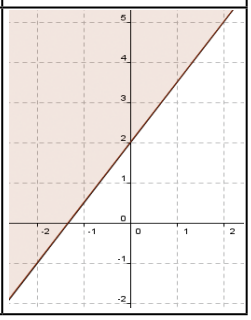
ص < س	(١، ٢) (-٢، ١,٥) (١,٥، ١,٧٥)	
ص > ٣	(٢، -٢٩) (٠، ٢,٩) (-٤، -٤)	
ص > ٢س	(٣، ٤) (-١، -٢) (٢٠، ٣٩)	
ص < ٣س + ١	(-١,٥، -٣) (-٢، -٢) (٠، ٢)	
ص > -٢س - ٢	(٠، -٣) (٢، -١) (-٠,٥، -١,٥)	

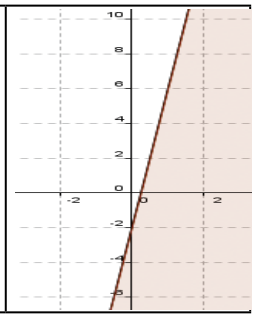
"موهبة .. حيث تنتمي"

	(٢، -٣) (-٢، ١) (-٢، -٢)	ص > - س
	(٩,٥، ٠,٥) (-٣، -٧) (-٢، -١٢)	س + ص ≤ ١٠
	(١، ٣) (-٢، ٢) (٣، ٠)	٣س + ٢ص ≤ ٩
	(-٤، ٤) (٥، ٢) (٤، ١٢)	س ≤ ٤
	(-١، ٤) (-٢، -٢) (١,٥، ١,٥)	س ≤ ٣ - ص

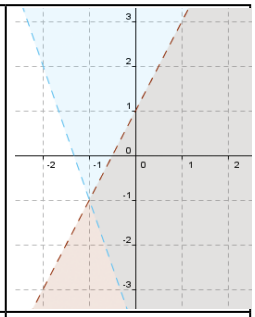
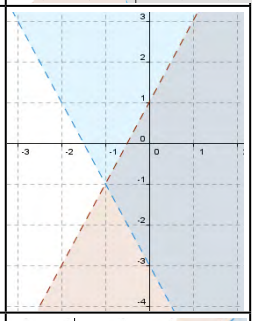
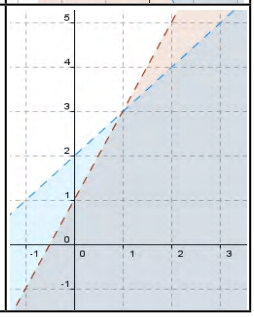
	(-١، ٣) (-٢، -١) (-١، ٤)	س > ٣ص + ٤
	(-١، ١,٥) (-١، ٢-) (-١,٥، ١-)	س > ٦ + ٤ص
	يقوم الطلاب بإنشاء الإحداثيات التي تمثل نقاط في المنطقة غير المظللة	٨س + ٧ص > -١٢
	يقوم الطلاب بإنشاء الإحداثيات التي تمثل نقاط في المنطقة غير المظللة	ص ≤ ٤س - ٥
	يقوم الطلاب بإنشاء الإحداثيات التي تمثل نقاط في المنطقة غير المظللة	ص > س^{٢} - ١

مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع
King Abdulaziz & his Companions Foundation for Giftedness & Creativity
موهبة

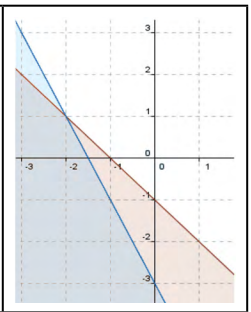
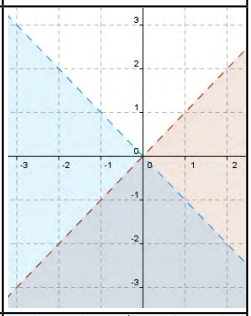
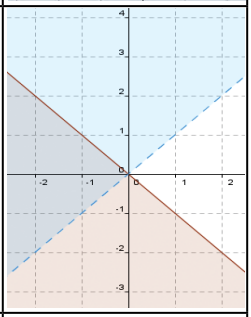
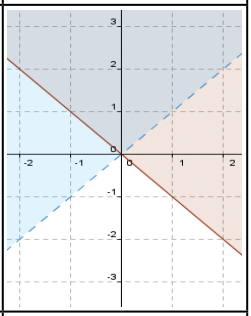
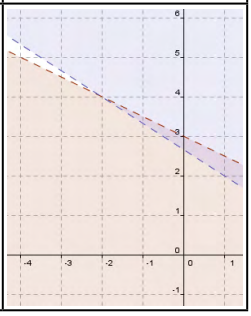
	(١، ٢) (٠، ٠) (-١، -٢)	يقوم الطلاب بإنشاء متباينة مكافئة للمتباينة ص > ٢س - ١
	(-٢، ٠) (-١، ٠) (-٢، ٢)	يقوم الطلاب بإنشاء متباينة مكافئة للمتباينة -٦ص > ٣س + ٤
	(-١، ٣) (٠، ٢) (١-، ٣)	يقوم الطلاب بإنشاء متباينة مكافئة للمتباينة ٢س + ٣ص ≥ ٧
	يقوم الطلاب بإنشاء الإحداثيات التي تمثل نقاط في المنطقة غير المظللة	٢س ≥ ٥ – ٣ص
	يقوم الطلاب بإنشاء الإحداثيات التي تمثل نقاط في المنطقة غير المظللة	٢ص ≥ ٣س + ٤

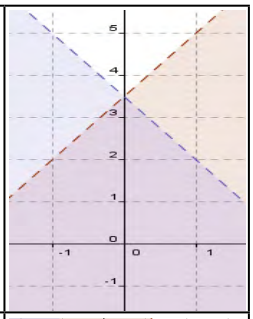
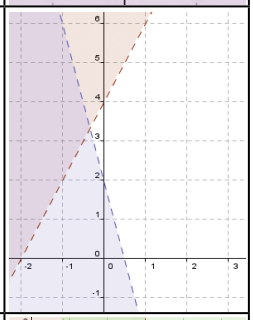
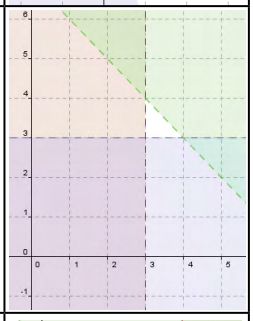
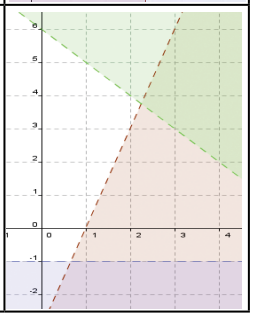
	يقوم الطلاب بإنشاء الإحداثيات التي تمثل نقاط في المنطقة غير المظللة	ص ≥ ٨س - ٢

السؤال الرابع
شكل ٤

	ص > ٢س + ١	ص < -٣س - ٤
	ص > ٢س + ١	ص < -٢س - ٣
	ص > ٢س + ١	ص > س + ٢

"موهبة .. حيث تنتمي"

ص ≤ - س - ١		ص ≤ -٢س - ٣
ص > س		ص > - س
ص ≤ - س		ص > س
ص ≤ - س		ص > س
٢س + ٣ص < ٨		٢س + ص < ٦

-٣س + ٢ص < ٧		٣س + ٢ص < ٧
٢ص – ٤س < ٨		ص < -٤س + ٢
س < ٣ ص < ٣ س + ص < ٧		
ص + ٣ < ٣س ص – ٢ < -٣ س + ص < ٦		

مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع
King Abdulaziz & his Companions Foundation for Giftedness & Creativity
موهبة

سوف تقوم كل مجموعة صغيرة من الطلاب بقص مجموعة من البطاقات والموجودة في ورقة عمل المصادر رقم (٢) هذا السؤال مشابه للسؤال السابق ولكنه أكثر تحدياً من ناحيتين:

- يوجد ثلاث معادلات خطية تحتاج للتمثيل البياني وثلاث مناطق تحتاج لتحديدها باستخدام المتباينات الخطية.
- لم يتم كتابة المعادلات على الشكل ص = م س + جـ .

قم بطرح الأسئلة التالية والتي تعمل على توجيه الطلاب لإستخدام القرائن المتاحة:

- ماالذي يظهره التمثيل البياني؟
- حدد النقاط التي يتقاطع فيها التمثيل البياني مع المحاور الإحداثية.

هل هذا يتطابق مع النتيجة التي تحصل عليها عند تعويض المتغيرين س أو ص بالقيمة ٠ في المعادلات المعطاه؟

- هل يبدو وضع الميلان صحيحاً؟

فرص التقويم

تعطي الأسئلة السابقة الفرصة للطلاب لكي يطوروا مقدرتهم لاستخدام الطرق المختلفة لتمثيل المتباينات بيانياً.

- هل أظهر الطلاب مدى ثقتهم في الربط بين البطاقات وتكوين البطاقات المفقودة؟
- هل أظهر الطلاب مدى طلاقتهم في التنقل بين الأشكال الجبرية المختلفة وبين التمثيلات البيانية لتلك الأشكال؟

النشاط الثاني :
المتباينات والمضلعات الهندسية

١. مثّل الدالة الخطية ص = ٢س + ٤ بيانياً. يمكنك استخدام أحد البرامج الحاسوبية لتمثيل الدالة بيانياً. قم بإنشاء دالة خطية أخرى بحيث يتشكل لديك مثلث متساوي الساقين مكون من تمثيلك البياني للدالة الجديدة والتمثيل البياني للدالة ص = ٢س + ٤، وجزء من المحور السيني.
استخدم المتباينات لتحديد مجموعة النقاط داخل المثلث المتساوي الساقين والتي لا تنتمي إلى أضلاع المثلث.

٢. باستخدام نفس المحاور الإحداثية السابقة ، قم بتمثيل دالتين خطيتين أخريين بيانياً بحيث تحققان المعايير التالية:
- كلاهما يتقاطع مع المحور الصادي عند النقطة (٠ ، ٣٠).
- كلاهما يلتقي مع اثنين من رؤوس المثلث المتساوي الساقين لتشكيل شكل رباعي الأضلاع.
استخدم المتباينات الخطية لتحديد مجموعة النقاط التي تقع داخل الشكل الرباعي ولكنها لا تقع على أضلاع الشكل.

٣. استخدم أحد البرامج الحاسوبية لعمل تمثيل بياني لدوال خطية تتقاطع مع بعضها بحيث تشكل مضلعاً سداسياً منتظماً. استخدم المتباينات لتحديد المنطقة في الداخل وعلى أضلاع الشكل السداسي. عليك الآن إعداد برهان لإثبات أن الشكل السداسي متساوي الأضلاع، ثم شارك هذه المعلومة مع طالبين آخرين في الفصل.

٤. قم بتشكيل مضلعات هندسية أخرى منتظمة مستخدما دوال خطية. لا تقم بكتابة الدوال على التمثيل البياني ومن ثم تحدى طلابا آخرين في الفصل لإيجاد المتباينات الخطية التي تصف مجموعة النقاط الواقعة حصرياً داخل الشكل الهندسي وليست تلك الواقعة على الأضلاع

٣٤

"موهبة .. حيث تنتمي"

حول هذا النشاط

هذا النشاط يسمح للطلاب بإستخدام المتباينات لتعريف حدود المناطق وكذلك المناطق الداخلية لبعض المضلعات الهندسية، وهذا يعني الربط بين الجبر والهندسة.
إن استخدام البرنامج الحاسوبي (ICT) (برامج التمثيل البياني) لتمثيل المستقيمات بيانياً وتحديد المناطق سوف يسرّع من العمليات وسوف يسمح لنا بالتعامل مع هذه المستقيمات بكل سهولة.

خصائص الأداء المتقدم

- استخدام الاستنتاج الرياضي لإثبات خصائص الأشكال المتكونة من المتباينات الخطية.
- تقدير الربط بين الجبر والهندسة.

توصيات أسلوب الدرس

يمكن للطلاب العمل على هذا النشاط من خلال مجموعات أو بشكل منفرد. وسوف يستفيد الطلاب من المناقشات الجماعية بعد الإنتهاء من السؤال الأول ومن ثم سيكون لديهم القدرة على تطبيق أفكارهم في بقية الأسئلة.
من المهم جداً الجمع بين الطلاب بعد نهاية السؤال الأخير لمشاركة أفكارهم حول كيفية برهان السؤال الثالث. إذا لم يستخدم الطلاب نظرية فيثاغورس فمن الممكن أن يقوم المدرس بتذكيرهم بها حتى يقوموا بتطبيقها في السؤال الرابع.

مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع
King Abdulaziz & his Companions Foundation for Giftedness & Creativity
موهبة

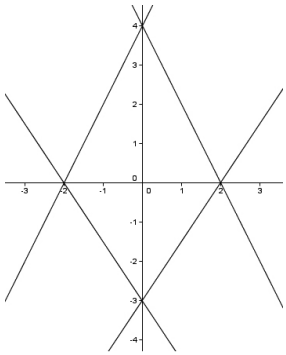
إجابات الأسئلة

السؤال الأول

يعتبر هذا السؤال تطبيق مباشر للمتباينات وعلى الطلاب أن يلاحظوا أن التمثيل البياني للدالة ص = -٢س + ٤ سوف يعطي شكل مثلث متناظر حول محور الصادات.
بإستخدام المحور السيني كقاعدة للمثلث سوف نحصل على مثلث متساوي الساقين. أي مستقيم أفقي ص = أ بحيث أن أ < ٤ سوف يعطي مثلث متساوي الساقين أيضاً. يوجد عدد لا نهائي من تلك المثلثات المتساوية الساقين.
إن وصف النقاط الواقعة داخل المثلث يعكس المتباينات التي تشكلت من إستخدام الخطوط المستقيمة التي تم رسمها.

السؤال الثاني

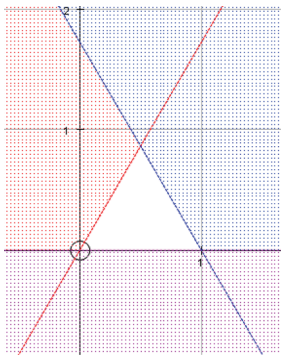
يحتاج هذا السؤال إلى التوسع لرسم شكل رباعي كما هو موضح في الشكل أدناه.



السؤال الثالث

هذا السؤال مشابه للسؤال الثاني ولكن يتوقع رسم بعض الأشكال الصعبة نوعاً ما مثل رسم مثلث متساوي الأضلاع.
إذا تم استخدام المحور السيني أو المستقيم الأفقي ص = ن كقاعدة للمثلث فإن الصعوبة لدى الطلاب هي في كيفية رسم مستقيم بزاوية ٦٠°.
إن استخدام التجريب والتطوير في برامج التمثيل البياني سوف يجعل الطلاب قريبين من الرسم الصحيح. ولكن ينبغي تشجيع الطلاب على استخدام نظرية فيثاغورس لحساب الميل والذي يجب ان يكون من مضاعفات العدد $\sqrt{\frac{٣}{٤}}$.

أحد هذه الحلول المحتملة موضح فيما يلي بحيث أن قاعدة المثلث بطول ١ وحدة.



■ المعادلة ٤: ص < ٢ $\sqrt{\frac{٣}{٤}}$ س

■ المعادلة ٢: ص > -٢ $\sqrt{\frac{٣}{٤}}$ س +٢

■ المعادلة ٣: ص < ٠

عند إسقاط عمود من نقطة تقاطع المستقيمين الأحمر و الأزرق فإن العمود يمر بالقاعدة عند النقطة $(\frac{١}{٢}، ٠)$

مع ملاحظة أن طول كل ضلع في المثلث المتساوي الأضلاع هو ١.
وبتطبيق نظرية فيثاغورس فإن طول العمود هو $\sqrt{\frac{٣}{٤}} = \sqrt{١^٢ - (\frac{١}{٢})^٢}$

لذلك وباستخدام قانون الميل فإن ميل المستقيم الأحمر هو $\sqrt{\frac{٣}{٤}} \div ٢ = \sqrt{٣}$

ولذا فإن ميل المستقيم الآخر هو بعكس الإشارة ولضمان مرور المستقيم الآخر بالنقطة $(\frac{١}{٢}، \sqrt{\frac{٣}{٤}})$

يجب أن يكون الحد الثابت هو $\sqrt{٣}$. وهذا يمثل أحد الحلول المقترحة .

السؤال الرابع

هذا السؤال مبني على المهارات التي تم اكتسابها في حل السؤال ٣ ويجب أن يكون الطلاب الآن قادرين على رسم مستقيمات بزاوية ٦٠° وذلك لكي يقوموا برسم الشكل السداسي.
باقي الأشكال الهندسية المنتظمة قد تبدو سهلة ولكن يجب الأخذ في الإعتبار استخدام نظرية فيثاغورس لتجنب ارتكاب الأخطاء.
يجب حث الطلاب على استخدام البرهان وتفسير ما أنجزوه لبعضهم البعض، وبيان أوجه التشابه والإختلاف بين الأشكال الهندسية المتشابهة التي تم رسمها باستخدام خطوط مستقيمة مختلفة.

توصيات أسلوب التدريس

المفتاح الرئيسي في هذا النشاط هو التركيز على مدى تطبيق الطلاب للرياضيات التي تعلموها من الوحدات السابقة لحل المسائل.
إن رعاية وتطوير مهارات البرهان هي ضرورية جداً.

- هل لدى الطلاب المقدرة على الربط بين معرفة خصائص الأشكال وبين التمثيلات الهندسية والجبرية؟
- هل لدى الطلاب المقدرة على انشاء سلسلة من التفسيرات المنطقية لدعم حل السؤال الثالث؟

"موهبة .. حيث تنتمي"

النشاط الثالث :
الحل الأمثل

التمثيلات البيانية للمتباينات تحوي تطبيقاً عملياً في إحدى مجالات الرياضيات و المعروف باسم الأمثلية .
من خلال دراسة تركيبة من النقاط (منطقة الحل) والتي تحقق شروطاً معينة (المتباينات) ، فإنه من الممكن إيجاد مجموعة من الحلول.
ومن خلال تلك الحلول الممكنة يمكننا اختيار أفضل حل ممكن و الذي يمكن أن يعطينا على سبيل المثال أعلى ربح أو أقل وقت.

١. تنظم إحدى المدارس رحلة إلى إحدى الشاطئ ويحتاج منظم الرحلة أن يقوم بحجز عدد معين من الحافلات الكبيرة والصغيرة من شركة مواصلات. سيشارك في هذه الرحلة ٤٧٥ طالباً و ٢٥ معلماً مع العلم أن شركة المواصلات لديها ١٣ حافلة كبيرة سعة كل منها ٤٢ مقعداً و ٦ حافلات صغيرة سعة كل منها ٢٠ مقعداً. يبلغ مجموع عدد السائقين المتوفرين لذلك اليوم ١٦ سائقاً، وهناك ٣٥ طالبا عرضة للإصابة بدوار الحركة لذا يجب عليهم السفر في حافلات صغيرة.
- استخدم معلوماتك الجبرية في كتابة مجموعة متباينات خطية تمثل الشروط التي يجب أن تفي بمطالب الحجز ثم مثلها بيانياً
- استخدم تمثيلك البياني لإعطاء أمثلة ممكنة لعدد الحافلات الكبيرة والصغيرة والتي تحقق شروط الحجز.
تبلغ الميزانية الموقتة التي حددتها المدرسة ٣٥٠٠ ريال. لتغطية تكاليف النقل وتبلغ التكلفة اليومية لاستئجار الحافلة الكبيرة ٣٠٠ ريال و لاستئجار الحافلة الصغيرة ٢٠٠ ريال.
- هل بإمكان المدرسة القيام بالرحلة في حدود هذه الميزانية؟
- ما هو اقل سعر يمكن للمدرسة أن تحصل عليه؟
اشرح الحل مستخدماً المناطق على التمثيل البياني .

٢. يقوم أحد مصانع الأثاث بإنتاج طاولات وكراسي، ويحتاج مدير المصنع إلى تحديد عدد الطاولات و الكراسي اللازمة للإنتاج. يعمل المصنع لمدة أقصاها ٤٠ ساعة أسبوعيا و يستغرق إنتاج الطاولة الواحدة ٤٥ دقيقة وإنتاج الكرسي الواحد ٣٠ دقيقة. يريد العملاء ما لا يقل عن ٤ كراسي لكل طاولة. إذا قام المصنع بتخزين الطاولات فقط فهذا يعني أن هناك مساحة كافية لعدد ٦٠ طاولة كحد أقصى. تبلغ مساحة تخزين الطاولة أربعة أضعاف مساحة تخزين الكرسي.
- استخدم معلوماتك الجبرية في كتابة مجموعة متباينات خطية تمثل الشروط التي يجب أن يلتزم بها المصنع ثم مثلها بيانياً.
- استخدم تمثيلك البياني لإعطاء أمثلة ممكنة لعدد الطاولات والكراسي التي تحقق الشروط.
يعلم المدير انه بإمكان المصنع أن يبيع جميع ما ينتجه.
إذا كان ربح بيع الطاولة ٢٥ ريالاً وربح بيع الكرسي ١٥ ريالاً فأجب عما يلي:
- هل بإمكان المصنع أن يحقق ربحا يصل إلى ١٠٠٠ ريالاً في الأسبوع؟
- ما هو أقصى ربح محتمل في الأسبوع؟
اشرح الحل باستخدام المناطق على التمثيل البياني.

٣٥

حول هذا النشاط

صمّم هذا النشاط لإعطاء فكرة عميقة حول تطبيق استخدام المتباينات الخطية في إيجاد الحل الأمثل.
يجب حث الطلاب على إيجاد الحل باستخدام التمثيلات البيانية.
إن استخدام برامج التمثيل البياني سوف يساعد الطلاب على فهم هذا النشاط.

خصائص الأداء المتقدم

- استخدام التفكير المنطقي لبناء تمثيلات جبرية وهندسية لمسألة ما.
- استخدام المتباينات الخطية في إيجاد الحلول للمسائل المتعلقة بالحل الأمثل.

توصيات أسلوب التدريس

يجب إعطاء الطلاب الفرصة للعمل ضمن مجموعات على هذا النشاط وكذلك استخدام طرق مختلفة للحل.
من المفيد جداً إنشاء نقاش جماعي بين الطلاب عند وجود فرصة لذلك.

إجابات الأسئلة

السؤال الأول

قد تعتبر المرحلة الأولى لحل هذا السؤال صعبة نوعاً ما للطلاب للعمل بشكل مستقل. من المحتمل أن يساعد النقاش الجماعي على تحديد المتغيرات المراد رسمها. ويكون تحديد هذه المتغيرات بالتفكير فيما هو مطلوب إيجاده وهو بمعنى آخر عدد الحافلات الكبيرة والحافلات الصغيرة.
لتحديد منطقة الحل، يحتاج الطلاب إلى تكوين المتباينات الخطية ومن ثم تمثيلها بيانياً.
قد يرغب الطلاب في مقارنة المتباينات مع مجموعة أخرى قبل الإستمرار في الحل .
إذا كان المتغير س يمثل عدد الحافلات الصغيرة و المتغير ص يمثل عدد الحافلات الكبيرة، ولكي يتوافق ذلك مع عدد المقاعد المطلوبة نحصل على المتباينة

٢٠س +٤٢ ص ≤ ٥٠٠

والمتباينة المتوافقة مع عدد السائقين هي

س + ص ≤ ١٦.

إن احتياج ٣٥ راكب لحافلات صغيرة يعني أن

س > ٢.

وتشمل فقط أعداد صحيحة وذلك لأنها تمثل عدد الحافلات الكبيرة والصغيرة المتوفرة.من المحتمل أن يقوم الطلاب بإنشاء المعادلة التي تمثل الحل الأمثل وهي

٢٠٠ س + ٣٠٠ ص = ٣٥٠٠ ريال.

نلاحظ عند تمثيل هذا المستقيم بيانياً أنه لا يتقاطع مع المنطقة غير المظللة. من خلال تغيير القيمة ٣٥٠٠ ريال، نستطيع تمثيل مستقيمات أخرى بيانياً توازي هذا المستقيم وتتقاطع مع المنطقة غير المظللة. نقوم بتعديل القيمة حتى نحصل على الحل الأقل وهو ٣٧٠٠ريال ويكون ذلك عندما يتم استئجار عدد ٢ حافلة صغيرة وعدد١١حافلة كبيرة.

السؤال الثاني

يمكن للطلاب حل هذا السؤال بنفس الطريقة التي تم فيها حل السؤال السابق. لنفرض أن المتغير س يمثل عدد الطاولات و المتغير ص يمثل عدد الكراسي. بالتالي يمكننا تكوين المتباينات التاليه:

$\frac{٣}{٤}$ س + $\frac{١}{٢}$ ص ≥ ٤٠

ص ≤ ٤س

$\frac{ص}{٤}$ + س ≥ ٦٠

سوف نفترض كذلك أن س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠.
المعادلة المطلوبة و التي تمثل الحل الأمثل هي
٤٥س + ١٥ص = ن، حيث أن المتغير ن يمثل مقدار الربح.
يحتاج الطالب إلى تمثيل المعادلة بيانياً.
٤٥س + ١٥ص = ١٠٠٠.
يتم بعد ذلك تغيير قيمة ن لتحريك المستقيم بشكل موازي وحتى يتم الحصول على أقصى ربح ممكن ومقداره ١٥١٥ ريال وهذا يحصل عندما يكون لدينا ١٤ طاولة و ٥٩ كرسي.

توصيات أسلوب التدريس

يقدم هذا النشاط جزء مهم في الرياضيات و يقوم بالتركيز على مدى مقدرة الطلاب على استيعاب ووصف المناطق الموجودة على التمثيل البياني والمرتبطة بوصف مسألة ما.

- هل استخدم الطلاب التفكير الإستدلالي لبناء تمثيلات جبرية وهندسية لمسألة ما؟
- هل قام الطلاب بتطبيق ما تعلموه حول المتباينات الخطية لحل مسائل متعلقة بإيجاد الحل الأمثل؟

"موهبة .. حيث تنتمي"

الوحدة الخامسة

أنظمة المعادلات الخطية

مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع
King Abdulaziz & his Companions Foundation for Giftedness & Creativity
موهبة

نظرة عامّة

يقوم الطلاب في هذه الوحدة بحل أنظمة معادلات خطية بتبرير قراراتهم حول اختيار طريقة الحل وكيفية استخدام طرق غير مألوفة في حل هذه الأنظمة.
وكذلك عليهم أن يأخذوا في الإعتبار عدد الحلول الممكنة لأي نظام من المعادلات الخطية واعطاء الأسباب لذلك مستخدمين استنتاجات جبرية وكذلك انشاء تمثيلات بيانية لتلك الأنظمة.

المعرفة السابقة

يحتاج الطلاب في هذه الوحدة إلى الخبرة في حل المعادلات الخطية باستخدام طريقة الحذف والتعويض وكذلك باستخدام طريقة التمثيل البياني.

خصائص الأداء المتقدم

القيم و الإتجاهات و السمات

- الإبداع (النشاط الأول)
- الاستقلالية في الدراسة (النشاط الأول)

المهارات المتقدمة

- التعميم (النشاط الثاني)

المعرفة و الفهم المتقدمان

- الفهم المتعمق للبنية الرياضية الأساسية (النشاط الثاني)

الخطة الزمنية

أربع ساعات تقريبا

المصادر

يحتاج الطلاب إلى كل مما يلي:

- استخدام أحد برامج التمثيل البياني.
- قطع من الورق المقوى وكذلك بعض المقصات.
- أقلام تلوين وغراء لاصق.
- مجموعة واحدة من البطاقات والموجودة في ورقة عمل المصادر رقم (١).
- الصور الموجودة في ورقة عمل المصادر رقم (٢).

حول هذا النشاط

في هذا النشاط يتم استرجاع ما تعلمه الطلاب حول إيجاد حلول المعادلات الخطية ولكن بتعمق أكبر وذلك من خلال تشجيع الطلاب على النقاش الجماعي لتقرير ماهي الطرق المناسبة للحل. يجب الأخذ في الإعتبار النظر بتعمق في الأفكار والبدائل المختلفة المثيرة للإهتمام.

خصائص الأداء المتقدم

- إعطاء الثقة لدى الطلاب في تجربة أفكار جديدة وتطبيق فهمهم للمعادلات الخطية المتزامنة بطريقة جديدة.
- العمل بشكل مستقل وإظهار المثابرة لدى الطلاب من خلال الرصد والتقييم والتصحيح الذاتي لديهم.

توصيات أسلوب التدريس

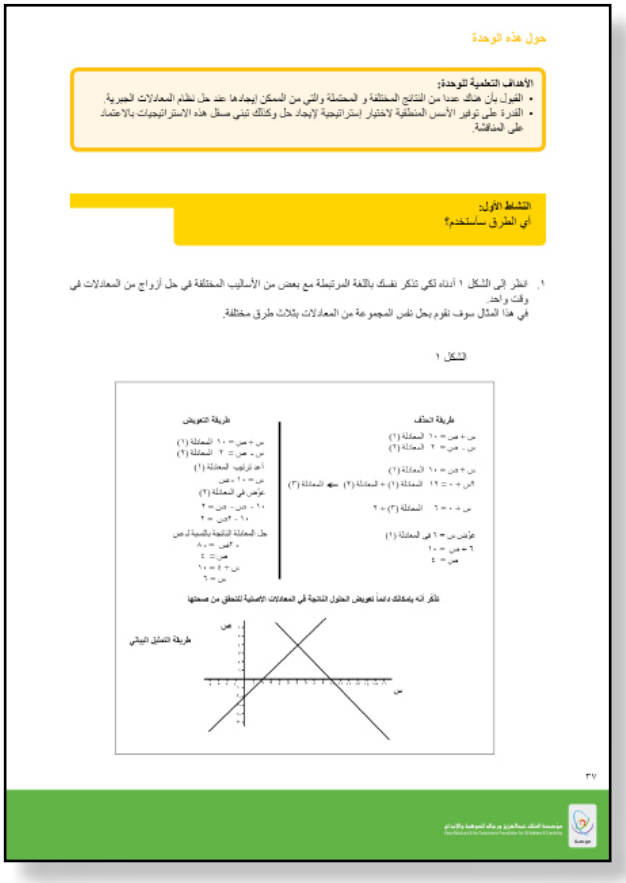
يعتبر السؤال الأول أكثر ملائمة للعمل بشكل جماعي لإستكشاف معرفة الطلاب المسبقة بالمعادلات المتزامنة.
يفضل العمل على معظم الأسئلة من خلال مجموعات ثنائية من الطلاب ومن ثم يتم جمعهم في مجموعات مكونة من أربعة طلاب لمقارنة ما توصلوا إليه من حل.

إجابات الأسئلة

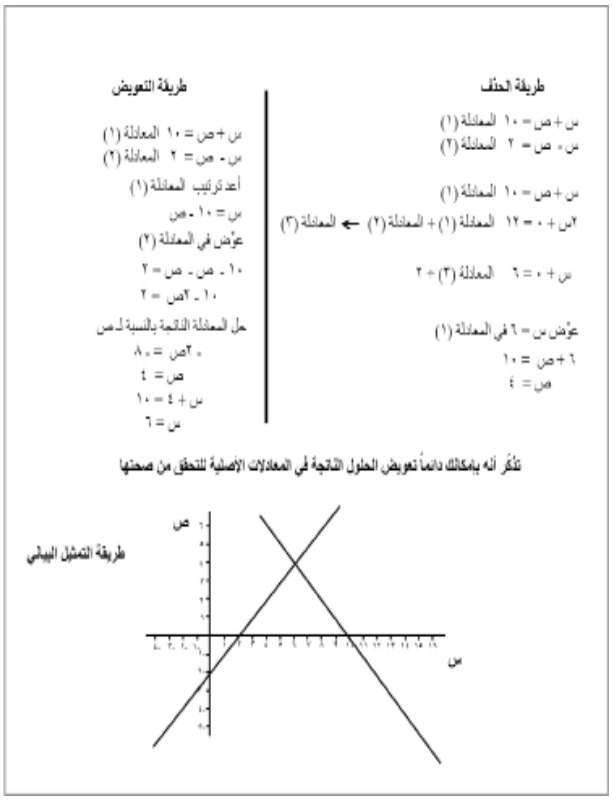
السؤال الأول

حاول تذكير الطلاب بمعنى مصطلح نظام المعادلات وأوضح للطلاب أن نظام المعادلات ليس إلاّ مجموعة مكونة من معادلتين أو أكثر تحوي نفس المتغيرات.
حل نظام معادلات يعني إيجاد القيم لتلك المتغيرات والتي تحقق جميع المعادلات.
يمكن للمعادلات في هذا النظام ان تكون خطية أو غير خطية.
لا بد وأن الطلاب قد تعرفوا على الأقل على ٣طرق لحل هذه الأنظمة من المعادلات الخطية في مناهجهم الدراسية.
اطلب من الطلاب أن يقوموا بذكر هذه الطرق الثلاث وهي:

- كأداة الحل بالتعويض.
- الحل بالحذف (باستخدام الجمع والطرح والضرب والقسمة).
- الحل باستخدام التمثيل البياني.



الشكل ١



السؤال الأول

الشكل ١ يوضح حل نظام معادلات خطية باستخدام الثلاث طرق السابقة.
تأكد من فهم الطلاب لاستخدام الرمز ← والذي يشير إلى ما يحدث للمعادلات في كل مرحلة.
يعتبر النظام المعطى في هذا الشكل هو نظام بسيط للغاية هدفه مساعدة الطلاب على استرجاع ما درسوه ومن ثم البدء في التفكير في طرق أخرى للحل.
في نهاية هذه الوحدة سوف يتم سؤال الطلاب لبيان مدى فهمهم للمزايا النسبية لهذه الطرق. كما ويجب تحذيرهم من احتمال عدم وجود إجابة بسيطة على هذا السؤال.
لذا يجب عليهم تذكر المزايا النسبية لهذه الطرق المستخدمة في هذا النظام البسيط.
ومن خلال العمل على هذه الوحدة، ربما يود الطلاب أخذ بعض الملاحظات المهمة.

السؤال الثاني

المجموعة أ:

$$س + ٣ص - ٢هـ = ٥$$
$$٣س + ٥ص + ٦هـ = ٧$$
$$٢س + ٤ص + ٣هـ = ٨$$

المجموعة ب:

$$س^{٢} + ص^{٢} = ١٠$$
$$٢س + ص = ١$$

يعتبر النظام الموجود في المجموعة أ طويل نوعاً ما و بثلاث متغيرات لذا فمن الممكن أن يقترح الطلاب استخدام طريقة الحذف.
بينما النظام الموجود في المجموعة ب هو غير خطي نوعاً ما ويمكن حله بطريقة التعويض.
من الممكن أن يقوم المعلم بحث الطلاب على تمثيل النظام بيانياً في البداية لكي يتكوّن لديهم إنطباع عما سيحدث وكذلك ملاحظة الحلول المتوقعة مبدئياً.
يجب أن يكون واضحاً لدى الطلاب أنه لا يوجد بالضرورة طريقة صحيحة و أخرى خاطئة ولكن سيكون على الأرجح طريقة أكثر فعالية لكل نظام.
المجموعة أ: س = - ١٥ ، ص = ٨ ، هـ = ٢
المجموعة ب: س = - ١ ، ص = ٣ أو س = $\frac{٩}{٥}$

، ص = $\frac{-١٣}{٥}$

السؤال الثالث

من خلال العمل في مجموعات مكونة من أربع طلاب يعمل كل طالبين على أحد هذين النظامين:

$$س + ٠,٩٩٩٩٩ ص = ٢,٩٩٩٩٩$$
$$٠,٩٩٩٩٩س + ص = ٢,٩٩٩٩٨$$

أو

$$س - ١,٠٠٠٠١ ص = ٢,٩٩٩٩٩$$
$$٠,٩٩٩٩٩س + ص = ٢,٩٩٩٩٨$$

قبل أن يبدأ الطلاب في العمل على هذا النظام، يجب دعوة الطلاب للتفكير في مدى تقارب معاملات كل من س و ص في كل معادلة.
حل النظام الأول هو س = ٢ ، ص = ١.
حل النظام الثاني هو س = ٣ ، ص = ٠,٠٠٠٠١.
يجب على الطلاب الإستعانة بأحد برامج التمثيل البياني وذلك لمساعدتهم على تصور وشرح الحلين المختلفين كلياً واللذين تم الحصول عليهما وذلك لتدعيم المفهوم بشكل أوسع.
حيث أن جميع المستقيمات الأربعة في النظامين السابقين تقاطع الإحداثي الصادي عند نقطة قريبة من ٣ وهي أشبه ما تكون بالخطوط المتوازية، سوف نلاحظ التأثير الكبير للتغيير البسيط في قيمة المعاملات.
وللتوسع في هذه الفكرة، من الممكن أن تسمح الفرصة للطلاب لإستكشاف نظرية الفوضى والموجودة على الرابط:
http://en.wikipedia.org/wiki/Chaos_theory

"موهبة .. حيث تنتمي"

السؤال الرابع (طريقة غاوس للحذف)

كل مجموعة صغيرة من الطلاب بحاجة إلى ما يلي:

- مجموعة واحدة من البطاقات والموجودة في ورقة عمل المصادر رقم (١).
- قطعة كبيرة من الورق (على الأقل مقاس A2).
- أقلام تلوين وغراء.

وجّه الطلاب كي يقوموا بلصق البطاقات على قطعة الورق الكبيرة وإضافة بعض الملاحظات لديهم لشرح طريقة الحل على الورقة.

يمكن بعد ذلك تمرير هذه الأوراق على المجموعات الأخرى لتقوم بإضافة بعض الملاحظات عليها.

يمكن لأحد أعضاء المجموعة الأصلية الجلوس مع المجموعات الأخرى لإجابة أي سؤال حول ذلك وأخذ ردود الأفعال ومن ثم مناقشتها مع مجموعته الأصلية.

قم بأخذ ردود الأفعال بشكل عام من الطلاب حول هذا السؤال وكذلك طرق تحسينهم للحل.

الترتيب الصحيح للبطاقات هو:

٣	$(i)\quad ٢س + ص + ع = ٦$ $(ii)\quad -٣س - ٤ص + ٢ع = ٤$ $(iii)\quad س + ص - ع = -٢$
٨	$(iii) \longleftrightarrow (i)$ $س + ص - ع = -٢$ $-٣س - ٤ص + ٢ع = ٤$ $٢س + ص + ع = ٦$
٤	$(ii) \longleftarrow (ii) + (i)٣$ $(iii) \longleftarrow (iii) + (i)٢-$ $س + ص - ع = -٢$ $-ص - ع = -٢$ $-ص + ٣ع = ١٠$
١	$(ii)\ (-١)$ $س + ص - ع = -٢$ $ص + ع = ٢$ $-ص + ٣ع = ١٠$
٧	$(iii) \longleftarrow (iii) + (ii)$ $س + ص - ع = -٢$ $ص + ع = ٢$ $٤ع = ١٢$
٢	$(iii)\ \frac{١}{٤}$ $س + ص - ع = -٢$ $ص + ع = ٢$ $ع = ٣$
٥	عوّض قيمة ع = ٣ في المعادلة (ii) لتحصل على قيمة ص $ص + ٣ = ٢$ $\Leftarrow ص = -١$
٦	عوّض قيمة كل من ص و ع في المعادلة (i) لتحصل على قيمة س $س - ١ - ٣ = -٢$ $\Leftarrow س = ٢$

فيما يلي بعض المعلومات العامة التي يمكن إضافتها للمناقشة بعد الإنتهاء من حل السؤال.

- في نهاية القرن الثامن عشر الميلادي تم اعتماد هذه الملاحظات كجزء أساسي في كتب الجبر الدراسية وتحمل الآن مسمى طرق غاوس للحذف.

وقد سميت الخوارزميات التي تم تدريسها تقريباً في عام ١٩٥٠ م بطريقة غاوس وذلك نظراً للإختلافات على مدى التاريخ حول هذا الموضوع.

- لقد ظهرت طريقة غاوس للحذف في الباب الثامن تحت عنوان " أهمية المصفوفات المستطيلة " وذلك في كتاب للمؤلف الصيني جوزهانج سوشو يحمل عنوان "الأبواب التسعة في فن الرياضيات" حيث يشرح الكتاب ثمانية عشر مسألة تحوي من ٢ إلى ٥ متغيرات. أول مرجع لهذا الكتاب تحت هذا العنوان كان بتاريخ ١٧٩ قبل الميلاد ولكن تمت كتابة أجزاء منه بتاريخ ١٥٠ م. في القرن الثالث الميلادي، قام ليوهيو بكتابة بعض الملاحظات حول هذا الكتاب.

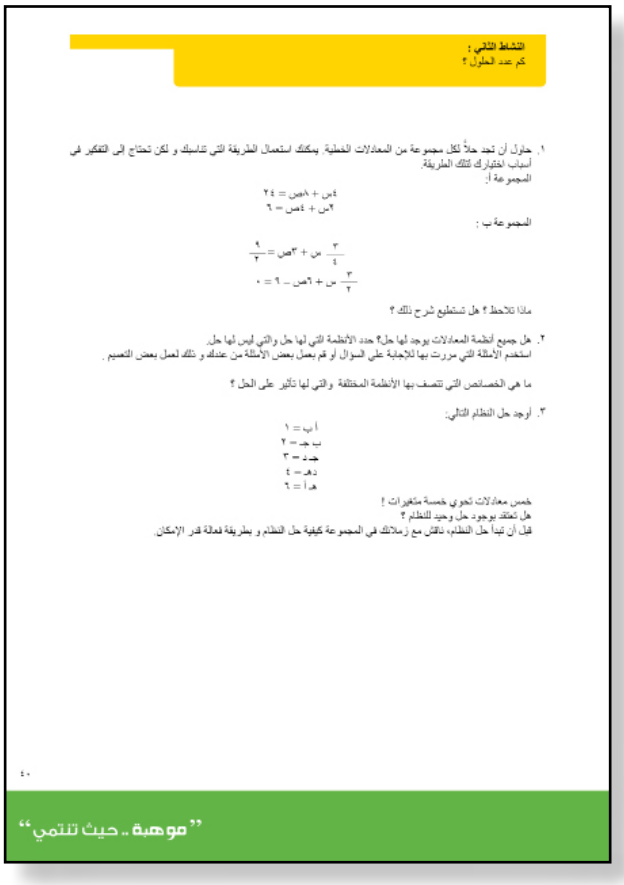
- ظهرت هذه الطريقة في أوروبا من خلال مذكرات اسحاق نيوتن، فقد ذكر نيوتن في عام ١٦٧٠ م أن جميع كتب الجبر تفتقر إلى درس في طرق حل المعادلات الآنية ولكنه بعد ذلك قام بتزويد هذه الطرق. في عام ١٧٠٧ م وبعد أن ترك نيوتن الحياه الأكاديمية، قامت جامعة كامبريدج بنشر هذه الملاحظات تحت مسمى تعميمات حسابية (Arithmetica Universalis).

فرص التقويم

يعتبر هذا النشاط فرصة للطلاب للتعامل بكل طلاقة مع المعادلات. حيث سيكون لديهم المقدرة على الفهم المتعمق لأنظمة المعادلات وسرعة القرار في اتخاذ الطريقة الأنسب للحل.

- هل للطلاب المقدرة على إنشاء تعميمات لمزايا نظام معادلات ومن ثم تقييم المزايا النسبية للطرق المختلفة لحل هذا النظام؟
- هل للطلاب المقدرة على العمل بشكل مستقل وتطبيق الطرق الخاصة بهم على مجموعات مألوفة أقل من المعادلات؟

مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع
King Abdulaziz & his Companions Foundation for Giftedness & Creativity
موهبة


النشاط الثاني :
كم عدد الحلول ؟

١. حاول أن تجد حلاً لكل مجموعة من المعادلات الخطية. يمكنك استعمال الطريقة التي تناسبك و لكن تحتاج إلى التفكير في أسباب اختيارك لتلك الطريقة.
المجموعة أ:

٤س + ٨ص = ٢٤
٢س + ٤ص = ٦

المجموعة ب :

$\frac{٣}{٤}$ س + ٣ص = $\frac{٩}{٢}$
$\frac{٣}{٢}$ س + ٦ص − ٩ = ٠

ماذا تلاحظ ؟ هل تستطيع شرح ذلك ؟

٢. هل جميع أنظمة المعادلات يوجد لها حل؟ حدد الأنظمة التي لها حل والتي ليس لها حل.
استخدم الأمثلة التي مررت بها للإجابة على السؤال أو قم بعمل بعض الأمثلة من عندك و ذلك لعمل بعض التعميم.

ما هي الخصائص التي تتصف بها الأنظمة المختلفة والتي لها تأثير على الحل ؟

٣. أوجد حل النظام التالي:

أ ب = ١
ب جـ = ٢
جـ د = ٣
د هـ = ٤
هـ أ = ٥

خمس معادلات تحوي خمسة متغيرات !
هل تعتقد بوجود حل وحيد للنظام ؟
قبل أن تبدأ حل النظام، ناقش مع زملائك في المجموعة كيفية حل النظام و بطريقة فعالة قدر الإمكان.

٤٠

"موهبة .. حيث تنتمي"

حول هذا النشاط

في هذا النشاط سوف يعمل الطلاب على حل مثال معين وتحديد عدد الحلول الموجودة (إذا كان هناك حلول) ومن ثم استخدام مدى فهمهم للتمثيلات المختلفة لمساعدتهم على شرح أسباب توصلهم لهذه النتائج.
هذا سوف يقود الطلاب إلى إنشاء تعميمات لبعض النتائج والتي ستساعدهم على حل أي نظام من المعادلات.
يحث السؤال الأول الطلاب على استخدام لغة رياضية معقدة لإنشاء تعميمات تشرح الظواهر الرياضية.

خصائص الأداء المتقدم

- التبصر في البنية لنظام المعادلات.
- تعميم أن خصائص مجموعة من المعادلات تحدد ما إذا كان يوجد هناك حل للنظام أم لاعن طريق طرح الطلاب لهذه التساؤلات.

توصيات أسلوب التدريس

يتم العمل في هذا النشاط مبدئياً عن طريق مجموعات ثنائية من الطلاب ومن ثم يتم جمعهم في مجموعات مكونة من أربع طلاب لمناقشة ما توصلوا إليه من نتائج.
يتم تقديم السؤال الثاني من خلال مجموعات وبعد ذلك يقوم الطلاب بالعمل على السؤال بمفردهم أو من خلال مجموعات ثنائية.
يقوم الطلاب بحل السؤال الثالث بمفردهم أو من خلال مجموعات ثنائية.
يعمل الطلاب على السؤال الرابع من خلال مجموعات وذلك لعرض ومناقشة السؤال مع إعطاء الفرصة للطلاب للعمل كمجموعات ثنائية أو من خلال مجموعات صغيرة.

إجابات الأسئلة

السؤال الأول

يقوم الطلاب بحل هذا السؤال بأي طريقة يختارونها مع الحرص على حثهم على التفكير في أسباب اختيارهم لتلك الطريقة المستخدمة.

إن استخدام التمثيلات البيانية لحل المعادلات سوف يساعد الطلاب على فهم ما يحصل.

المجموعة أ :

$$٤س + ٨ص = ٢٤$$
$$٢س + ٤ص = ٦$$

المجموعة ب :

$$\frac{٣}{٤}س + ٣ص = \frac{٩}{٢}$$
$$\frac{٣}{٢}س + ٦ص - ٩ = ٠$$

سوف يجد الطلاب أن المجموعة أ تمثل مستقيمين متوازيين بينما المعادلات في المجموعة ب متطابقة وتمثل مستقيم واحد فقط.

التمثيل البياني للمجموعة أ سوف يوضح ذلك و بشكل واضح وكذلك عند إعادة ترتيب المعادلات للمجموعة ب وتمثيل المعادلتين سوف يتضح أن المعادلتين تمثلان نفس المستقيم.

السؤال الثاني

بعد مناقشة المجموعة أ والمجموعة ب اسأل الطلاب أن يقوموا بانشاء تعميم لتلك الخاصية وذلك من خلال تساؤلاتهم عن كيفية تحديد وجود حل من عدمه من خلال خصائص مجموعة من المعادلات.

يجب على الطلاب إنشاء بعض الأمثلة من عندهم والتي توضح أفكارهم التي تساءلوا عنها.

هل جميع أنظمة المعادلات لها حل؟ حدد أي منها له حل وأي منها ليس له حل؟

ما هي الخصائص التي تؤثر على حل أنظمة المعادلات الخطية؟

أعط مزيد من الوقت لكل مجموعة ثنائية من الطلاب لمراجعة أفكارهم ومن ثم اطلب من طالب أو طالبين أن يجمعا الأفكار ومن ثم إنشاء تعميم عام من خلال المجموعة.

يوجد العديد من المصطلحات المرتبطة بأنظمة المعادلات الخطية والتي يمكن توضيحها باستخدام الأمثلة.

- النظام متسق (ويشمل المستقيمات غير المتوازية أو التي لها حل واحد على الأقل).
- النظام غير متسق (ويشمل المستقيمات المتوازية أو التي ليس لها حل)
- النظام مستقل، إذا كان يوجد حل وحيد فقط للنظام.
- النظام غير مستقل ويكون فيه عدد المتغيرات أكبر من عدد المعادلات وفي هذه الحالة يوجد عدد غير محدود من الحلول.
- النظام فوق المحدد وهنا يكون عدد المعادلات اكبر من عدد المتغيرات (لايوجد حل).

السؤال الثالث

أوجد حل النظام التالي:

أ ب = ١
ب جـ = ٢
جـ د = ٣
دهـ = ٤
هـ أ = ٦

يعتبر هذا النظام بمثابة تحد للطلاب لإيجاد طريقة مناسبة لحله، مع العلم أن النظام هو غير خطي ويجب على الطلاب ملاحظة وجود مجموعتين من الحل للنظام.

قم بحث الطلاب على العمل على هذا السؤال من خلال مجموعات ثنائية وذلك لمناقشة طريقة حل النظام ومن ثم على كل واحد منهم أن يجد الحل بشكل منفرد وبعد ذلك يمكنهم مقارنة ما توصلوا إليه من حلول.

حل النظام هو المجموعة :

$$أ = \frac{٣}{٢}، ب = \frac{٢}{٣}، جـ = ٣، د = ١، هـ = ٤$$

أو المجموعة:

$$أ = -\frac{٣}{٢}، ب = -\frac{٢}{٣}، جـ = -٣، د = -١، هـ = -٤ .$$

السؤال الرابع

حل نظام ثلاثي الأبعاد يعتبر مسألة أكثر تعقيداً من حل نظام ثنائي الأبعاد.

تحتاج كل مجموعة هنا إلى عدة قطع من البطاقات ومقص.

يجب حث الطلاب على تصور الحالات المختلفة وشرح أفكارهم مستخدمين تلك البطاقات لتمثل مستويات.

مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع
King Abdulaziz & his Companions Foundation for Giftedness & Creativity
موهبة

يجب التأكيد على معرفة الطلاب أن أي معادلة خطية بثلاث متغيرات تمثل مستوى في الفراغ وكذلك كيفية تمثيل تلك المستويات.

التعليمات التالية من الممكن أن تساعد الطلاب على تصور معادلة المستوى:

- تخيل مستوى يتم تمثيله بالمعادلة الخطية أ س + ب ص + جـ هـ = د.
- الرموز أ ، ب ، ج ، د ، هـ تمثل قيم معينة وكذلك فإن موقع المستوى يتغير.
- تخيل أن مستويين يتغيران نتيجة لتغير تلك القيم.
- هل يمكنك شرح ما تخيلته باستخدام قطعتين من البطاقات؟
- هل من الممكن للمستويين أن يتقاطعا؟
- هل يتقاطع المستويان دائماً؟
- ما هو الشكل الناتج في حالة تقاطع المستويين؟
- استخدام ثلاث قطع وبين كيف من الممكن أن يتقاطع ثلاث مستويات في نقطة.

الآن أعط مزيد من الوقت للطلاب لمناقشة ما سيعملونه من خلال مجموعات ثنائية.

على الطلاب أن يجدوا بأنفسهم الطرق المختلفة لتقاطع ثلاث مستويات.

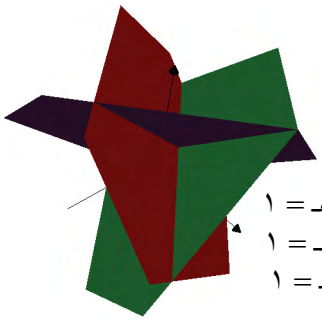
من الصعب إنشاء تمثيل بياني لذلك ويمكن التعويض عن ذلك بالتحدث عن الحالات شفهياً.

قم بأخذ ردود فعل الطلاب حيال ذلك وتحدي الطلاب لإيجاد وصف لكل من تلك الحالات وهل هم واثقون أنهم وصفوا جميع الخيارات الممكنة .

في النظام ثلاثي الأبعاد هناك العديد من الحالات التي ليس لها حل.

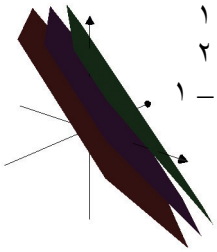
قم بعرض الصور والموجودة في ورقة عمل المصادر رقم (٢) ومن ثم اطلب منهم وصف ما يحدث في كل حالة وإذا كان هناك نقاط تحقق المعادلات الثلاث.

- المستويات تتقاطع في نقطة (حل وحيد)



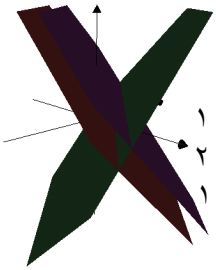
- معادلة ١: س + ص + هـ = ١
- معادلة ٢: س + ص – هـ = ١
- معادلة ٣: س - ص + هـ = ١

- جميع المستويات الثلاث متوازية (لا يوجد حل)



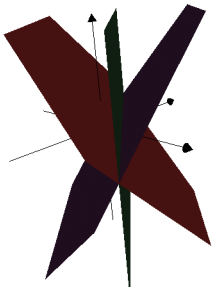
- معادلة ١: س + ص + هـ = ١
- معادلة ٢: س + ص + هـ = ٢
- معادلة ٣: س + ص + هـ = – ١

- مستويان فقط متوازيان، ويقطع كل منهما المستوى الثالث وينتج عن تقاطع المستوى الثالث مع كل من المستويين حل على شكل مستقيم، ولا يحقق هذان الحلّان المعادلات الثلاث جميعها، لذلك لا يوجد حل لنظام المعادلات.



- معادلة ١: س + ص + هـ = ١
- معادلة ٢: س + ص + هـ = ٢
- معادلة ٣: س + ص – هـ = ١

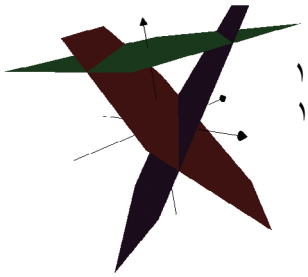
- المستويات الثلاث تتقاطع جميعاً في مستقيم (مجموعة الحل تحقق الثلاث معادلات)



- معادلة ١: س + ص + هـ = ١
- معادلة ٢: س + ص – هـ = ١
- معادلة ٣: س + ص = ١

"موهبة .. حيث تنتمي"

- كل زوج من المستويات يتقاطع في مستقيم مختلف لتشكل هذه المستويات منشور ثلاثي ولكن لا يوجد حل يحقق جميع المعادلات الثلاث.



- معادلة ١: س + ص + هـ = ١
- معادلة ٢: س + ص – هـ = ١
- معادلة ٣: هـ = ٣

فرص التقويم:

جميع الأسئلة في هذا النشاط ستعطي الفرصة للطلاب لفهم الأنظمة المختلفة للمعادلات وأنها من الممكن أن يكون لها حل واحد، أو لاحل لها أو لها عدد لانهائي من الحلول. السؤال الثالث سوف يساعد الطلاب على تصور المسائل بثلاث أبعاد.

- هل لدى الطلاب المقدرة على صياغة القوانين العامة من حيث عدد الحلول المحتملة لكل نظام؟
- يمكن للطلاب أن يظهروا مدى فهمهم لهذه الأنظمة من خلال الإنتقال من الحالة المألوفة لديهم وتشمل بعدين إلى الحالة غير المألوفة والمعقدة والتي تشمل ثلاثة أبعاد.

السؤال الخامس

١. لنفرض أن س تمثل سرعة القارب وأن ص تمثل سرعة التيار.
معدل السرعة بعكس إتجاه التيار = س - ص
معدل السرعة بنفس إتجاه التيار = س + ص
المسافة المقطوعة = معدل السرعة × الزمن
٢(س – ص) = ٣٦
١,٥(س + ص) = ٣٦
وبحل النظام نجد أن س = ٢١ ، ص = ٣.
سرعة القارب هي ٢١ ميلاً في الساعة وسرعة التيار هي ٣ أميال في الساعة.

٢. لنفرض أن س = تكلفة كوب الكابتشينو و
ص = تكلفة كوب القهوة بالحليب.
٢س + ٣ ص = ١٠,٩٥
س + ٢ ص = ٦,٩٥
وبحل النظام نجد أن س = ١,٠٥ ، ص = ٢,٩٥
وهذا يعني أن تكلفة كوب الكابتشينو هو ١,٠٥ ريال وتكلفة كوب القهوة بالحليب هو ٢,٩٥ ريال.

٣. لنفرض أن س = عدد الطاولات التي تتسع لشخصين
ص = عدد الطاولات التي تتسع لأربع أشخاص.
س + ص = ٢٠
٢س + ٤ص = ٦٦
وبحل النظام نجد أن س = ٧ ، ص = ١٣ ، وهذا يعني أن عدد الطاولات التي تتسع لشخصين هو ٧ وعدد الطاولات التي تتسع لأربع أشخاص هو ١٣.

مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع
King Abdulaziz & his Companions Foundation for Giftedness & Creativity
موهبة

الوحدة السادسة

كثيرات الحدود

نظرة عامة

يقوم الطلاب في هذه الوحدة بدراسة كثيرات الحدود بمختلف درجاتها مع التركيز بشكل أكبر على تأثير درجة كثيرة الحدود وكذلك المعاملات والحدود الثابتة على تمثيلها البياني.

الأهداف التعلمية للوحدة

- فهم كيفية ربط خصائص القطع المكافئ بمعادلته.
- فهم كيفية ربط درجة كثيرة الحدود بالتمثيل البياني لها.
- فهم العلاقة الهندسية بين العوامل والجذور لكثيرة الحدود عن طريق التمثيل البياني.

المعرفة السابقة

يجب ان يكون لدى الطلاب المقدرة على التمثيل البياني باستخدام أحد برامج التمثيل البياني مثل برنامج جيو جبرا.

خصائص الأداء المتقدم

المهارات المتقدمة

- التفكير المنطقي والاستدلال (النشاطان الثاني ، والثالث)
- إقامة الصلات بين مختلف مجالات الرياضيات (النشاط الثالث)
- الطلاقة والدقة (النشاط الأول)

القيم و الإتجاهات و السمات

- إنشاء الروابط (النشاط الثاني)
- الفهم المتعمق للبنية الرياضية الأساسية (النشاطان الأول، والثاني)

الخطة الزمنية

خمس ساعات تقريباً.

المصادر

- حاسبة بيانية أو أحد برامج التمثيل البياني مثل جيو جبرا.
- أدوات لعمل لوحات توضيحية.
- وسيلة اتصال بالإنترنت.

حول هذا النشاط

يهدف هذا النشاط إلى ربط المعرفة المسبقة للطلاب بالتمثيل البياني للدوال التربيعية وكيفية ارتباط الدالة ص = أ س^{٢} + ب س + جـ بالمعاملات أ ، ب ، جـ يجب أن يكون للطلاب المقدرة على استخدام أحد برامج التمثيل البياني.

خصائص الأداء المتقدم

- العمل بمرونة وبتعاون مع الآخرين في عمل لوحة توضيحية.
- البناء على المعرفة السابقة وإيجاد التعميمات وعمل النمذجة.

توصيات أسلوب التدريس

يجب توزيع الطلاب في مجموعات صغيرة.

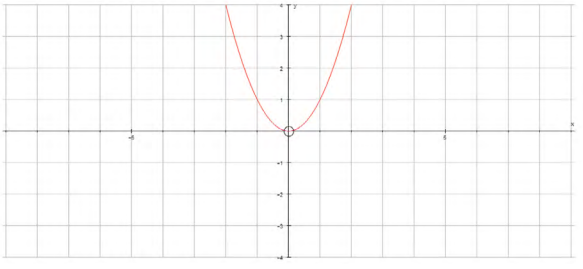
إجابات الأسئلة

السؤال الأول

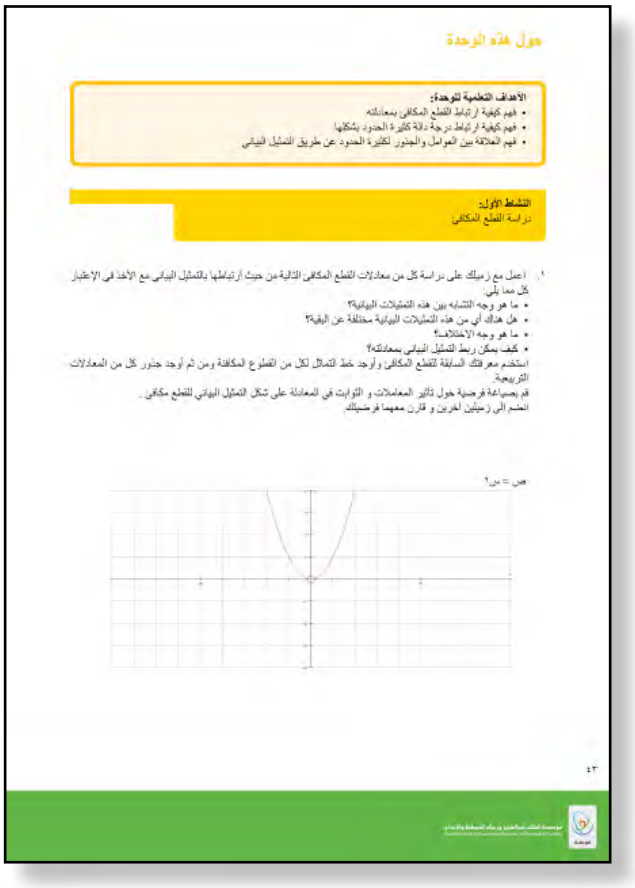
يجب على المعلم أن يتوقع من الطلاب الردود التالية:

- التمثيل البياني للدالة ص = ٤ – س^{٢} مختلف ، فإتجاهه إلى أسفل.
- التمثيل البياني للدالة ص = ٢ س^{٢} + ١ شديد الإنحراف مقارنةً بالتمثيلات البيانية الأخرى، لقد تم استطالته بمعامل قياس ٠,٥ وبموازاة الإحداثي الصادي.
- جميع التمثيلات البيانية لها نفس الشكل ويوجد نقطة إلتفاف واحدة.
- الرسم البياني للمنحنى ص^{٢} = س مشابه للدالة
- ص = س^{٢} ولكنه عبارة عن انعكاس للدالة حول المستقيم ص = س (يمكن أن ينظر الطلاب إلى ذلك على أنه دوران باتجاه عقارب الساعة وبزاوية ٩٠° حول نقطة الأصل (٠ ، ٠)).
- التمثيلات البيانية جميعاً لها محور تناظر يمر بنقطة الإلتفاف.

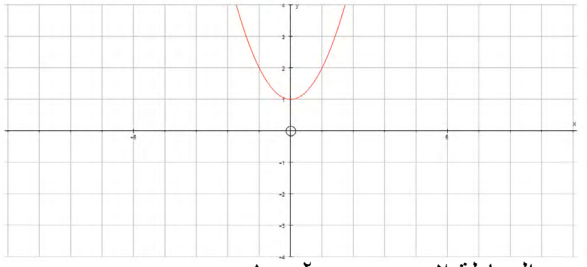
الشكل ١



المعادلة (١): ص = س^{٢}

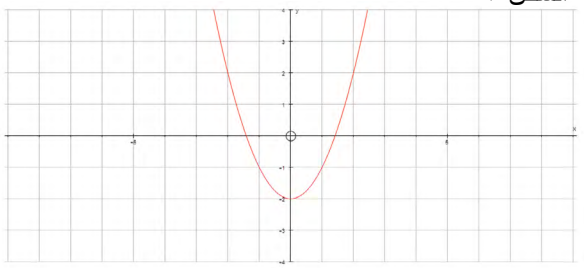


الشكل ٢



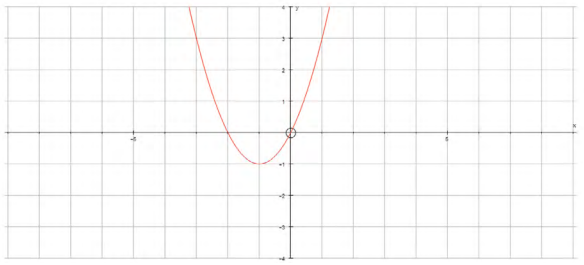
■ المعادلة ٢: ص = س^{٢} + ١

الشكل ٣



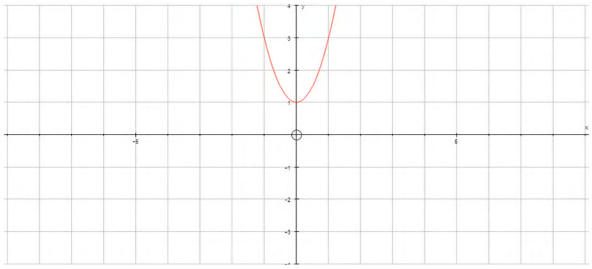
■ المعادلة ٣: ص = س^{٢} – ٢

الشكل ٤



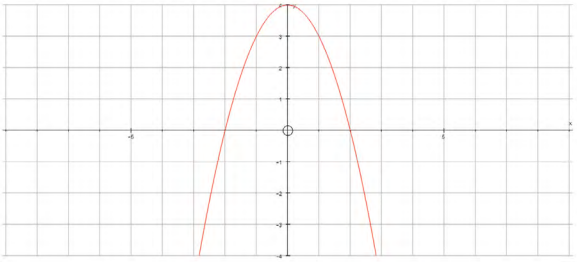
■ المعادلة ٤: ص = س^{٢} + ٢س

الشكل ٥



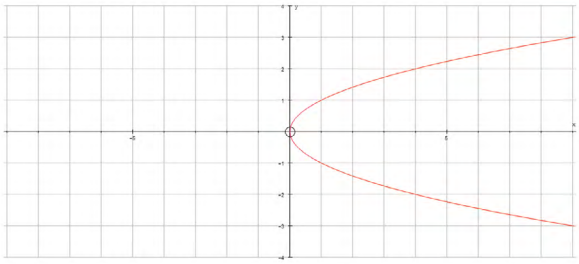
■ المعادلة ٥: ص = ٢ س^{٢} + ١

الشكل ٦



■ المعادلة ٦: ص = ٤ – س^{٢}

الشكل ٧



■ المعادلة ٧: ص^{٢} = س

محاور التناظر للأشكال السابقة هو:

١. ص = س^{٢} — س = ٠
٢. ص = س^{٢} + ١ — س = ٠
٣. ص = س^{٢} – ٢ — س = ٠
٤. ص = س^{٢} + ٢س — س = – ١
٥. ص = ٢ س^{٢} + ١ — س = ٠
٦. ص = ٤ – س^{٢} — س = ٠
٧. ص^{٢} = س — ص = ٠

جذور كثيرات الحدود هي كالتالي:

١. ص = س^{٢} — س = ٠ مكرر
٢. ص = س^{٢} + ١ — لا يوجد جذور حقيقية
٣. ص = س^{٢} – ٢ — س = $\pm\sqrt{٢}$
٤. ص = س^{٢} + ٢س — س = ٠، س = – ٢
٥. ص = ٢ س^{٢} + ١ — لا يوجد جذور حقيقية
٦. ص = ٤ – س^{٢} — س = ٢±

مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع
King Abdulaziz & his Companions Foundation for Giftedness & Creativity
موهبة

الآن نحتاج إلى إجراء مناقشة حول المعادلة ص^{٢} = س.
هل هي تمثل كثيرة حدود؟
ماهي أوجه التشابه و الإختلاف مع البقية؟
الصورة العامة لكثيرة الحدود هي
ص = أ$_{ن}$ س^{ن} + أ$_{ن-١}$ س$^{ن-١}$ + ... + أ.
(حيث ن هو عدد صحيح موجب).
لكي يتم كتابة ص^{٢} = س كدالة في س، يجب فصلها إلى جزئين مختلفين ومعرفين بشرط أن س > ٠ وهما :
د(س) = $\sqrt{س}$ لجميع قيم س > ٠
ر(س) = - $\sqrt{س}$ لجميع قيم س > ٠

السؤال الثاني
قم بإعطاء الفرصة ما أمكن للطلاب للعمل بأنفسهم على هذا السؤال . يمكنك توقع التالي:
إذا تقاطع التمثيل البياني مع المحور السيني فإن محور التناظر يكون واقعا في المنتصف بين الجذور.
(يمكنك تشجيع الطلاب على المقارنة مع القيمة $\frac{-ب}{٢أ}$.
محور التناظر للمنحنى ص = أ س^{٢} + ب س + جـ
هو س = $\frac{-ب}{٢أ}$)

- محور التناظر يمر بنقطة الإلتفاف.
(يمكنك الآن طرح الأسئلة لتثبيت معنى القيمة القصوى والصغرى).
- عندما لا يتقاطع المنحنى مع المحور السيني فإن محور التناظر يمر بنقطة الإلتفاف ويكون عمودياً على المستقيم المماس عند تلك النقطة.

الجزء التالي من هذا السؤال سوف يكون للتركيز على اختبار الفرضيات والتي ليس بالضرورة أن تكون صحيحة.
يجب حث الطلاب وتشجيعهم عند إختبار فرضياتهم على تطوير تلك الفرضيات بالإعتماد على النتائج المستخلصة من التمثيلات البيانية.
عند قيام الطلاب بتصميم اللوحة المطلوبة، يجب حثهم على استخدام أشكال بيانية ذات جودة عالية مع استخدام ترميزات تساعدهم على شرح استنتاجهم.

السؤال الثالث
يفضل دائماً استخدام أمثلة محلية لصورة نافورة ماء والتي تشكل قطع مكافئ ليتم إستبدالها بتلك المعطاة في كتاب الطالب.
تعتمد المعادلة المختارة من الطلاب على المقياس المستخدم وموقع نقطة الأصل. المحدودية في اختيار المعادلة يجب أن يشمل توضيحات حول الفرضيات المقترحة لتحديد مقياس إيجاد المنحنى الملائم لمسار الماء.

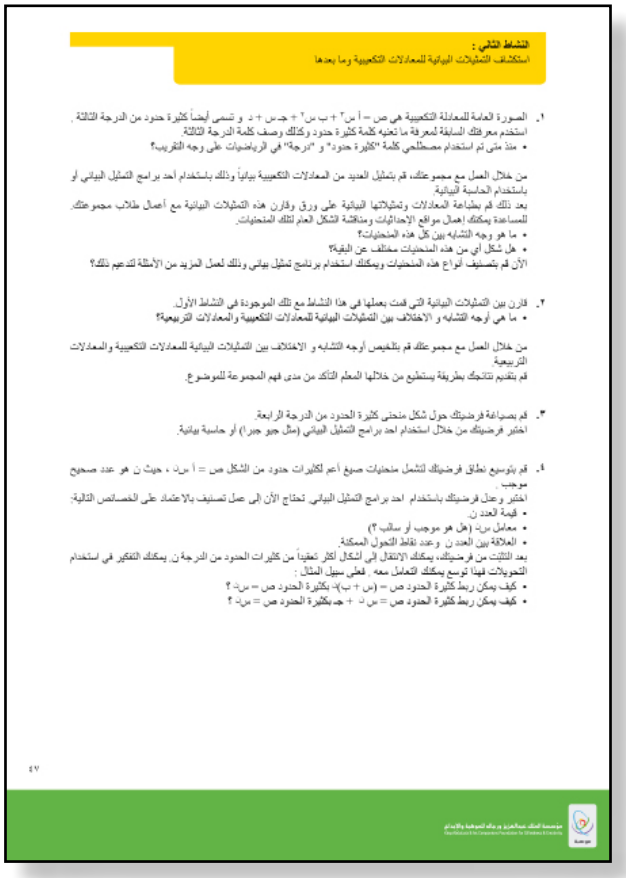
السؤال الرابع
يعطي هذا السؤال الفرصة لإستكشاف ما قام الإسلام به من إثراء للعالم في علوم الرياضيات.
فعلى سبيل المثال كلمة الجبر تُستخدم بنفس اللفظ في اللغة الإنجليزية وهي من أصل عربي.

فرص التقويم

تعطي الأسئلة الموجودة في هذا النشاط الفرصة للطلاب لتحديد الخصائص المختلفة للتمثيلات البيانية لمعادلات الدرجة الثانية وبيان أن جميع التمثيلات البيانية هي تحويلات للدالة
ص = س^{٢}.

- هل لدى الطلاب إنفتاح على البدائل عند تعاونهم كمجموعة لإيجاد الحل؟
- هل قام الطلاب بإيجاد تعميمات دقيقة حول خصائص الدول التربيعية وكذلك حول التمثيلات البيانية لها؟

"موهبة .. حيث تنتمي"


النشاط الثاني :
استكشاف التمثيلات البيانية للمعادلات التكعيبية وما بعدها

١. الصورة العامة للمعادلة التكعيبية هي ص = أ س٣ + ب س٢ + جـ س + د و تسمى أيضاً كثيرة حدود من الدرجة الثالثة.
استخدم معرفتك السابقة لمعرفة ما تعنيه كلمة كثيرة حدود وكذلك وصف كلمة الدرجة الثالثة
• منذ متى تم استخدام مصطلحي كلمة "كثيرة حدود" و "درجة" في الرياضيات على وجه التقريب؟

من خلال العمل مع مجموعتك، قم بتمثيل العديد من المعادلات التكعيبية بيانياً وذلك باستخدام أحد برامج التمثيل البياني أو باستخدام الحاسبة البيانية
بعد ذلك قم بطباعة المعادلات وتمثيلاتها البيانية على ورق وقارن هذه التمثيلات البيانية مع أعمال طلاب مجموعتك.
للمساعدة يمكنك إهمال مواقع الإحداثيات ومناقشة الشكل العام لتلك المنحنيات.
• ما هو وجه التشابه بين كل هذه المنحنيات؟
• هل شكل أي من هذه المنحنيات مختلف عن البقية؟
الآن قم بتصنيف أنواع هذه المنحنيات ويمكنك استخدام برنامج تمثيل بياني وذلك لعمل المزيد من الأمثلة لتدعيم ذلك؟

٢. قارن بين التمثيلات البيانية التي قمت بعملها في هذا النشاط مع تلك الموجودة في النشاط الأول.
• ما هي أوجه التشابه و الاختلاف بين التمثيلات البيانية للمعادلات التكعيبية والمعادلات التربيعية؟

من خلال العمل مع مجموعتك قم بتلخيص أوجه التشابه و الاختلاف بين التمثيلات البيانية للمعادلات التكعيبية والمعادلات التربيعية
قم بتقديم نتائجك بطريقة يستطيع من خلالها المعلم التأكد من مدى فهم المجموعة للموضوع.

٣. قم بصياغة فرضيتك حول شكل منحنى كثيرة الحدود من الدرجة الرابعة.
اختبر فرضيتك من خلال استخدام احد برامج التمثيل البياني (مثل جيو جبرا) أو حاسبة بيانية.

٤. قم بتوسيع نطاق فرضيتك لتشمل منحنيات صيغ أعم لكثيرات حدود من الشكل ص = أ س ن ، حيث ن هو عدد صحيح موجب
اختبر و عدل فرضيتك باستخدام احد برامج التمثيل البياني. تحتاج الآن إلى عمل تصنيف بالاعتماد على الخصائص التالية:
• قيمة العدد ن.
• معامل س ن (هل هو موجب أو سالب ؟)
• العلاقة بين العدد ن وعدد نقاط التحول الممكنة
بعد التثبت من فرضيتك، يمكنك الانتقال إلى أشكال أكثر تعقيداً من كثيرات الحدود من الدرجة ن. يمكنك التفكير في استخدام التحويلات فيما توسع يمكنك التعامل معه. فعلى سبيل المثال :
• كيف يمكن ربط كثيرة الحدود ص = (س + ب)ن بكثيرة الحدود ص = س ن ؟
• كيف يمكن ربط كثيرة الحدود ص = س ن + جـ بكثيرة الحدود ص = س ن ؟

٤٧

حول هذا النشاط

يقوم الطلاب في هذا النشاط بدراسة التمثيلات البيانية للمعادلات التكعيبية. وهذا يتطلب المقارنة وبيان أوجه الإختلاف بينها وبين التمثيلات البيانية للمعادلات التربيعية. من خلال دراسة الدوال الرباعية ومع بعض التوسع فإن الطلاب سيقومون بإيجاد الفرضيات التي توضح العلاقة التي تربط بين التمثيل البياني لكثيرات الحدود ودرجاتها.

خصائص الأداء المتقدم

- إنشاء واختبار الفرضيات.
- التوليف بين الشروحات المختلفة لوصف تركيب كثيرات الحدود بدقة وشرح ذلك للآخرين.

توصيات أسلوب التدريس

يجب توزيع الطلاب في مجموعات ثنائية أو مجموعات صغيرة مكونة من ٣ أو ٤ طلاب

إجابات الأسئلة.

السؤال الأول

قم بحث الطلاب على استكشاف مجموعة منوعة من التمثيلات البيانية، وإذا لزم الأمر، يمكنك طرح بعض الأسئلة لتوجّه تفكير الطلاب في أثناء البحث عن التمثيل البياني المناسب نحو منحنيات لها الخصائص الآتية:

- عدد نقاط الإلتفاف هو ٢.
- عدد نقاط السكون هو ١ (على سبيل المثال ص = س^{٣}).
- لا يوجد نقاط سكون ولكن يوجد نقطة إنعطاف (على سبيل المثال ص = س^{٣} + س^{٢} + ٣س + ١).
- معاملات س^{٣} موجبة وسالبة.
- يوجد جذر حقيقي واحد.
- يوجد جذرين حقيقيين (المنحنى يقطع المحور السيني مرة واحدة ويمسه مرة واحدة أيضاً).
- ثلاث جذور حقيقية.

جميع التمثيلات البيانية متناظرة حول نقطة إنعكاس وتوجد هذه النقطة في المنتصف بين نقطتي إلتفاف وتكون واقعة حيث يقطع المماس المنحنى.

قم بحث الطلاب على التاكد من ذلك بأن يقوموا إذا لزم الأمر، بطباعة تلك التمثيلات البيانية باستخدام ورق شفاف.

جميع التمثيلات البيانية لها المجال والمدى بين + ∞ و - ∞

السؤال الثاني

أوجه التشابه بين التمثيلات البيانية للدوال التربيعية والدوال التكعيبية:

- اكبر عدد من نقاط الإلتفاف هو أقل بواحد من درجة كثيرة الحدود.
- ميل المنحنيين يتزايد لقيم كبيرة موجبة وقيم كبيرة سالبة للمتغير س.

أوجه الإختلاف بين الرسوم البيانية للدوال التربيعية والدوال التكعيبية:

- الدوال التربيعية تحوي نقطة إلتفاف وحيدة، بينما الدوال التكعيبية تحوي نقطتين أو لا يوجد نقاط إلتفاف.
- الدوال التربيعية لها محور تناظر، بينما الدوال التكعيبية تحوي نقطة تناظر.
- من خلال اعتبار المجال هو الأعداد الحقيقية فإن المدى للدوال التكعيبية هو مجموعة الأعداد الحقيقية كلها، بينما الدوال التربيعية يكون مداها جزء من الأعداد الحقيقية.

السؤال الثالث

قبل البدء في دراسة كثيرات الحدود ذات درجات كبيرة، يجب التأكد من ملاحظة الطلاب بعض الفرضيات حول هذه الدوال قبل البدء في الإستكشاف معتمدين على ICT مثل جيوجبرا.

حاول حث الطلاب على العمل على العديد من الأمثلة لإستنتاج ما يلي:

- التمثيل البياني لدوال الدرجة الرابعة تحوي عدد ١ أو ٢ أو ٣ نقاط إلتفاف.
- ليس بالضرورة أن يكون لدوال الدرجة الرابعة محور تناظر.

السؤال الرابع

بالنسبة لدوال كثيرات الحدود فيفضل نصح الطلاب أن يبدأوا دراستهم بالنظر إلى التمثيل البياني للدالة ص = أ س^{ن} في حالة تزايد قيمة العدد الصحيح الموجب ن وكذلك لقيم مختلفة للمعامل أ.

هذه الدراسة ستؤدي إلى بعض الخصائص، ومنها:

- إذا كان الأس ن عدد زوجي فإن المنحنى لديه محور تناظر.
- إذا كان الأس ن عدد فردي فإن المنحنى لديه تناظر حول نقطة.

عند إجراء المزيد من التوسع حول الدالة فإن هذا سيزيد الأمر تعقيداً.

إذا قيّد الطلاب أنفسهم باستخدام التحويلات فمن الممكن أن يلاحظوا أن الشكل العام للتمثيل البياني والخصائص العامة سوف تبقى كما هي.

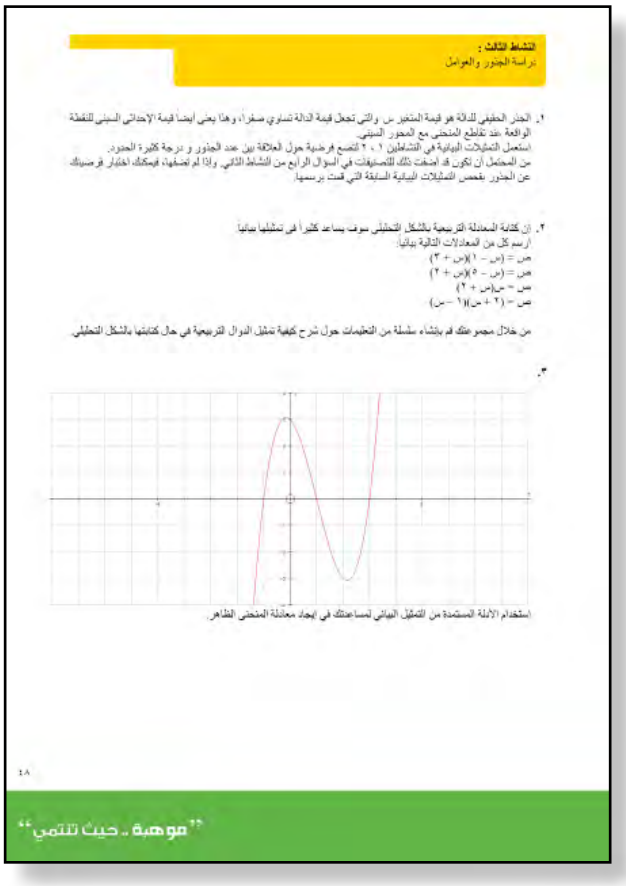
- ص = (س + ب)^{ن} هو إزاحة للدالة ص = س^{ن} بمقدار -ب وحدة في إتجاه الإحداثي السيني او باستخدام متجه الإزاحة $\begin{pmatrix} -ب \\ ٠ \end{pmatrix}$.

- ص = س^{ن} + جـ هو إزاحة للدالة ص = س^{ن} بمقدار جـ وحدة وبإتجاه الإحداثي الصادي أو باستخدام قيمة الإزاحة $\begin{pmatrix} ٠ \\ جـ \end{pmatrix}$

فرص التقويم

- هل قام الطلاب بدراسة متعمقة للبنية الرياضية من خلال إنشاء واختيار الفرضيات حول كل من الدوال التربيعية والتكعيبية ودوال الدرجة الرابعة؟
- هل أظهر الطلاب مدى الوضوح في فهم الفروقات في الشرح والوصف وبدقة ومن ثم قيامهم بشرح ذلك للآخرين؟

"موهبة .. حيث تنتمي"



حول هذا النشاط

يستكشف الطلاب في هذا النشاط العلاقة بين جذور معادلة ما والمعادلة في شكلها التحليلي وذلك بملاحظة نقاط تقاطع المنحنى مع الإحداثي السيني و مقارنته مع عوامل كثيرة الحدود.

ليس الهدف هنا هدر المزيد من الوقت في تحليل الدوال التربيعية والتكعيبية ولكن استخدام الإختبار عن طريق فك الأقواس سوف يكون مفيداً.

خصائص الأداء المتقدم

- ربط المعرفة المسبقة للتمثيل البياني لكثيرة الحدود بجذور المعادلات وكذلك بكتابة الدوال على شكل تحليلي.
- وضع الفرضيات المبنية على البراهين التي تم التحصّل عليها.

إجابات الأسئلة.

السؤال الأول

في هذا السؤال سوف يسترجع الطلاب بعض النتائج السابقة التي حصلوا عليها. أنظر إلى ملخصات الطلاب والتي تحوي:

- المعادلة التربيعية يمكن أن يكون لها جذرين حقيقيين مختلفين أو جذر حقيقي واحد مكرر أو لا يوجد جذور حقيقية.
- احتمالات عدد جذور الدوال التكعيبية هو: ١ ، ٢ (أحد الجذور مكرر) أو ٣ جذور حقيقية مختلفة.
- احتمالات عدد جذور الدوال من الدرجة الرابعة هو: ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، أو ٤ جذور حقيقية مختلفة.
- جميع كثيرات الحدود ذات الدرجة الفردية لها على الأقل جذر حقيقي واحد.

تأكد مدى فهمهم لتلك الحالات من خلال إنشاء تمثيل بياني يوضح الحالات السابقة.

مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع
King Abdulaziz & his Companions Foundation for Giftedness & Creativity
موهبة

السؤال الثاني

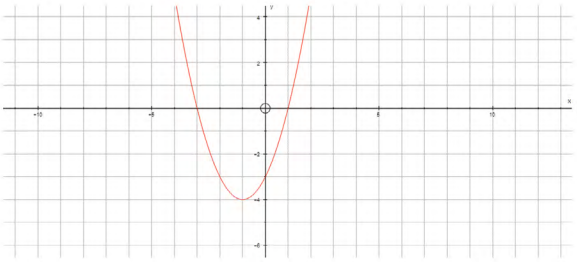
الهدف من هذا السؤال هو ليس التعرف على طريقة تحليل كثيرة حدود ولكن تطوير فهم الطلاب للعلاقة اللصيقة بين جذور المعادلات والعوامل لكثيرة حدود.

من خلال مناقشة الطلاب حول التمثيل البياني للدالة ص = (س + ٢) (س + ١)، توقع الإجابات التالية من الطلاب:

- المنحنى يتقاطع مع المحور السيني في النقطتين (-٢ ، ٠) و (-١ ، ٠). وذلك لأن قيمة الدالة هي صفر عند التعويض بالقيمتين س = -٢ و س = -١.
- المنحنى يتقاطع مع المحور الصادي عند النقطة (٠ ، ٢).
- التمثيل البياني للمنحنى هو قطع مكافئ ومن خلال التناظر نلاحظ أن القيمة الصغرى للدالة هي عندما س = - ١,٥ .

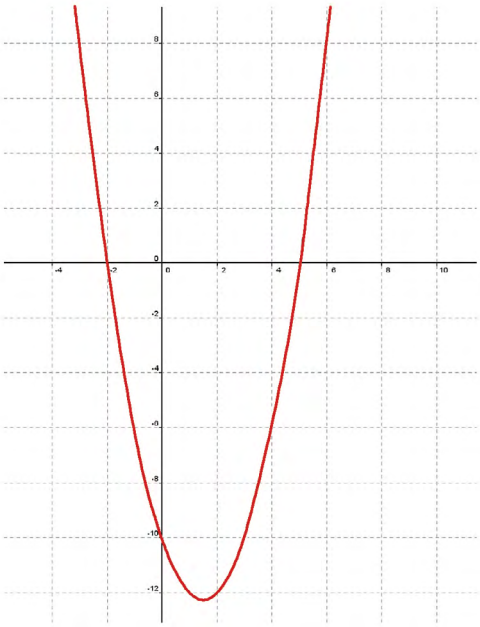
الرسوم البيانية التالية توضح هذه الخصائص:

الشكل ٨



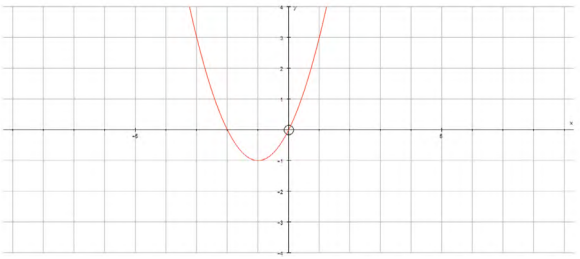
■ المعادلة ١: ص = (س – ١) (س + ٣)

الشكل ٩



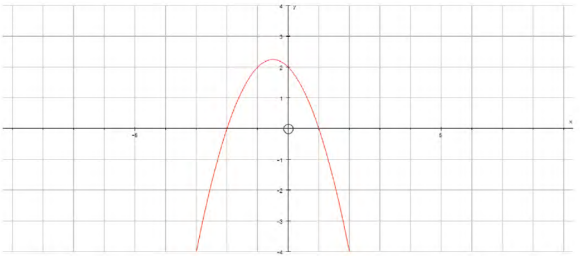
■ المعادلة ٢: ص = (س – ٥) (س + ٢)

الشكل ١٠



■ المعادلة ٣: ص = س (س + ٢)

الشكل ١١



■ المعادلة ٤: ص = (٢ + س) (١ – س)

تأكد من أن إجابات الطلاب تحدد تقاطع المنحنيات مع المحاور الإحداثية وكذلك الشكل العام للمنحنى.

السؤال الثالث

يجب النظر إلى هذا السؤال على أنه تدريب لهم لملاحظة مدى فهمهم للعلاقة بين العوامل والجذور. معادلة المنحنى المعطى هي

ص = (س + ١)(س – ١)(س – ٣).

السؤال الرابع

يجب أن يبني مجموعة الطلاب تخمينهم حول كثيرة الحدود المجهولة على التعميمات التي تم إنشاؤها في الأنشطة السابقة من هذه الوحدة.

يعتبر هذا السؤال فرصة جيدة للمعلم لكي يراقب ويأخذ ملاحظات حول مقدرة الطلاب على استخدام التعميمات التي كونوها سابقاً.

من شأن الجلسة العامة أن توفر الفرصة لإجراء مناقشة منطقية بين الطلاب لتوضيح أي من كثيرات الحدود يتم استثناؤها وبالتالي تضييق نطاق البحث عن كثيرة الحدود المطلوبة.

فرص التقويم

- هل قام الطلاب بإنشاء روابط بين معرفتهم المسبقة للتمثيل البياني لكثيرات الحدود وجذور المعادلات وكذلك الشكل التحليلي لتلك الدوال؟
- هل لدى الطلاب المقدرة على إنشاء فرضيات مبنية على الأدلة التي تحصلوا عليها؟

"موهبة .. حيث تنتمي"

الوحدة السابعة

التحليل إلى العوامل والمعادلات التربيعية

مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع
King Abdulaziz & his Companions Foundation for Giftedness & Creativity
موهبة

نظرة عامة

يقوم الطلاب في هذه الوحدة بدراسة العلاقة بين عوامل العبارة التربيعية وحلول المعادلة المرتبطة بها حيث يقوم الطلاب بدمج فهمهم لطريقة إكمال المربع واستخدامها لحساب مجموع الجذور. كذلك سيبحث الطلاب في خصائص القطع المكافئ ويبدؤون في التعرّف على القطوع المخروطية.

الأهداف التعلمية للوحدة

- فهم العلاقة بين جذور المعادلة التربيعية وعوامل العبارة الجبرية المرتبطة بها.
- استكشاف بعض الخصائص الهندسية للقطع المكافئ.
- استكشاف ربط القطع المكافئ بعائلة من المنحنيات معروفة باسم القطوع المخروطية.

المعرفة السابقة

يجب أن يكون الطلاب على معرفة بكيفية ضرب الأقواس وجمع الحدود المتشابهة

خصائص الأداء المتقدم

القيم و الإتجاهات و السمات

- الإبداع (النشاط الرابع)

المهارات المتقدمة

- التفكير المنطقي والاستدلال (النشاط الرابع)
- الطلاقة والدقة (النشاط الأول)
- القدرات فوق المعرفية (النشاطان الثاني، والثالث)

المعرفة و الفهم المتقدمان

- وضوح المفاهيم (النشاط الأول)
- إقامة الصلات (النشاط الرابع)
- استيعاب الأفكار الكبرى (النشاط الثاني)

الخطة الزمنية

خمس إلى ست ساعات تقريباً.

المصادر

- استخدام أحد برامج التمثيل البياني.
- ورقة عمل المصادر رقم (١).
- مخروط مصنوع من الصلصال.
- مسطرة ومجموعة رسم هندسية.
- شريط لاصق.
- دبابيس.

حول هذا النشاط

يدعو هذا النشاط الطلاب إلى فهم العوامل الجبرية وكذلك تقديم فكرة المتطابقات.
سوف يتم استخدام الرمزين ≡ و ≠.
السؤال الأول يحتوي على تحد للطلاب لإستخدام الرموز الملائمة للصيغة المعطاة.

خصائص الأداء المتقدم

- التفريق بين المعادلة والمتطابقة والمقدرة على عمل التصنيفات بناءً على ذلك.
- تطوير الدقة في تحديد المعاملات الخطية للمعادلة التربيعية.

توصيات أسلوب التدريس

هذا النشاط ملائم للعمل ضمن مجموعات تحوي كل منها أربع طلاب.

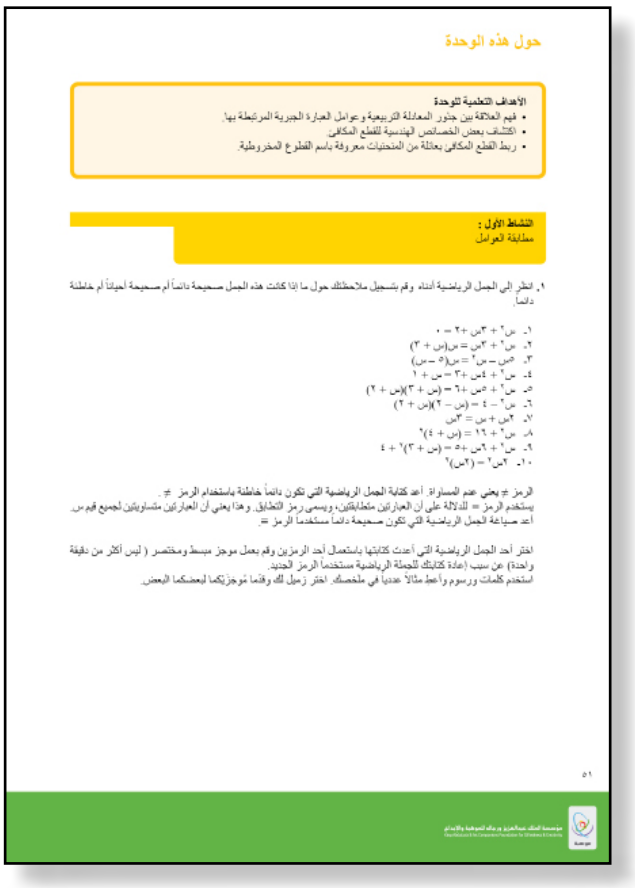
إجابات الأسئلة

السؤال الأول

يجب على الطلاب مناقشة كل عبارة جبرية ويمكنهم التأكد عن طريق تعويض بعض القيم للمتغير س أو بضرب الأقواس وفكها أو بحل تلك المعادلات.

١. $س^{٢} + ٣س + ٢ = ٠$ صحيحة أحياناً
٢. $س^{٢} + ٣س = س(س + ٣)$ صحيحة دائماً
٣. $٥س - س^{٢} = س(٥ - س)$ صحيحة دائماً
٤. $س^{٢} + ٤س + ٣ = س + ١$ صحيحة أحياناً
٥. $س^{٢} + ٥س + ٦ = (س + ٣)(س + ٢)$ صحيحة دائماً
٦. $س^{٢} - ٤ = (س - ٢)(س + ٢)$ صحيحة دائماً
٧. $٢س + س = ٣س$ صحيحة دائماً
٨. $س^{٢} + ١٦ = (س + ٤)^{٢}$ صحيحة أحياناً
٩. $س^{٢} + ٦س + ٥ = (س + ٣)^{٢} + ٤$ خاطئة دائماً
١٠. $٢س^{٢} = (٢س)^{٢}$ صحيحة أحياناً

ينبغي إعطاء بعض الوقت للحديث عن المعادلتين الآتيتين
$س^{٢} + ١٦ = (س + ٤)^{٢}$ ، $٢س^{٢} = (٢س)^{٢}$.
حيث عادةً ما يفترض الطلاب أن هاتين المعادلتين صحيحتين ولكنهما في الغالب غير صحيحتين.
في الحقيقة كلا المعادلتين لهما الحل س = ٠ لذا يجب على الطلاب مراعاة الدقة خلال مناقشاتهم.


حول هذه الوحدة

الأهداف التعليمية للوحدة
- فهم العلاقة بين جذور المعادلة التربيعية وعوامل العبارة الجبرية المرتبطة بها.
- اكتشاف بعض الخصائص الهندسية للقطع المكافئ.
- ربط القطع المكافئ بعائلة من المنحنيات معروفة باسم القطوع المخروطية.

النشاط الأول :
مطابقة العوامل

١. انظر إلى الجمل الرياضية أدناه. وقم بتسجيل ملاحظاتك حول ما إذا كانت هذه الجمل صحيحة دائماً أم صحيحة أحياناً أم خاطئة دائماً

١. $س^{٢} + ٣س + ٢ = ٠$
٢. $س^{٢} + ٣س = س(س + ٣)$
٣. $٥س - س^{٢} = س(٥ - س)$
٤. $س^{٢} + ٤س + ٣ = س + ١$
٥. $س^{٢} + ٥س + ٦ = (س + ٣)(س + ٢)$
٦. $س^{٢} - ٤ = (س - ٢)(س + ٢)$
٧. $٢س + س = ٣س$
٨. $س^{٢} + ١٦ = (س + ٤)^{٢}$
٩. $س^{٢} + ٦س + ٥ = (س + ٣)^{٢} + ٤$
١٠. $٢س^{٢} = (٢س)^{٢}$

الرمز ≠ يعني عدم المساواة. أعد كتابة الجمل الرياضية التي تكون دائماً خاطئة باستخدام الرمز ≠.
يستخدم الرمز ≡ للدلالة على أن العبارتين متطابقتين، ويسمى رمز التطابق. وهذا يعني أن العبارتين متساويتين لجميع قيم س.
أعد صياغة الجمل الرياضية التي تكون صحيحة دائماً مستخدماً الرمز ≡.

اختر أحد الجمل الرياضية التي أعدت كتابتها باستعمال أحد الرمزين وقم بعمل موجز مبسط ومختصر (ليس أكثر من دقيقة واحدة) عن سبب (أعادة كتابتك للجملة الرياضية مستخدماً الرمز الجديد.
استخدم كلمات ورسوم وأعط مثالاً عدديا في ملخصك. اختر زميل لك وقدما موجزيكما لبعضكما البعض.

٥١

مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع
King Abdulaziz & his Companions Foundation for Giftedness & Creativity
موهبة

١. $س^{٢} + ٣س + ٢ = ٠$
٢. $س^{٢} + ٣س \equiv س(س + ٣)$
٣. $٥س - س^{٢} \equiv س(٥ - س)$
٤. $س^{٢} + ٤س + ٣ = (س + ١)$
٥. $س^{٢} + ٥س + ٦ \equiv (س + ٣)(س + ٢)$
٦. $س^{٢} - ٤ \equiv (س - ٢)(س + ٢)$
٧. $٢س + س \equiv ٣س$
٨. $س^{٢} + ١٦ = (س + ٤)^{٢}$
٩. $س^{٢} + ٦س + ٥ \neq (س + ٣)^{٢} + ٤$
١٠. $٢س^{٢} = (٢س)^{٢}$

السؤال الثاني

كل مجموعة صغيرة من الطلاب بحاجة إلى بطاقات مقطعة والموجودة في ورقة عمل المصادر رقم (١).

يعتبر هذا السؤال المنطوي على التنقل بين البطاقات والربط بينها مهم جداً حيث سيساعدهم على تنمية مهاراتهم ومناقشاتهم الجماعية وكذلك سيساعدهم على الاستكشاف من خلال طرح الأسئلة "لماذا ولماذا لا تكون" والمقارنات.

ويمكن للطلاب البدء في العمل على بعض العوامل المشتركة والمعروفة لديهم ومن ثم يتم العمل على أزواج صعبة من العوامل.

قم بإعطاء الطلاب بعض الدعم وحاول البحث عن الأخطاء الممكنة، فعلى سبيل المثال:

$(س + ٥)^{٢} = س^{٢} + ٢٥$ وكذلك

$(س - ٥)^{٢} = س^{٢} - ٢٥$.

وظيفة الطالب المراقب هي الاستماع للنقاش وتلخيص كيف يتعامل الطلاب مع المسالة للوصول للحل.

المجموعة الكاملة للإجابات هي:

$س^{٢} + ٦س \equiv س(س + ٦)$
$٥س - س^{٢} = س(٥ - س)$
$س^{٢} + ٥س + ٦ = (س + ٣)(س + ٢)$
$س^{٢} + ١٠١س + ١٠٠ = (س + ١٠٠)(س + ١)$
$س^{٢} + ٥س - ٢٤ = (س + ٨)(س - ٣)$
$س^{٢} - ١٦ = (س + ٤)(س - ٤)$
$س^{٢} - ٢ = (س + \sqrt{٢})(س - \sqrt{٢})$
$س^{٢} - ١ = (س + ١)(س - ١)$
$س^{٢} + ٢س + ١ = (س + ١)(س + ١)$
$س^{٢} - ٢س + ١ = (س - ١)(س - ١)$
$١٠ - ٣س - س^{٢} = (٥ + س)(٢ - س)$
$س^{٢} + ٢٥$ لا يوجد لها معاملات خطية
$س^{٢} - ٢٥ \neq (س - ٥)^{٢}$
$٤س^{٢} + ١٦س + ١٥ = (٢س + ٣)(٢س + ٥)$

فرص التقويم:

يعتبر هذا النشاط فرصة جيدة للطلاب لفهم إشارة المساواة وكذلك المقدرة على التعامل مع العبارات الجبرية المشتملة على العوامل الخطية.

من خلال عمل الطلاب على ترتيب البطاقات خذ الملاحظات حول الطلاب الذين يواجهون صعوبات لكي تقوم بمساعدتهم عند الضرورة للعمل على إزالتها.

تعتبر طريقة ترتيب البطاقات طريقة فعّالة جداً لتقييم كل مجموعة بشكل سريع.

- هل يستطيع الطلاب التفريق بين المعادلة و المتطابقة والتحقق من تلك التصنيفات؟
- هل يستطيع الطلاب وبطلاقة تحديد العوامل الخطية للمعادلات التربيعيّة؟

"موهبة .. حيث تنتمي"

حول هذا النشاط

يعزز الطلاب في هذا النشاط فهمهم لكيفية إيجاد جذور معادلة تربيعية مكتوبة على الصورة التحليلية.
مع التنبيه على فهمهم للصفر والفرصة لإستكشاف ذلك ودراسته تاريخياً.

خصائص الأداء المتقدم

- الإمتنان إلى الخلفية التاريخية لجذور كثيرات الحدود في الرياضيات.
- استخدام المناقشات الجماعية لصقل الطرق المستخدمة وشحذ عملية التفكير.

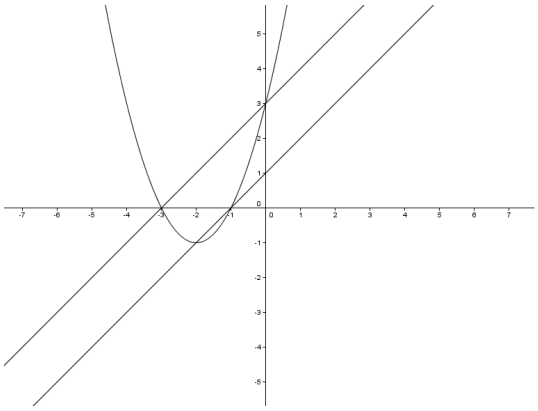
توصيات أسلوب التدريس

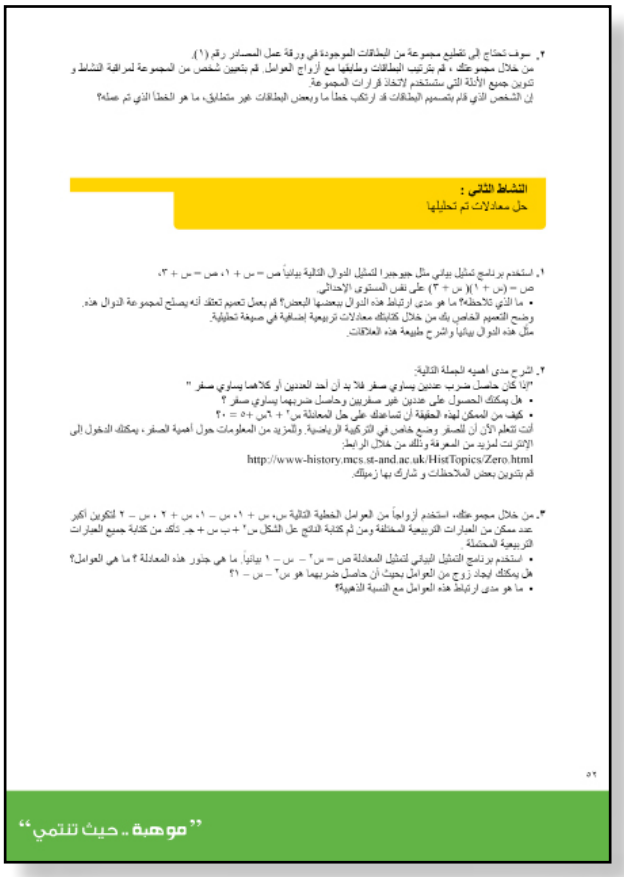
يُوصى بتقسيم الطلاب إلى مجموعات كل منها مُكوّنة من أربع طلاب.

إجابات الأسئلة

السؤال الأول

يعطي هذا السؤال الطلاب الفرصة كي يفكروا بصورة مختلفة حول العلاقة بين الدوال التربيعية والعوامل الخطية المرتبطة بها.
يجب أن يكون التمثيل البياني على الشكل التالي:





النشاط الثاني :
حل معادلات تم تحليلها

١. استخدم برنامج تمثيل بياني مثل جيوجبرا لتمثيل الدوال التالية بيانياً ص = س + ١، ص = س + ٣،
ص = (س + ١)(س + ٣) على نفس المستوى الإحداثي.
• ما الذي تلاحظه؟ ما هو مدى ارتباط هذه الدوال ببعضها البعض؟ قم بعمل تعميم تعتقد أنه يصلح لمجموعة الدوال هذه.
وضح التعميم الخاص بك من خلال كتابتك معادلات تربيعية إضافية في صيغة تحليلية.
مثل هذه الدوال بيانيا و اشرح طبيعة هذه العلاقات.

٢. اشرح مدى أهمية الجملة التالية:
"إذا كان حاصل ضرب عددين يساوي صفر فلا بد أن أحد العددين أو كلاهما يساوي صفر "
• هل يمكنك الحصول على عددين غير صفريين وحاصل ضربهما يساوي صفر ؟
• كيف من الممكن لهذه الحقيقة أن تساعدك على حل المعادلة من٢ + ٦س +٥ = ٢٠
أنت تتعلم الآن أن للصفر وضع خاص في التركيبة الرياضية. وللمزيد من المعلومات حول أهمية الصفر، يمكنك الدخول إلى الإنترنت لمزيد من المعرفة وذلك من خلال الرابط:
http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/HistTopics/Zero.html
قم بتدوين بعض الملاحظات و شارك بها زميلك.

٣. من خلال مجموعتك، استخدم أزواجاً من العوامل الخطية التالية س، س + ١، س – ١، س + ٢ ، س – ٢ لتكوين أكبر عدد ممكن من العبارات التربيعية المختلفة ومن ثم كتابة الناتج على الشكل س٢ + ب س + جـ. تأكد من كتابة جميع العبارات التربيعية المحتملة
• استخدم برنامج التمثيل البياني لتمثيل المعادلة ص = س٢ – س – ١ بيانياً. ما هي جذور هذه المعادلة ؟ ما هي العوامل؟
هل يمكنك ايجاد زوج من العوامل بحيث أن حاصل ضربهما هو س٢ – س – ١؟
• ما هو مدى ارتباط هذه العوامل مع النسبة الذهبية؟

٥٢

"موهبة .. حيث تنتمي"

مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع
King Abdulaziz & his Companions Foundation for Giftedness & Creativity
موهبة

من المهم جداً أن يصقل الطلاب مهاراتهم في تمثيل الدوال بيانياً وإظهار الخصائص الرئيسية للمستقيمات والمنحنيات الأساسية وتقاطعها مع المحورين الإحداثيين.

السؤال الثاني

١. "إذا كان حاصل ضرب عددين هو صفر، فلا بد أن أحدهما هو صفر" على الأقل.
على الطلاب ان يستوعبوا أن الصفر هو الحالة الخاصة والتي يمكن النظر إليها عند ضرب عددين.

٢. كيف يمكن تطبيق الجملة السابقة لحل المعادلة
س^{٢} + ٦س + ٥ = ٠؟
تعتبر هذه الإستراتيجية بالغة الأهمية وذلك نظراً لإستخدامها في إيجاد جذور المعادلات.
يمكنك توقع أن الطلاب قد فهموا هذه الطريقة وأن يقوموا بشرح المنطق في ذلك بكل وضوح.
هذا سوف يساعد الطلاب على إدراك أسباب الحاجة إلى إعادة ترتيب المعادلة
س^{٢} +٦س = -٥ لكي يتم إيجاد حل لها. كما ومن الممكن أن يلاحظ الطلاب أن الصفر ليس لديه نظير ضربي وبالتالي لا يمكن القسمة عليه.
إن قسمة المعادلة على س سوف يؤدي إلى ضياع بعض الحلول للمعادلة، فعلى سبيل المثال عند قسمة طرفي المعادلة س^{٢} = ٢س على س سوف يعطينا الحل س = ٢ وهذا يعني أننا فقدنا الحل الآخر وهو س = ٠.

٣. يعتبر الرابط الإلكتروني المعطى في كتاب الطالب مرجع جيد لهم لكي يبدؤا باستكشاف ما قام به المسلمون من إبداع في الرياضيات، هذا وسيكون من المفيد كذلك الإطلاع على إسهامات الحضارات السابقة التي انتشرت عبر العالم.
http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/HistTopics/Zero.html

السؤال الثالث

المجموعة الكاملة لجميع العبارات المحتملة معطاة في الجدول التالي:

	س	س + ١	س – ١	س + ٢	س – ٢
س	س٢	س٢ + س	س٢ – س	س^{٢} + ٢س	س^{٢} – ٢س
س + ١		س٢ +٢س + ١	س^{٢} – ١	س٢ +٣س + ٢	س^{٢} – س – ٢
س – ١			س^{٢} – ٢س + ١	س^{٢}+س– ٢	**س٢ – ٣س + ٢**
س + ٢				**س٢ +٤س + ٤**	س٢ – ٤
س – ٢					**س٢ – ٤س + ٤**

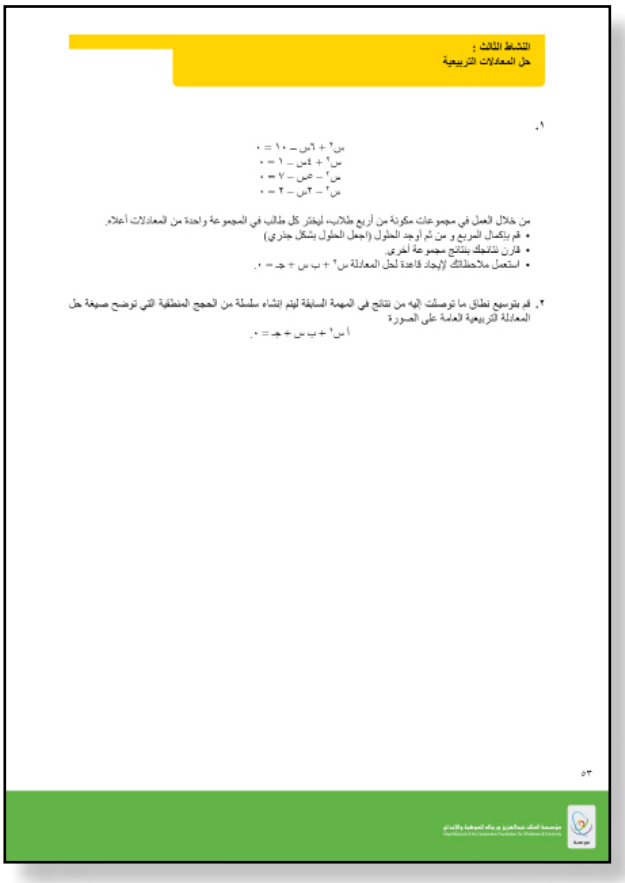
إن وجود س كعامل خطي مهم جداً. من المحتمل أن لا يدرك الطلاب كيفية حل المعادلة أ س^{٢} + ب س = ٠ إذا لم يلاحظوا وجود عامل خطي محتمل .
إن الجدول أعلاه يبين أن الحل بطريقة منظّمة سوف يؤدي إلى فهم السؤال تماماً.
قم بحث المجموعات للتفكير في كيفية تحديد نهج معين لحل هذا السؤال بأكبر قدر من الكفاءة.
إن إيجاد الحل للمعادلة س^{٢} – س – ١ =٠ سوف يعطي الفرصة للطلاب لدراسة النسبة الذهبية.
من المحتمل أن بعض الطلاب قد قرأ عن هذه النسبة في الصف الثاني متوسط، في الوحدة الرابعة تحت عنوان التناسب، ويمكنك الإطلاع على دليل المعلم للصف الثاني المتوسط في الوحدة الرابعة.
معظم الطلاب بحاجة إلى المساعدة في حل هذه المعادلة.
من الممكن تذكيرهم باستخدام طريقة إكمال المربع وكيفية ارتباط حلول المعادلة التربيعية بالشكل التحليلي لها.

فرص التقويم

يعطي هذا النشاط الفرصة للطلاب للتأكد من مقدرة الطلاب على ضرب الأقواس بسرعة وبدقة تامة وكذلك معرفتهم باهمية معرفة حلول كثيرات الحدود التي على الشكل د(س) = ٠.

- هل أظهر الطلاب إهتماماً بالناحية التاريخية للجذور؟
- هل ساعد مثال "تاريخ الصفر" الطلاب على تقدير الرياضيات والنظر إليها على أنها بنية إبداعية بدلاً من أن تكون هيئة ثابتة من المعرفة لا تتغيّر؟

"موهبة .. حيث تنتمي"


النشاط الثالث :
حل المعادلات التربيعية

١.

من٢ + ٦من – ١٠ = ٠
من٢ + ٤من – ١ = ٠
من٢ – ٥من – ٧ = ٠
من٢ – ٢من – ٢ = ٠

من خلال العمل في مجموعات مكونة من أربع طلاب، ليختار كل طالب في المجموعة واحدة من المعادلات أعلاه.
- قم بإكمال المربع و من ثم أوجد الحلول (أجعل الحلول بشكل جذري)
- قارن نتائجك بنتائج مجموعة أخرى.
- استعمل ملاحظاتك لإيجاد قاعدة لحل المعادلة س٢ + ب س + جـ = ٠.

٢. قم بتوسيع نطاق ما توصلت إليه من نتائج في المهمة السابقة ليتم انشاء سلسلة من الحجج المنطقية التي توضح صيغة حل المعادلة التربيعية العامة على الصورة

أ س٢ + ب س + جـ = ٠.

٥٣

مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع
King Abdulaziz & his Companions Foundation for Giftedness & Creativity

حول هذا النشاط

في هذا النشاط يعزز الطلاب قدرتهم على حل المعادلات التربيعية من خلال طريقة إكمال المربع ومن ثم استخدام هذه الإستراتيجية في إيجاد الصيغة العامة لحل المعادلات التربيعية.

خصائص الأداء المتقدم

- استخدام طريقة إكمال المربع لتطوير برهان جبري للقانون العام.
- استخدام المناقشات الجماعية للتفكيرفي طرق الحل وصقل عملية التفكير.

توصيات أسلوب التدريس

يُوصى بالعمل الجماعي من خلال مجموعات كل منها مكون من ٤ طلاب.

إجابات الأسئلة

السؤال الأول

الهدف من هذا السؤال هو التاكد من إدراك الطلاب ان جميع المعادلات التربيعية يمكن إيجاد الحل لها (ليس بالضرورة ان يكون الحل أعداداً حقيقية) وأن على الطلاب تحديد الطريقة المناسبة لذلك مثل طريقة التحليل ما أمكن ذلك أو إكمال المربع إذا كان هناك حاجة لذلك.

القانون العام لحل المعادلة التربيعية

أس٢ + ب س + جـ = ٠ هي

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ جـ}}{٢أ}$$

ويمكن الحصول عليها عن طريق إكمال المربع للمعادلة التربيعية.

من الممكن أن الطلاب الموهوبين لديهم القدرة على إكتشاف ذلك بأنفسهم. الحلول والأشكال التحليلية هي كالتالي:

س٢ + ٦س – ١٠ = ٠ ==> (س + ٣)٢ – ٩ – ١٠ = ٠
==> س = -٣ ± √١٩

س٢ + ٤س – ١ = ٠ ==> (س + ٢)٢ – ٤ – ١ = ٠
==> س = -٢ ± √٥

س٢ - ٥س – ٧ = ٠ ==> (س – ٢,٥)٢ – ٦,٢٥ – ٧ = ٠
==> س = ٢,٥ ± √١٣,٢٥

س٢ - ٢س – ٢ = ٠ ==> (س - ١)٢ – ١ – ٢ = ٠
==> س = ١ ± √٣

القانون العام لحل المعادلة س٢ + ب س + جـ = ٠ هي

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ جـ}}{٢}$$

السؤال الثاني

يوضح هذا السؤال للطلاب أن القانون العام للمعادلة التربيعية

$$س = \frac{- ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ جـ}}{٢ أ}$$

ليست إلاّ نتيجة لإستخدام طريقة إكمال المربع للمعادلة

$أس^{٢} + ب س + جـ = ٠$

فرص التقويم

يعتبر هذا النشاط فرصة جيدة لاختبار مدة فهم الطلاب لطريقة إكمال المربع واستخدام تلك الطريقة بطلاقة.

- هل لدى الطلاب المقدرة على إشتقاق القانون العام لحل معادلة تربيعية؟

"موهبة .. حيث تنتمي"

حول هذا النشاط

هذا النشاط يركز على بعض الخصائص الهندسية للقطع المكافئ.

خصائص الأداء المتقدم

- استخدام التفكير المنطقي والإبداعي في عمل تطبيق عملي على القطع المكافئ.
- الربط بين المجالات المختلفة في الرياضيات مثل الربط بين الجبر والهندسة.

توصيات أسلوب التدريس

مجموعات مكونة من أربع طلاب.

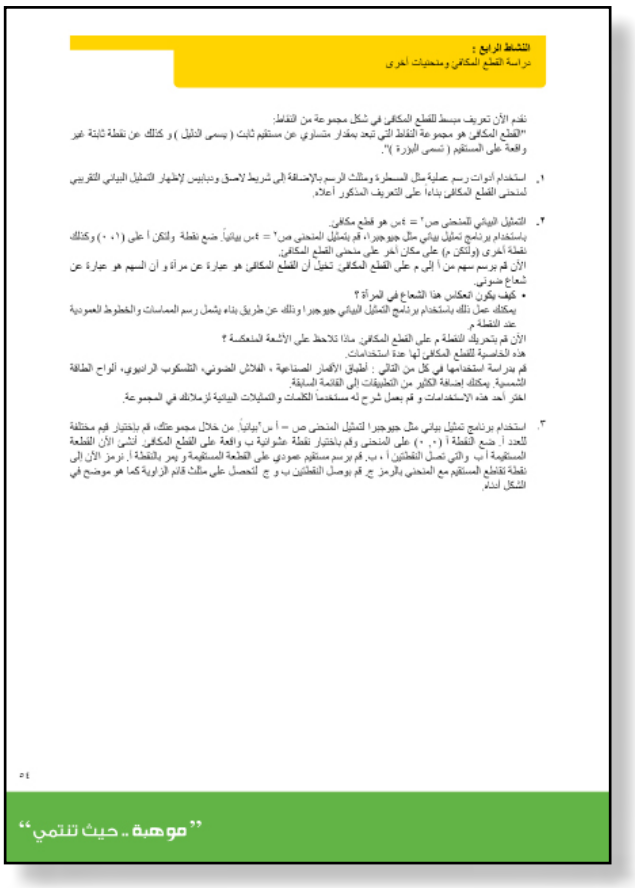
إجابات الأسئلة

السؤال الأول

يجب التأكد من معرفة الطلاب بالمسافة العمودية بين المنحنى والمستقيم (ويسمى الدليل).
من الضروري التأكد من أن يقوم الطلاب بقياس ورسم عدد كاف من النقاط لرؤية شكل القطع المكافئ وهذا سوف يعزز مدى فهمهم لمجموعة النقاط .

السؤال الثاني

بؤرة للقطع المكافئ ص^{٢} = ٤أ س هي (أ ، ٠).
تأكد من أن الطلاب قد قاموا بسحب النقطة على القطع المكافئ بشكل كافي لتقدير أن الأشعة تكون دائماً موازية للمحور الصادي.
أسهل طريقة لإنشاء الإنعكاس هي عن طريق إنشاء مماس وعمودي عليه عند النقطة على المنحنى ومن ثم عكس الشعاع بطريقة عمودية.


النشاط الرابع :
دراسة القطع المكافئ ومنحنيات أخرى

نقدم الآن تعريف مبسط للقطع المكافئ في شكل مجموعة من النقاط:
"القطع المكافئ هو مجموعة النقاط التي تبعد بمقدار متساوي عن مستقيم ثابت (يسمى الدليل) و كذلك عن نقطة ثابتة غير واقعة على المستقيم (تسمى البؤرة)".

١. استخدام أدوات رسم عملية مثل المسطرة ومثلث الرسم بالإضافة إلى شريط لاصق ودبابيس لإظهار التمثيل البياني التقريبي لمنحنى القطع المكافئ بناءاً على التعريف المذكور أعلاه.

٢. التمثيل البياني للمنحنى ص^{٢} = ٤س هو قطع مكافئ.
باستخدام برنامج تمثيل بياني مثل جيوجبرا، قم بتمثيل المنحنى ص^{٢} = ٤س بيانياً. ضع نقطة ولتكن أ على (٠،١) وكذلك نقطة أخرى (ولتكن م) على مكان آخر على منحنى القطع المكافئ.
الآن قم برسم سهم من أ إلى م على القطع المكافئ. تخيل أن القطع المكافئ هو عبارة عن مرآة و أن السهم هو عبارة عن شعاع ضوئي.
• كيف يكون انعكاس هذا الشعاع في المرآة ؟
يمكنك عمل ذلك باستخدام برنامج التمثيل البياني جيوجبرا وذلك عن طريق بناء يشمل رسم المماسات والخطوط العمودية عند النقطة م.
الآن قم بتحريك النقطة م على القطع المكافئ. ماذا تلاحظ على الأشعة المنعكسة ؟
هذه الخاصية للقطع المكافئ لها عدة استخدامات.
قم بدراسة استخدامها في كل من التالي : أطباق الأقمار الصناعية ، الفلاش الضوئي، التلسكوب الراديوي، ألواح الطاقة الشمسية. يمكنك إضافة الكثير من التطبيقات إلى القائمة السابقة.
اختر أحد هذه الاستخدامات و قم بعمل شرح له مستخدماً الكلمات و التمثيلات البيانية لزملائك في المجموعة.

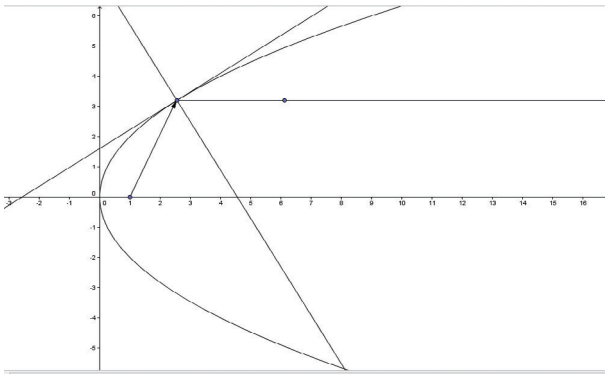
٣. استخدام برنامج تمثيل بياني مثل جيوجبرا لتمثيل المنحنى ص = أ س^{٢} بيانياً من خلال مجموعتك، قم باختيار قيم مختلفة للعدد أ. ضع النقطة أ (٠، ٠) على المنحنى وقم باختيار نقطة عشوائية ب واقعة على القطع المكافئ. أنشئ الآن القطعة المستقيمة أ ب والتي تصل النقطتين أ ، ب. قم برسم مستقيم عمودي على القطعة المستقيمة و يمر بالنقطة أ. نرمز الآن إلى نقطة تقاطع المستقيم مع المنحنى بالرمز ج. قم بوصل النقطتين ب و ج لتحصل على مثلث قائم الزاوية كما هو موضح في الشكل أدناه.

٤

"موهبة .. حيث تنتمي"

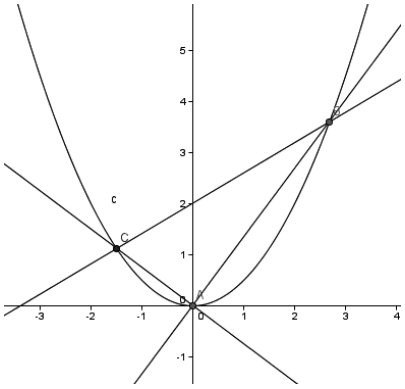
مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع
King Abdulaziz & his Companions Foundation for Giftedness & Creativity
موهبة

الشكل التالي يوضح هذه العملية:



هناك العديد من التطبيقات العملية والتي توضح أهمية القطع المكافئ.
فعلى سبيل المثال استخدام الطاقة الشمسية الناتجة من إنعكاس الأشعة على مرايا على شكل مجسّم قطع مكافئ دوراني مع وجود برج مياه واقع في البؤرة ليتم تسخين الماء فيه ومن ثم غليانه ليتم استخدام هذا البخار بعد ذلك في التربينات البخارية التي تنتج الكهرباء.
لذلك فمن الممكن أن تصبح الدول الموجودة في شمال أفريقيا وفي الجزيرة العربية من المصدرين الأساسيين للكهرباء.
معظم الطلاب سيصبحون على دراية بالصحون اللاقطة، ويمكنهم أخذ بعض الصور الرقمية لتلك الصحون والتحقق من أن المستقبل لتلك الصحون موجود في موقع البؤرة.

السؤال الثالث



من الممكن الإكتفاء في هذا السؤال بأن يأتي الطلاب بفرضية واحدة، فعلى سبيل المثال "في المنحنى

ص = أس^{٢} يمر الوتر عبر النقطة (٠، $\frac{١}{أ}$).

السؤال الرابع

تأكد من مقدرة الطلاب على تصور ذلك أو تطبيقها عملياً ويمكنك عمل وجهين جديدين كما يلي:

- الدائرة (يمكن الحصول عليها من خلال قطع المخروط بسكين بشكل موازي لقاعدة المخروط)
- القطع المكافئ (يمكن الحصول عليه من خلال قطع المخروط بسكين بشكل موازي للحافة الجانبية للمخروط)
- القطع الناقص (يمكن الحصول عليه من خلال قطع المخروط بسكين بزاوية بين القطع للدائرة و للقطع المكافئ)

ولكي يستكشف الطلاب أن القطع الزائد يحتاج إلى مخروطين يكون رأسيهما متلامسان. نحصل على القطع الزائد من خلال قطع المستوى لكل من المخروطين في آن واحد ويعتبر هذا نوعاً من التوسع في هذا السؤال. و يمكن تلخيص هذه القطوع من خلال العديد من المواقع على شبكة الإنترنت، فعلى سبيل المثال يمكن الرجوع إلى الرابط:
http://en.wikipedia.org/wiki/Conic_section

فرص التقويم

يعتبر هذا النشاط فرصة للطلاب لتعزيز وتقييم فهمهم للشكل المكون من مجموعة نقاط. السؤال الثاني يحث الطلاب على تشكيل فرضية واختبارها.
قم بتحري مدى فهمهم في هذه المرحلة لمعرفة ما إذا كانوا قادرين على إنشاء الفرضية ومن ثمّ اختبار تلك الفرضية وأن هناك فرق كبير بين اختبار الفرضية و إثبات صحتها.

- هل قام الطلاب باستخدام التفكير المنطقي والإبداعي في إنشاء تطبيق عملي على قطع مكافئ باعتبارها مجسماً؟
- هل لدى الطلاب المقدرة على الربط بين الصيغة الجبرية والشكل الهندسي للقطع المكافئ؟

"موهبة .. حيث تنتمي"

الوحدة الثامنة

الدوال التربيعية والأُسيّة

مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع
King Abdulaziz & his Companions Foundation for Giftedness & Creativity
موهبة

نظرة عامة

يطور الطلاب في هذه الوحدة فهمهم للدالتين التربيعية والأُسّية وذلك بالربط بين الفهم النظري لتلك الدالتين وبين استخدامها في النمذجة لمسائل حياتية. وسوف يتم مناقشة الفروقات بين الارتباط والسببية وما يعنيه ذلك من خلال النماذج الرياضية لمسائل حياتية.

الأهداف التعلمية للوحدة

- استخدام الحجج الرياضية لتبرير خصائص الدوال التربيعية والأسّية.
- إدراك وتفسير التمثيلات البيانية للدوال التربيعية والأسّية والتي تمثل نموذجاً لمسائل حياتية مختلفة بما في ذلك المجالات المتعلقة بالعلوم.
- التأمل في استخدام هذه العلاقات كنموذج لمواقف حياتية.

المعرفة السابقة

- فهم خصائص التمثيل البياني للمعادلات التربيعية والمقدرة على حل تلك المعادلات بطرق مختلفة بما في ذلك استخدام القانون العام.
- التعرف على التمثيل البياني للدوال الأسّية.
- معرفة بعض الأساسيات حول استخدام الرياضيات في النمذجة لمسائل حياتية.

خصائص الأداء المتقدم

القيم و الإتجاهات و السمات

- الاستقصاء (النشاط الثاني)
- الاستقلالية والمثابرة على الدراسة (النشاط الثاني)

المهارات المتقدمة

- التفكير المنطقي والاستدلالي (النشاط الثاني)
- النمذجة الرياضية (النشاط الثالث)
- القدرات فوق المعرفية (النشاطان الثاني، والثالث)

المعرفة و الفهم المتقدمان

- وضوح المفاهيم (النشاط الأول)

الخطة الزمنية

ست ساعات تقريباً.

المصادر

- وسيلة اتصال بشبكة الإنترنت للمدرس وللطلاب.
- أحد برامج التمثيل البياني مثل جيو جبرا.
- أوراق شفافة وورق رسم.
- ورقة عمل المصادر رقم (١).

حول هذا النشاط

يقوم هذا النشاط بطرح تحدي للطلاب لتطبيق المعرفة المسبقة والفهم للمعادلات التربيعية لحالتين تطبيقيتين من واقع الحياة.
من المتوقع أن ينتقل الطلاب في هذا النشاط من التفكير الملموس إلى التفكير التجريدي وتطبيق فهمهم من خلال المناقشات الجماعية.

حول هذه الوحدة

الأهداف التنظيمية للوحدة
- استخدام الحجج الرياضية لتبرير خصائص الدوال التربيعية والأسية
- إدراك وتفسير التمثيلات البيانية للدوال التربيعية والأسية والتي تمثل لحالات واقعية مختلفة بما في ذلك المجالات المتعلقة بالعلوم.
- التأمل في استخدام هذه العلاقات كنموذج لمواقف حياتية.

النشاط الأول :
بناء نموذج لمسار

١. شاهد بعناية مقطع الفيديو لقفز الحصان و الموجد على الرابط
http://www.youtube.com/watch?v=jwFFZj6zlC1

قم بالعمل مع زميلك على مناقشة كيفية رسم المسار الذي اتخذه الحصان اثناء قفزه.
- ما هو نوع الدالة الرياضية التي يمكنك استخدامها كنموذج لمسار الحركة؟
- قم بتحديد سؤال أو سؤالين رئيسيين ستحتاج لمعالجتهما وذلك لإيجاد بعض التفاصيل عن المعادلة التي تطابق هذا المسار.

شاهد مقطع الفيديو مرة أخرى و في هذه المرة قم بتدوين تفاصيل أكثر أو أسئلة أخرى إضافية لطرحها.
انضم إلى زميلين آخرين و شاركهما أفكارك المبدئية.

الآن انضم إلى زميلك مرة أخرى و ذلك لإنشاء المعادلة العامة لمسار الحصان. لا تنس أن تفكر في المحور الأحداثي و كذلك في وحدات القياس التي ستستخدمها. قم برسم المسار بحيث انه يمكنك مطابقتها على الشاشة من خلال مقطع الفيديو . كيف ستبدو معادلة المسار؟

ما الفرضيات التي تحتاجها لكتابة المعادلة؟ فعلى سبيل المثال أي جزء من الحصان سوف تركز عليه؟
إنضم إلى زميلين لك في الفصل وقارن هذه الرسومات مع مقطع الفيديو.

قم الآن بتقييم الرسومات المختلفة و أختر أفضلها و من ثم اشرح أسباب ذلك.

٥٨

"موهبة .. حيث تنتمي"

خصائص الأداء المتقدم

- الإنتقال من الوصف الملموس لحركة جسم ما إلى تمثيل تجريدي لحركة الجسم بالنسبة إلى الزمن.
- استخدام المناقشات الجماعية للتفكير في طرق صقل وشحذ عملية التفكير.

توصيات أسلوب التدريس

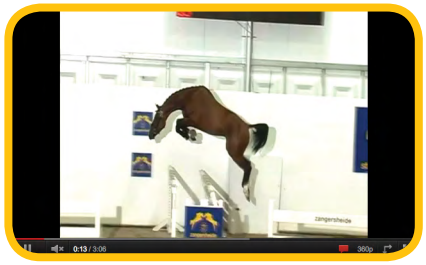
يتم استكشاف العمل من خلال عمل مجموعات ثنائية من الطلاب وبعد ذلك يتم مقارنة الحلول بين المجموعات لتوضيح الصعوبات وتحسين النتائج.
يوصى باستخدام جلسات عامة وإجراء مناقشات مصغّرة وذلك لاستخلاص بعض التغيرات الطبيعية لمهارات النمذجة والموجودة في سؤالي هذا النشاط والانتقال بينهما.

إجابات الأسئلة

السؤال الأول

في النمذجة الرياضية يتم عادة استخدام دالة أو صيغة رياضية لوصف العلاقة بين المتغيرات المعرّفة من خلال الفرضيات المتعلقة بحالات مأخوذة من واقع الحياة.
على سبيل المثال، يمكن أن تصف النمذجة الرياضية وتتوقع مسار جسم طائر عن طريق ربط ارتفاع الجسم والزمن المقطوع أو عن طريق الارتفاع والمسافة المقطوعة باستخدام دالة تربيعية وهذا مفيد بحيث أنه يساعدنا على توقع ما يمكن أن يحدث لاحقاً.

سوف يساعد هذا السؤال الطلاب على التفكير بشكل أوسع حول مسار جسم ما وكذلك ربط لحظات هامة في مسار الجسم مع خصائص معينة في علاقة رياضية.
على الطلاب التفكير فيما يقومون برسمه في كل حالة، فعلى سبيل المثال العلاقة بين الارتفاع والزمن المقطوع أو الارتفاع والمسافة الأفقية المقطوعة



قم بعرض مشهد الفيديو لقفز الحصان والموجودة على الرابط
http://www.youtube.com/watch?v=jwFFZj6zICI
يقوم كل طالبين برسم المسار الذي عمله الحصان من خلال قفزة مع التركيز على كل مما يلي:

- ما هي الدالة المتوقعة والتي يمكن استخدامها لتمثيل الحركة؟
- ما هي الأسئلة الأساسية التي يمكن طرحها لإيجاد بعض التفاصيل حول المعادلة المطابقة للمسار؟

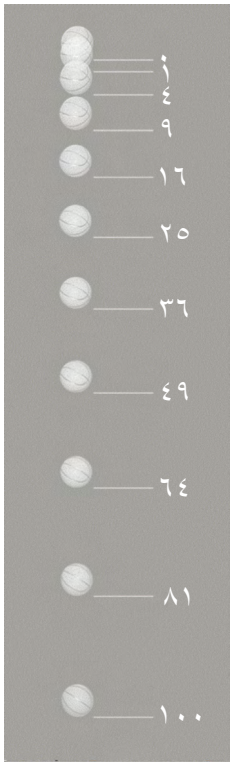
قم بأخذ ردود فعل موجزة من الطلاب لمشاركة أفكارهم الأولية.
ومن ثم قم بمشاهدة الفيديو مرة أخرى مع كتابة بعض المعلومات أو أي أسئلة إضافية وخصوصاً حول المحور المستخدم وكذلك وحدات القياس المستخدمة.
من الممكن أن يركز الطلاب على أجزاء الحصان التي سيستخدمونها كنموذج ولكن يجب تشجيعهم على النظر إلى الحصان كجسم واحد.
يجب على الطلاب مشاركة المجموعات الأخرى أفكارهم ومن ثم يقومون بتدوين الملاحظات حول ذلك.
على المعلم أن يقوم بتذكير الطلاب بالنقاط التي تم تحديدها في المناقشات السابقة من خلال عمل الطلاب في مجموعات ثنائية وذلك لإيجاد الصيغة العامة لمعادلة مسار الحصان.
من الممكن أن يقوم الطلاب بإنشاء تمثيل بياني للمسار على ورق شفاف ومقارنته مع مقطع الفيديو الموجود على الشاشة.
ولمزيد من التوسع يمكن للطلاب أن يحاولوا إيجاد الشكل العام للمعادلة باستخدام برنامج جيو جبرا أو أي برنامج آخر والذي سيكون على الصيغة
ص = – أ(س – ب)^{٢} + جـ

قم بإعطاء الطلاب الفرصة لكي يقوموا بمقارنة معادلاتهم التي تحصّلوا عليها و مقارنة التمثيلات البيانية لاختيار الأفضل.
بعض الفرضيات والمعادلات المقترحة والتي من الممكن أن يأتي بها الطلاب:

- ارتفاع السياج هو ٢ متر. يتم استخدام المتر كوحدة قياس على المحاور الإحداثية.
- الحصان يرتفع عن الأرض عندما س = ٠ ومن ثم يعود إلى الأرض بعد القفز عندما س = ٦.
- التمثيل البياني للمعادلة التربيعية متجه إلى الأسفل ولذلك فإن المعادلة المقترحة ستكون على الشكل ص = - أ(س – ٣)^{٢} + ٢.
- بالاعتماد على حقيقة أن ص = ٠ عندما س = ٠ و س = ٦ نجد أن قيمة أ هي $\frac{٢}{٩}$.
- من الفرضيات السابقة نجد أن المعادلة التي تمثل المسار هي ص = – $\frac{٢}{٩}$ (س – ٣)^{٢} + ٢.

السؤال الثاني

الشكل ٢: مسار الكرة



سمح لجسم ثابت في البداية بالسقوط بحرية بفعل الجاذبية بحيث أن المسافة التي سقطها تتناسب طردياً مع مربع الزمن المنقضي. يوضح الشكل المجاور مسار السقوط في ٢٠ فترة في الثانية الواحدة.

خلال أول $\frac{١}{٢٠}$ جزء من الثانية يسقط الجسم مسافة وحدة واحدة (الوحدة الواحدة هنا تكافئ ١٢ ملم) ، وفي خلال $\frac{٢}{٢٠}$ تكون المسافة ٤ وحدات ، وفي خلال $\frac{٣}{٢٠}$ تكون المسافة ٩ وحدات وهكذا .

يصف الشكل ٢ حركة كرة تم إسقاطها إلى الأرض. يقوم الطلاب بتجميع البيانات الناشئة عن سلوك الكرة لكي يقوموا بعد ذلك بإنشاء تمثيل بياني يمثل العلاقة بين المسافة العمودية و بين الزمن. يقوم الطلاب باستخدام أفكارهم وشرحهم من خلال عملهم في مجموعات ثنائية لحل السؤال، إذ يقوم أحد الطلاب بوصف الحركة بينما يقوم الطالب الآخر بعمل التمثيل البياني .

"موهبة .. حيث تنتمي"

ومن ثم عمل مقارنة بين التمثيل البياني والشكل المعطى من خلال طرح الأسئلة التالية:

- ما هي المتغيرات التي سيتم استخدامها على المحاور الإحداثية؟
- ما هي نوعية التمثيل البياني التي تم عمله؟
- هل التمثيل البياني لحركة الكرة بالنسبة إلى الزمن جيد نوعاً ما؟
- ما هي الفرضيات التي ستقترحها وما هي الأسئلة التي يمكنك طرحها؟

من الممكن للمعلم أن يستفيد من المناقشات الجماعية في إنشاء مقارنات لإيضاح التناقض في السؤالين.

من الواضح جداً أن هناك رابط بين المعادلة التربيعية والمثال السابق المتعلّق بقفز الحصان حيث أن هناك صورة واضحة للعلاقة بين المسافة العمودية والمسافة الأفقية، فالتمثيل البياني يتطابق مع حركة الحصان.

بينما في المثال الثاني يحتاج الطلاب إلى تفسير المعلومات المتعلّقة بحركة الكرة كي يتمكنوا من إنشاء تمثيل بياني للمسافة العمودية مع الزمن.

التمثيل البياني في هذا المثال لا يتشابه مع حركة الجسم وهذا جزء من التفكير التجريدي ويعتبر صعباً نوعاً ما. لذا فإن هذا التطبيق يعتبر فرصة جيدة لإدراك ما وراء المعرفة.

يمكن للطلاب إعادة التفكير مرة أخرى حيث يعتبر هذا مثالاً جيداً على الانتقال من التفكير الملموس إلى التفكير بشكل منتظم ويعتبر مسألة متقدمة في تحويل المهارات.

فرص التقويم

تعطي الأسئلة السابقة الفرصة للطلاب لتطبيق معرفتهم السابقة وفهمهم للمعادلات التربيعيّة في حالتين مأخوذتين من واقع الحياة.

يجب على الطلاب توضيح مدى تقدمهم خلال المناقشات الجماعية في نهاية النشاط.

- هل لدى الطلاب المقدرة على تطبيق فهمهم للحالات غير المألوفة؟
- هل لدى الطلاب المقدرة على التفكير بشكل تجريدي والانتقال من التفكير الملموس إلى التفكير التجريدي؟

حول هذا النشاط

يعطي هذا النشاط الفرصة للطلاب للتعامل مع الدالة الأُسّية والتي على الشكل

$$د(س) = أ(ب)^{س}$$

وكذلك يحث النشاط الطلاب على استكشاف خصائص هذه الدالة والنظر في أهمية استخدامها في بعض الحالات الحياتية وكذلك البناء على ما تم دراسته في المناهج الدراسية الأساسية.

خصائص الأداء المتقدم

- دراسة خصائص الدالة الأسّية واستخدام التفكير المنطقي لدراسة تأثير تلك الخصائص على تمثيلها البياني.
- اظهار الثقة في التعامل بشكل مستقل مع السياقات غير المألوفة.

توصيات أسلوب التدريس

يُفضّل البدء في السؤال الأول بشكل جماعي حيث يتم طرح الموضوع ومن ثم يقوم الطلاب وبشكل مستقل بحل السؤال على جداول ورقية.

يطلب من الأفراد تقديم مشاركاتهم في الخطط التي أعدوها إلى المجموعة ليتم بعد ذلك الإتفاق على خطة موحّدة.

يتطلب السؤال الثاني العمل في مجموعات صغيرة لتفسير ونقل المعلومات من مجموعة من البيانات.

إن المناقشات الفردية والثنائية حول الأسئلة الرئيسية داخل الفصل سوف تؤدي إلى المشاركة في توضيح الفهم للسؤال الثالث.

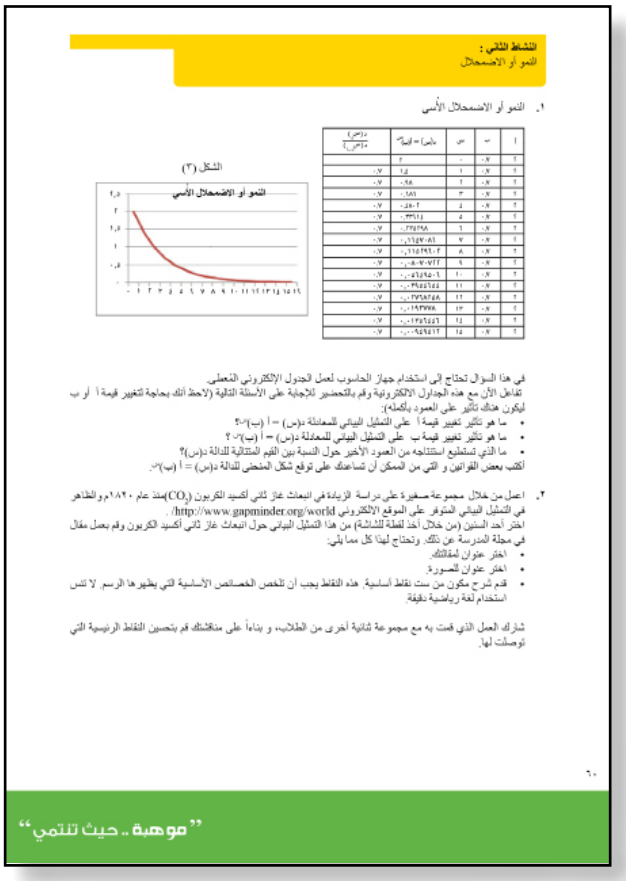
إجابات الأسئلة

السؤال الأول

يحتاج الطلاب في هذا السؤال إلى استخدام الحاسوب لعمل الجدول الإلكتروني المُعطى.

حيث سيتفاعل الطلاب مع تلك البيانات ومن ثم ستجدهم يحاولون وضع إجابات للعديد من الأسئلة المتعلقة بالجدول الإلكتروني.

يجب تذكير الطلاب أن إجراء أي تغيير على الجدول الإلكتروني يجب أن يتم عن طريق تغيير القيمة الأولى للعدد أ أو القيمة الأولى للعدد ب، وبالتالي ستتغير بقية الأعداد الموجودة في العمود بأكمله.


النشاط الثاني :
النمو أو الاضمحلال

١. النمو أو الاضمحلال الأسي

الشكل (٣)
النمو أو الاضمحلال الأسي

في هذا السؤال تحتاج إلى استخدام جهاز الحاسوب لعمل الجدول الإلكتروني المعطى.
تفاعل الآن مع هذه الجداول الالكترونية وقم بالتحضير للإجابة على الأسئلة التالية (لاحظ أنك بحاجة لتغيير قيمة أ أو ب ليكون هناك تأثير على العمود بأكمله):
- ما هو تأثير تغيير قيمة أ على التمثيل البياني للمعادلة د(س) = أ (ب)^س؟
- ما هو تأثير تغيير قيمة ب على التمثيل البياني للمعادلة د(س) = أ (ب)^س ؟
- ما الذي تستطيع استنتاجه من العمود الأخير حول النسبة بين القيم المتتالية للدالة د(س)؟

أكتب بعض القوانين و التي من الممكن أن تساعدك على توقع شكل المنحنى للدالة د(س) = أ (ب)^س.

٢. اعمل من خلال مجموعة صغيرة على دراسة الزيادة في انبعاث غاز ثاني أكسيد الكربون (CO_2) منذ عام ١٨٢٠م والظاهر في التمثيل البياني المتوفر على الموقع الالكتروني http://www.gapminder.org/world/ .
اختر أحد السنين (من خلال أخذ لقطة للشاشة) من هذا التمثيل البياني حول انبعاث غاز ثاني أكسيد الكربون وقم بعمل مقال في مجلة المدرسة عن ذلك. وتحتاج لهذا كل مما يلي:
- اختر عنوان لمقالتك.
- اختر عنوان للصورة.
- قدم شرح مكون من ست نقاط أساسية. هذه النقاط يجب أن تلخص الخصائص الأساسية التي يظهرها الرسم. لا تنس استخدام لغة رياضية دقيقة.

شارك العمل الذي قمت به مع مجموعة ثنائية أخرى من الطلاب، و بناءاً على مناقشتك قم بتحسين النقاط الرئيسية التي توصلت لها.

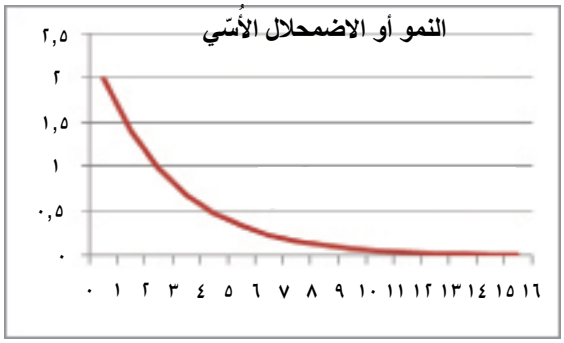
٦٠

"موهبة .. حيث تنتمي"

الشكل ٣: النمو أو الاضمحلال الأُسّي

يُظهر الشكل ٣ اضمحلالاً أسيًّا معادلته د(س) = ٢(٠,٧)^{س}

أ	ب	س	د(س) = أ(ب)^{س}	$\frac{د(س)}{د(س_{-1})}$
٢	٠,٧	٠	٢	
٢	٠,٧	١	١,٤	٠,٧
٢	٠,٧	٢	٠,٩٨	٠,٧
٢	٠,٧	٣	٠,٦٨٦	٠,٧
٢	٠,٧	٤	٠,٤٨٠٢	٠,٧
٢	٠,٧	٥	٠,٣٣٦١٤	٠,٧
٢	٠,٧	٦	٠,٢٣٥٢٩٨	٠,٧
٢	٠,٧	٧	٠,١٦٤٧٠٨٦	٠,٧
٢	٠,٧	٨	٠,١١٥٢٩٦٠٢	٠,٧
٢	٠,٧	٩	٠,٠٨٠٧٠٧٢٢	٠,٧
٢	٠,٧	١٠	٠,٠٥٦٤٩٥٠٦	٠,٧
٢	٠,٧	١١	٠,٠٣٩٥٤٦٥٤	٠,٧
٢	٠,٧	١٢	٠,٠٢٧٦٨٢٥٨	٠,٧
٢	٠,٧	١٣	٠,٠١٩٣٧٧٨	٠,٧
٢	٠,٧	١٤	٠,٠١٣٥٦٤٤٦	٠,٧
٢	٠,٧	١٥	٠,٠٠٩٤٩٥١٢	٠,٧



من خلال المناقشة يمكن استنتاج أن البيانات الموجودة في الجدول تمثل حالة اضمحلال أسّي بقيمة مبدئية د(س) = ٢ (عندما س = ٠) وكذلك فإن الدالة د(س) تتناقص بمعدّل ٣٠٪ عندما تزيد قيمة س بمقدار ١.

سوف يستكشف الطلاب العلاقة د(س) = أ(ب)^{س} باستخدام الجدول الإلكتروني الموجود في هذا النشاط.

الهدف من هذا السؤال هو إيجاد بعض القوانين التي من الممكن أن تتوقع شكل التمثيل البياني للدالة الأسية على الصورة د(س) = أ(ب)^{س}.

يحتاج الطلاب إلى الإجابة على الأسئلة التالية:

- ما تأثير تغير قيمة أ على التمثيل البياني للدالة د(س) = أ(ب)^{س} ؟

العدد أ يؤشر إلى تقاطع المنحنى مع المحور الصادي عند النقطة (٠،أ) وتعتبر هذه نقطة جيدة لبداية التمثيل البياني عندما تكون س = ٠.

- ما تأثير تغيير قيمة ب على التمثيل البياني للدالة د(س) = أ(ب)^{س} ؟

العدد ب هو ثابت النمو أو الإضمحلال. إذا كان العدد ب أكبر من ١ فإن النمط يمثل نمو أسّي وإذا كان العدد ب بين ٠ و ١ فإن النمط يمثل اضمحلال أسّي.

- من خلال إعادة النظر إلى الشكل ٣، ما الذي يُبيّنه العمود الأخير حول النسبة بين كل قيمتين متتاليتين للدالة د(س)؟

إن النسبة بين كل قيمتين متتاليتين للدالة د(س) تكون ثابتة دائماً، وعندما تتزايد قيمة س في الجدول بخطوات موحدة فإن النسبة الناتجة لقيم ص سوف تكون دائماً هي القيمة ب.

السؤال الثاني

اشرح لجميع الطلاب عن التمثيل البياني الديناميكي لازدياد انبعاث غاز ثاني أكسيد الكربون (CO_2) منذ عام ١٩٢٠ م والموجودة في موقع غابمندر (Gapminder) على الرابط الآتي

http://www.gapminder.org/world/

حيث يقوم الموقع الإلكتروني بعمل بعض التدريبات للمساعدة. يمكن للطلاب العمل على الحاسوب من خلال مجموعات صغيرة ومن ثم عليهم الإطلاع على الموقع الإلكتروني وذلك لاستكشاف التمثيل البياني بشكل أفضل.

سوف يُعطى الطلاب الفرصة لكتابة مقال موجز حول ازدياد انبعاث غاز ثاني أكسيد الكربون (CO_2) يتم نشره في صحيفة المدرسة.

يمكن للطلاب اختيار سنة ما من خلال لقطة من الشاشة المعروضة للتمثيل البياني الديناميكي وذلك ليتم إضافته إلى المقال.

يمكن للمعلّم أن يقوم بتوجيه الطلاّب لكتابة المقال من خلال طرح العديد من الأسئلة ومنها:

- ما هو العنوان المناسب للمادة المعروضة والصورة؟
- ما هو الغرض من هذه العناوين؟ وما الذي تشير إليه هذه العناوين؟
- كيف يمكن ربط النقاط الرئيسية بالعناوين؟
- كيف يتم تلخيص المميزات الرئيسية لما يُظهره التمثيل البياني؟
- هل تم استخدام لغة رياضيات دقيقة؟

سوف يكون للمناقشات الجماعية أثر كبير في لفت الانتباه إلى الأفكار المختلفة وكيفية التعامل معها وبعد ذلك فإن الطلاب بحاجة لبعض الوقت لتحسين كتابتهم للمقال.

مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع
King Abdulaziz & his Companions Foundation for Giftedness & Creativity
موهبة

السؤال الثالث

يستكشف الطلاب في هذا السؤال من خلال التمثيل البياني انبعاث غاز ثاني أكسيد الكربون (CO_2) في عام ٢٠٠٦م.

من غير المحتمل أن يجد الطلاب العلاقة الأسيّة الدقيقة ولكن يمكنهم التخمين حول العلاقة الأسيّة وأن يستخدموا التجريب والتطوير لإيجاد العلاقة المناسبة.

قد لا يكون لدى الطلاب ارتياح تجاه السياق لاحتوائه على صعوبات كثيرة ومعقدة وليس هناك حل نهائي جذّاب.

يمكن إضافة النقاط التالية:-

- المتغيرات المعرفة هنا هي كمية انبعاث غاز ثاني أكسيد الكربون وتقاس بالطن للفرد الواحد ويتم تمثيله على المحورالعمودي والمتغيّر الآخر هو الدخل للفرد ويتم تمثيله على المحور الأفقي.
- هناك تحذير بشأن البيانات التي تم الحصول عليها قبل عام ١٩٠٠م فهي غير مُؤكدة.
- الوحدات التي سيتم استخدامها سوف تكون كبيرة ويحتاج الطلاب إلى تبسيطها وتقريبها.
- من الممكن أن يقوم أحد الطلاب بعمل تمثيل بياني مبسط للمنحنى وكذلك عمل بعض الفرضيات الخاصة بإنشاء النموذج المطلوب.

السؤال الرابع

بناءاً على ما شاهده الطلاب، سوف ينظر الطلاب فيما إذا كان هناك علاقة سببية قوية واضحة بين المتغيرين على التمثيل البياني.

قم بحث الطلاب على إيجاد الحلول أو تبرير إجاباتهم وتحسينها بناءاً على الحوار الجماعي في الفصل.

إن استخلاص الردود من الطلاب سوف يساعد على استخلاص الفروقات بين الارتباط والسببية.

إن الارتباط في البيانات التجريبية لا يؤدي بالضرورة إلى علاقة سببية أحادية بين متغيرين ولكن ما يُثبته الإرتباط هو أن العلاقة غير موجودة على الإطلاق ومع ذلك فإن الارتباط سوف يوفر أدلة تدعم وجود العلاقة السببية.

يتوجب على الطلاب اعتبار أنظمة مختلفة تحوي عدة متغيرات حيث تتداخل هذه المتغيرات بطريقة معقدة. في الواقع فإن النمذجة الرياضية يمكنها فقط أن تقرّب هذه الأنظمة.

قد يكون الحال أيضاً هو أن المتغيرات مستقلة عن بعضها البعض ولكنها تعتمد على متغير ثالث غير واضح في البيانات المعطاة.

قد يكون أحد ردود الفعل من الطلاب باستخدام عبارة مثل "أوافق/لا أوافق مع ..... وذلك لأن ...." فهذا سيساعد على استخدام أنماط معينة من النقاش خلال الدرس.

يجب على جميع الطلاب التعود على استخلاص العلاقات المعقدة بين المتغيرات في المسائل الحياتية وعلى المعلّم حث الطلاب كي يفكروا في قوة ومحددات محاولة استخدام الرياضيات في إيجاد النموذج المطلوب.

فرص التقويم

تعطي الأسئلة السابقة الفرصة للطلاب لكي يقوموا بتجميع معرفتهم المسبقة والجديدة ومن ثم تطبيقها على حالات معقدة غير مألوفة.

- هل لدى الطلاب المقدرة على استخدام التفكير المنطقي في شرح تأثير خصائص الدوال الأسيّة على شكل التمثيل البياني للدالة؟
- هل أظهر الطلاب الثقة في التعامل بشكل مستقل مع السياقات غير المألوفة وكذلك المثابرة على تكوين الفرضيات من خلال تمثيل بياني يحوي عدة متغيرات؟

حول هذا النشاط

لقد تعوّد الطلاب من خلال الأنشطة الصفيّة على مجالات محددة في الرياضيات ولكن يحتاج الطلاب إلى تقدير ان ذلك ليس هو الحال في المواقف الحياتية.
لقد تم تعميم هذا النشاط لكي يحث الطلاب على اتخاذ قراراتهم بأنفسهم حول المجالات المحدّدة في الرياضيات واختيار الأدوات المناسبة لحل أي مسألة معطاة.

خصائص الأداء المتقدم

- تعرُّف الفرق بين الدوال الأسّية والدوال التربيعية وتحديد ما إذا كان أي منهما يمثل النموذج الأمثل لسلوك المتغيرات في مواقف حياتية.
- استخدام المناقشات الجماعية للعمل على تحسين الطرق المستخدمة وشحذ عملية التفكير.

توصيات أسلوب التدريس

على الطلاب العمل في مجموعات صغيرة يتم تحديد بعضهم لمشاركة النتائج مع المجموعة وتوليد المزيد من المناقشات.

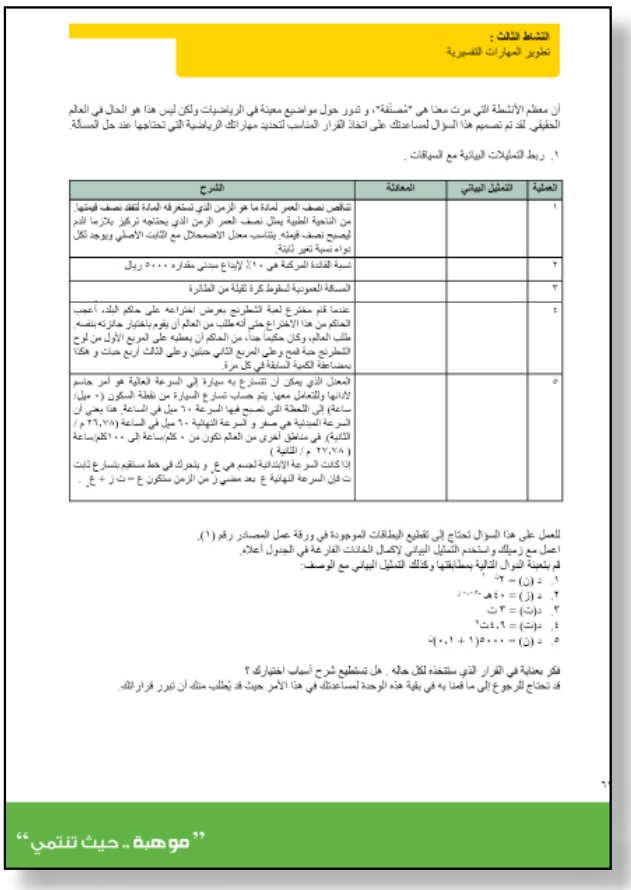
إجابات الأسئلة

السؤال الأول

مطابقة التمثيل البياني مع السياق

يحتاج الطلاب في هذا السؤال إلى تقطيع وترتيب مجموعة البطاقات والموجودة في ورقة عمل المصادر رقم (١) إذ يحتاج الطلاب إلى طباعة وقص هذه البطاقات ومن ثم وضعها في مظروف، كل مظروف ملائم لزوج واحد من الطلاب.
يقوم كل طالب بالعمل مع زميله على إكمال الفراغات المفقودة في الجدول.
الشكل التالي يوضح الحل:

العملية	التمثيل البياني	المعادلة	الشرح
١	جـ	د(ز) = ٤٠هـ -٠,٠٥ز	تناقص نصف العمر لمادة ما هو الوقت الذي تستغرقه المادة لتفقد نصف قيمتها. من الناحية الطبية يمثل نصف العمر الزمن الذي يحتاجه تركيز بلازما الدم ليصبح نصف قيمته. يتناسب معدل الاضمحلال مع الثابت الأصلي ويوجد لكل دواء نسبة تغير ثابتة.
٢	د	د(ن) = ٥٠٠٠(١ + ٠,١)ن	نسبة الفائدة المركبة هي ١٠٪ لإيداع مبدئي مقداره ٥٠٠٠ ريال
٣	ب	د(ت) = ٤,٩ت٢	المسافة العمودية لسقوط كرة ثقيلة من الطائرة
٤	هـ	د(ن) = ٢ن-١	عندما قام مخترع لعبة الشطرنج بعرض اختراعه على حاكم البلد، أعجب الحاكم من هذا الاختراع حتى أنه طلب من العالم أن يقوم باختيار جائزته بنفسه. طلب العالم، وكان حكيماً جداً، من الحاكم أن يعطيه على المربع الأول من لوح الشطرنج حبة قمح وعلى المربع الثاني حبتين وعلى الثالث أربع حبات و هكذا بمضاعفة الكمية السابقة في كل مرة.
٥	أ	د(ت) = ٣ت	المعدل الذي يمكن أن تتسارع به سيارة إلى السرعة العالية هو أمر حاسم لأدائها وللتعامل معها. يتم حساب تسارع السيارة من نقطة السكون (٠ ميل/ ساعة) إلى اللحظة التي تصبح فيها السرعة ٦٠ ميل في الساعة. هذا يعني أن السرعة الإبتدائية هي صفر و السرعة النهائية ٦٠ ميل في الساعة (٢٦,٧٨ م / الثانية). في مناطق أخرى من العالم تكون من ٠ كلم/ساعة إلى ١٠٠كلم/ساعة (٢٧,٧٨ م / الثانية) إذا كانت السرعة الابتدائية لجسم هي ع٠ و يتحرك في مستقيم بتسارع ثابت ت فإن السرعة النهائية ع بعد مضي ز من الزمن ستكون ع = ت ز + ع٠ .



مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع
King Abdulaziz & his Companions Foundation for Giftedness & Creativity
موهبة

على الطلاب إيجاد الدوال عن طريق الربط بينها وبين السياق المُعطى وكذلك التمثيلات البيانية التي تبين وصف الحالة.
يركّز هذا السؤال على عملية الربط بين كل من الدوال والتمثيلات البيانية وكذلك الوصف لهذه الدوال.
على المعلّم حث الطلاب على الاستفادة من العديد من العناصر الموجودة في النشاطين السابقين لتطبيقها في هذه الوحدة لأنها من الممكن أن تساعدهم على تفسير قراراتهم.
في هذا النشاط على مجموعة مختارة من الطلاب الموهوبين تبرير قراراتهم لبقية الطلاب حيث سيكون من الجيّد استخلاص الظواهر الشاذة وتحديد أسباب وجودها.
فعلى سبيل المثال من المحتمل وجود أجزاء من التمثيل البياني للدوال التربيعية والدوال الأسيّة تعطي نفس الخصائص مما سيؤدي إلى وجود تفسير خاطئ.
يجب على الطلاب أن يحددوا الطرق المناسبة لإيضاح قراراتهم من خلال إعادة التجارب أو زيادة عدد البيانات مثلاً.

فرص التقويم

يُعطي هذا النشاط الطلاب الفرصة لكي يقوموا بالمزج وتطبيق ما تعلموه في هذه الوحدة على أمثلة مشابهة.

- هل لدى الطلاب المقدرة على تحديد وتبرير الحالات التي تكون فيها الدالة التربيعيّة أو الأسيّة مناسبة كنموذج يُستخدم لتفسير سلوك المتغيرات في المواقف الحياتية؟

الوحدة التاسعة

الدوال الجذرية والهندسة

مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع
King Abdulaziz & his Companions Foundation for Giftedness & Creativity
موهبة

نظرة عامة

يطوّر الطلاب في هذه الوحدة بعض البراهين المرتبطة بكل من نظرية فيثاغورس والأعداد النسبية وكذلك يدرس الطلاب ارتباط خصائص الجذور القياسية بالدوال الجذرية والتمثيل البياني لها.
في النشاط الأخير من هذه الوحدة يطبق الطلاب ما تعلّموه لحل بعض المسائل الهندسية.

الأهداف التعلمية للوحدة

- تطوير براهين متعلقة بنظرية فيثاغورس والأعداد غير النسبية.
- التعرف على خصائص الجذور الصمّاء وارتباطها بالدوال الجذرية والرسوم البيانية لها.
- استخدام المعرفة المكتسبة لحل بعض المسائل الهندسية.

المعرفة السابقة

- نظرية فيثاغورس والقوى والجذور.
- ترميز الدوال ويشمل ذلك المصطلحات المتعلّقة بالمجال والمدى.

خصائص الأداء المتقدم

القيم و الإتجاهات و السمات

- الاستقصاء (النشاطان الأول، والرابع)
- الاستقلالية والمثابرة على الدراسة (النشاط الأول)
- العمل المنهجي المنظم (النشاط الثاني)

المهارات المتقدمة

- التفكير المنطقي والاستدلالي (النشاط الثاني)
- النمذجة الرياضية (النشاط الثالث)
- القدرات فوق المعرفية (النشاطان الثاني، والثالث)

المعرفة و الفهم المتقدمان

- وضوح المفاهيم (النشاطان الثاني، والثالث)
- إقامة الصلات (النشاط ٤)
- التحقق والبرهان (الأنشطة الأول، والثاني، والرابع)

الخطة الزمنية

ست ساعات تقريباً.

المصادر

- أوراق للرسم البياني وآلة حاسبة بيانية أو أحد برامج التمثيل البياني و الموجودة على الحاسب.
- ورقة عمل المصادر رقم (١)

"موهبة .. حيث تنتمي"

حول هذا النشاط

المحور الرئيسي في هذا النشاط سوف يكون حول نظرية فيثاغوس والجذور التربيعية وكذلك الأعداد غير النسبية مع التركيز على استخدام البرهان الرياضي.
سوف يخلق هذا تحدياً للطلاب في بداية الوحدة. بقية الأسئلة تحتاج إلى استخدام المعرفة الجيدة بالجذور الصمّاء وتطبيقات نظرية فيثاغورس في هندسة الشبكات الإحداثية.

خصائص الأداء المتقدم

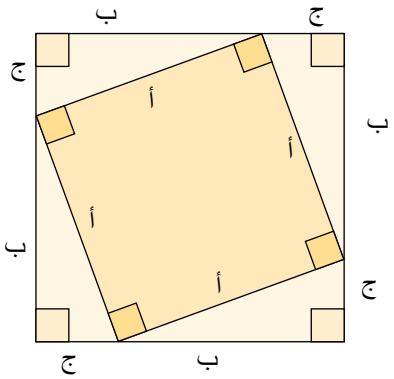
- التعمق اكثر في طبيعة البراهين الرياضية.
- التعامل مع الأسئلة التي لا تشتمل على تعليمات دقيقة للحل.

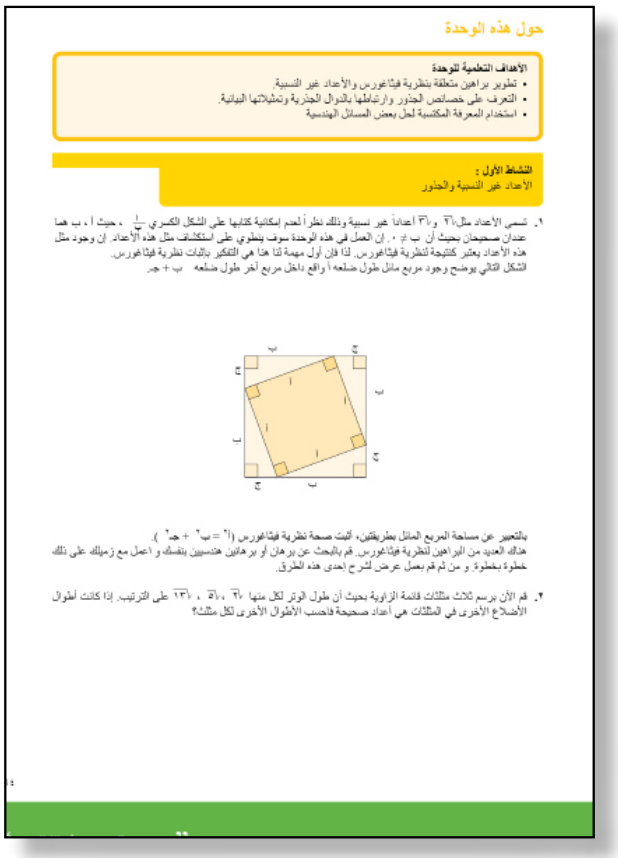
توصيات أسلوب التدريس

بعد إعطاء نبذة موجزة، يجب على الطلاب العمل على الأسئلة من خلال مجموعات ثنائية أو من خلال مجموعات صغيرة. ستساعد المناقشات الجماعية على المشاركة في النتائج أو إنشاء ملخّص لما تعلّموه.
في جميع المراحل، على المعلّم طرح أسئلة وحث الطلاب على مناقشتها عوضاً عن تقديم الإيضاحات.

إجابات الأسئلة

السؤال الأول




حول هذه الوحدة

الأهداف التعليمية للوحدة
- تطوير براهين متعلقة بنظرية فيثاغورس والأعداد غير النسبية.
- التعرف على خصائص الجذور وارتباطها بالدوال الجذرية وتمثيلاتها البيانية.
- استخدام المعرفة المكتسبة لحل بعض المسائل الهندسية

النشاط الأول :
الأعداد غير النسبية والجذور

١. تسمى الأعداد مثل $\sqrt{٢}$ و $\sqrt{٣}$ أعداداً غير نسبية وذلك نظراً لعدم إمكانية كتابتها على الشكل الكسري $\frac{أ}{ب}$ ، حيث أ ، ب هما عددان صحيحان بحيث أن ب ≠ ٠ . إن العمل في هذه الوحدة سوف ينطوي على استكشاف مثل هذه الأعداد. إن وجود مثل هذه الأعداد يعتبر كنتيجة لنظرية فيثاغورس. لذا فإن أول مهمة لنا هنا هي التفكير بإثبات نظرية فيثاغورس.
الشكل التالي يوضح وجود مربع مائل طول ضلعه أ واقع داخل مربع آخر طول ضلعه ب + جـ.

بالتعبير عن مساحة المربع المائل بطريقتين، أثبت صحة نظرية فيثاغورس ($أ^٢ = ب^٢ + جـ^٢$).
هناك العديد من البراهين لنظرية فيثاغورس. قم بالبحث عن برهان أو برهانين هندسيين بنفسك و اعمل مع زميلك على ذلك خطوة بخطوة. و من ثم قم بعمل عرض لشرح إحدى هذه الطرق.

٢. قم الآن برسم ثلاث مثلثات قائمة الزاوية بحيث أن طول الوتر لكل منها $\sqrt{٢}$ ، $\sqrt{٥}$ ، $\sqrt{١٣}$ على الترتيب. إذا كانت أطوال الأضلاع الأخرى في المثلثات هي أعداد صحيحة فاحسب الأطوال الأخرى لكل مثلث؟

مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع
King Abdulaziz & his Companions Foundation for Giftedness & Creativity
موهبة

من المفيد جداً أن يقوم المعلّم بإنشاء بعض القواعد التالية للسؤالين الأول والثاني:

أ- سؤال الطلاب أن يراجعوا عملهم السابق في نظرية فيثاغورس.

ب - مناقشة كيف أن بعض الأعداد لا يمكن كتابتها على صورة كسور اعتيادية (أعداد نسبية)، وتسمى هذه بالأعداد غير النسبية.

ينبغي على الطلاب العمل بشكل مستقل عن المعلّم ومن الممكن أن بعض الطلاب قد تعرفوا على إثبات نظرية فيثاغورس من قبل. الشكل المعروض هنا سوف يساعد الطلاب على إنشاء برهان جبري مبسط للنظرية باستخدام العلاقات التالية:

مساحة المربع المائل = مساحة المربع المحيط بالشكل – مجموع مساحات المثلثات الموجودة في الزوايا.

وهذا يقودنا إلى المتطابقة:

$أ^{٢} = (ب + جـ)^{٢} - ٤ \times \frac{١}{٢} ب جـ$

$أ^{٢} = (ب^{٢} + ٢ب جـ + جـ^{٢}) - ٢ ب جـ$

$أ^{٢} = ب^{٢} + جـ^{٢}$

إن القدرة على تطوير البرهان يمثل تحدي أكبر من متابعة البرهان المعطى. عند البحث عن البراهين فإن الطلاب سوف يستفيدون أكثر عندما يقومون بالعمل على البرهان مع الآخرين ويشرحون خطوات البرهان لبعضهم البعض، وللعمل على ذلك فهم بحاجة إلى إعادة انتاج أشكال ذات علاقة. (ويمكن العمل على هذا في درسٍ آخر).

السؤال الثاني

يعطي هذا السؤال نبذة موجزة عن السؤال الثالث لتذكير الطلاب بالرابط بين نظرية فيثاغورس والأعداد غير النسبية.

المثلثات المطلوبة سوف يكون أطوال أضلاعها كالتالي:

١ ، ١ ، $\sqrt{٢}$

١ ، ٢ ، $\sqrt{٥}$

٢ ، ٣ ، $\sqrt{١٣}$

السؤال الثالث

إن دراسة وجود أعداد مثل $\sqrt{٢}$ سوف يعطي الفرصة لاعتباره برهان تقليدي في الرياضيات.

إن جعل الطلاب يضعون الخطوط الرئيسية للبرهان سوف يحث الطلاب على التفكير بتعمّق أكبر وكذلك فإن المناقشات الجماعية سوف تزيد من درجة مشاركتهم بشكل أكبر عمّا لو قام المعلّم بعرض البرهان.

وللعمل على هذا السؤال، يحتاج الطلاب إلى نسخ من البطاقات ليتم تقطيعها والموجودة في ورقة عمل المصادر رقم (١).

قم باعطاء مجموعة واحدة من البطاقات لكل طالبين أو ثلاثة طلاب. تحوي كل بطاقة على جزء من البرهان.

يجب على المعلّم التأكد من فهم الطلاب لكيفية العمل بتعاون في تتبع خطوات الحل عند بدايتهم لحل السؤال.

يجب على المعلّم أن يؤكّد للطلاب على ضرورة أن يقنع كل واحد منهم الآخر بخطوات الحل ويمكنهم الإستعداد للمناقشات الجماعية وتذكّر خطوات الحل.

إن المناقشة الجماعية ستساعد كثيراً على استنتاج الحل. اطلب من الطلاب أن يضعوا البطاقات جانباً ومن ثمّ يحاولوا بناء خطوات البرهان من ذاكرتهم.

يجب على المعلّم طرح العديد من الأسئلة عوضاً عن اعطاء التفسيرات ومنها على سبيل المثال:

- ما هي الفرضيات التي قمتم بافتراضها في بداية الحل؟
- ما الذي تعنيه الجملة " بأقل حد"؟
- ما الذي ستفعله بهذه المعادلة؟
- إذا كان هـ^{٢} عدد زوجي فما الذي تستنتجه حول قيمة هـ ؟

إن العمل بهذه الطريقة سوف يُشجع الطلاب على التفكير والفهم بشكل أكبر بأنفسهم.

"موهبة .. حيث تنتمي"

أجزاء البرهان بشكل مرتّب هي كالتالي:

الفرضية الأساسية : نقول عن العدد $\sqrt{٢}$ أنه عدد نسبي بالإعتماد على ما يلي: • العددان أ و ب هما عددان صحيحان، حيث ب ≠ ٠ ولا يوجد لهما قواسم مشتركة. • يمكننا كتابة $\sqrt{٢} = \frac{أ}{ب}$ ويجب أن يكون بأبسط صورة.
نُربّع كل من الطرفين: $٢ = \frac{أ^{٢}}{ب^{٢}}$
نضرب الطرفين بالعدد $ب^{٢}$ $أ^{٢} = ٢ب^{٢}$
هذا يخبرنا أن العدد $أ^{٢}$ هو مضاعف للعدد ٢ وهذا يعني أن $أ^{٢}$ هو عدد زوجي
إذا كان $أ^{٢}$ عدد زوجي فإن أ هو عدد زوجي ايضاً
هذا يعني أن أ يمكن كتابته كمضاعف للعدد ٢
لذا يمكننا كتابته أ = ٢ ن (حيث ن عدد صحيح)
هذا يعني أن $أ^{٢} = (٢ن)^{٢}$
لذا يمكننا كتابة $(٢ن)^{٢} = ٢ ب^{٢}$
وهذا يعني أن $٤ ن^{٢} = ٢ ب^{٢}$
سيؤدي ذلك إلى $٢ن^{٢} = ب^{٢}$
وبنفس الطريقة السابقة: $ب^{٢}$ عدد زوجي سيؤدي إلى أن ب عدد زوجي
لقد قمنا باثبات أن كلاً من أ و ب هما عددان زوجيان وهذا يعني أنه يوجد قاسم مشترك لهما
هذا يتناقض مع الفرضية الأساسية بأن أ و ب لا يوجد لهما أي قاسم مشترك
بالتالي فإن الفرضية الأساسية يجب أن تكون خاطئة ويستحيل كتابة $\sqrt{٢}$ كعدد نسبي على الشكل $\frac{أ}{ب}$ بحيث أن أ و ب عددان صحيحان لا يوجد لهما قاسم مشترك

السؤال الرابع

الصيغ المبسّطة هي كالتالي:

أ. $\sqrt{٣٢}$ ، ب. $\sqrt{٦٢}$ ، جـ. ٦ ، د. $\sqrt{١٥٦}$

هـ. $\sqrt{٢}$ ، و. $\sqrt{٦}$ ، ز. $٨ + \sqrt{٢٥}$ ، حـ. ٩

القوانين العامة للتعامل مع الجذور هي :

$$\sqrt{أ} \times \sqrt{أ} = أ$$

$$\sqrt{أ ب} = \sqrt{أ} \times \sqrt{ب}$$

$$\sqrt{\left(\frac{أ}{ب}\right)} = \frac{\sqrt{أ}}{\sqrt{ب}}$$

من المحتمل أن معظم الطلاب يستخدمون هذه القوانين خلال عملهم بدون ذكرها صراحةً.

إن تذكير الطلاب بهذه القوانين سوف يعطي قيمة أكبر لها.

السؤال الخامس

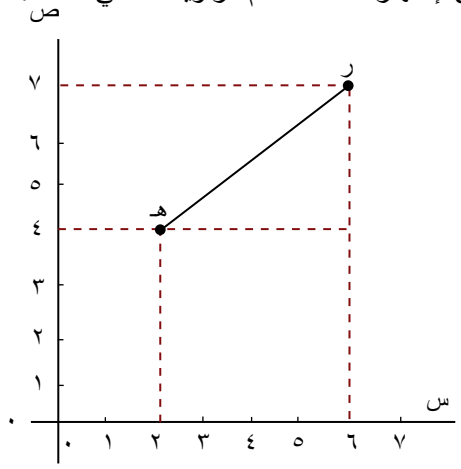
إنطاق المقام للصيغ هو كالتالي:

أ. $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ ب. $\frac{\sqrt{١٤}}{٧}$ جـ. $\frac{٤+\sqrt{٧}}{٩}$ د. $\sqrt{٤} - ٣\sqrt{٦}$.

قم بحث الطلاب على مناقشة هذه الأمثلة مع بعضهم البعض ولكن في حالة احتاج الطلاب إلى مساعدة في الحل ،على سبيل المثال، الفرع جـ فيمكنك الرجوع إلى الفرع ح من السؤال السابق.

السؤال السادس

في هذا السؤال والسؤال الذي يليه يتم تطبيق نظرية فيثاغورس على هندسة شبكة الإحداثيات. يحتاج الطلاب إلى رسم الشكل الهندسي لإظهار المثلث القائم الزاوية كما في الشكل:



المسافة بين النقطتين هـ (٤،٢) و ر (٧، ٦) معطاه كما يلي:

$م^{٢} = (٦ - ٢)^{٢} + (٤ - ٧)^{٢} = ١٦ + ٩ = ٢٥$،

وبالتالي فإن المسافة هي م = ٥.

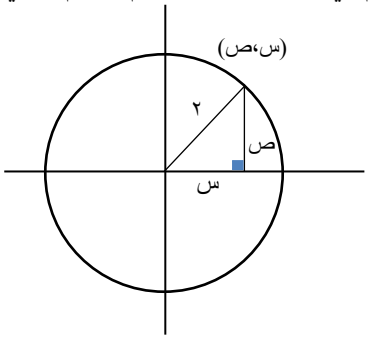
مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع
King Abdulaziz & his Companions Foundation for Giftedness & Creativity
موهبة

باستخدام رسم مشابه ، وبتبديل الأعداد بالأحرف فإن الطلاب سيكون لهم المقدرة على إيجاد الصيغة العامة للمسافة بين النقطتين أ(س$_{١}$ ، ص$_{١}$) ، ب(س$_{٢}$ ، ص$_{٢}$) والمعطاه بالعلاقة :

$$م = \sqrt{(س_{٢} - س_{١})^{٢} + (ص_{٢} - ص_{١})^{٢}}$$

السؤال السابع

يتم في هذا السؤال استخدام الرسم التالي للمساعدة:



معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل (٠ ، ٠) ونصف قطرها ٢ هي س^{٢} + ص^{٢} = ٤

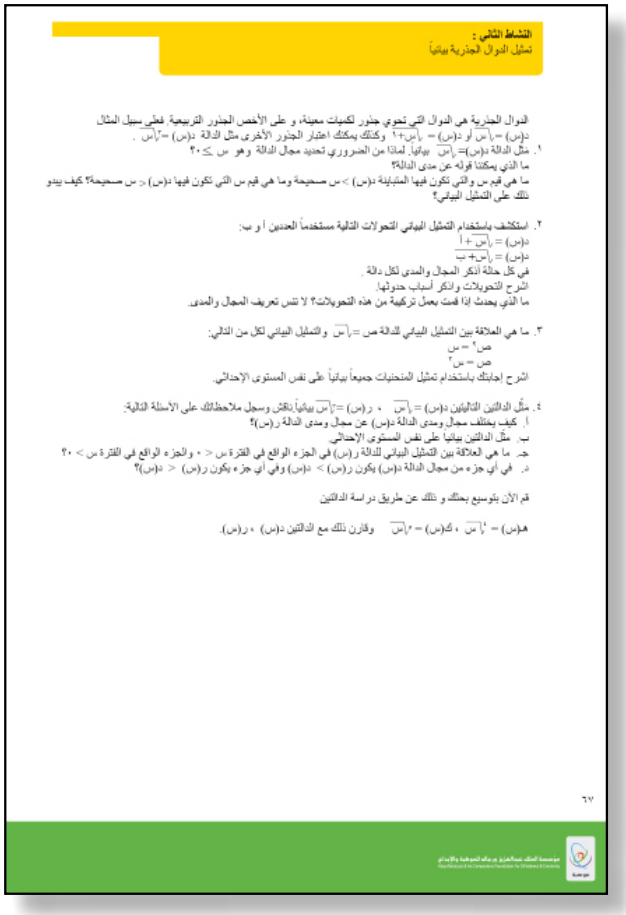
باستخدام رمز آخر مع أحرف بدلاً من الأعداد، فإن بإمكان الطلاب استنتاج الصيغة العامة لمعادلة الدائرة التي مركزها (أ ، ب) ونصف قطرها نق وهي:

(س - أ)^{٢} + (ص - ب)^{٢} = نق^{٢}

فرص التقويم

- هل لدى الطلاب المقدرة على متابعة البرهان الرياضي ومن ثمّ شرح بعض الخطوات على الأقل بأنفسهم؟
- هل لدى الطلاب المقدرة على تطبيق معرفتهم المسبقة في الأسئلة الأخيرة بدون الحاجة إلى تعليمات إضافية ؟

"موهبة .. حيث تنتمي"


النشاط الثاني :
تمثيل الدوال الجذرية بيانياً

الدوال الجذرية هي الدوال التي تحوي جذور لكميات معينة، و على الأخص الجذور التربيعية. فعلى سبيل المثال د(س) = √س أو د(س) = √س+١ . وكذلك يمكنك اعتبار الجذور الأخرى مثل الدالة د(س) = ∛س .

١. مثّل الدالة د(س)=√س بيانياً. لماذا من الضروري تحديد مجال الدالة وهو س ≥ ٠؟
ما الذي يمكننا قوله عن مدى الدالة؟

ما هي قيم س والتي تكون فيها المتباينة د(س) > س صحيحة وما هي قيم س التي تكون فيها د(س) < س صحيحة؟ كيف يبدو ذلك على التمثيل البياني؟

٢. استكشف باستخدام التمثيل البياني التحولات التالية مستخدماً العددين أ و ب:
د(س) = √س + أ
د(س) = √س+ ب
في كل حالة اذكر المجال والمدى لكل دالة.
اشرح التحويلات واذكر أسباب حدوثها.
ما الذي يحدث إذا قمت بعمل تركيبة من هذه التحويلات؟ لا تنس تعريف المجال والمدى.

٣. ما هي العلاقة بين التمثيل البياني للدالة ص = √س والتمثيل البياني لكل من التالي:
ص٢ = س
ص = س٢
اشرح إجابتك باستخدام تمثيل المنحنيات جميعاً بيانياً على نفس المستوى الإحداثي.

٤. مثّل الدالتين التاليتين د(س) = √س ، ر(س) = ∛س بيانياً باليد وسجل ملاحظاتك على الأسئلة التالية:
أ. كيف يختلف مجال ومدى الدالة د(س) عن مجال ومدى الدالة ر(س)؟
ب. مثّل الدالتين بيانياً على نفس المستوى الإحداثي.
جـ. ما هي العلاقة بين التمثيل البياني للدالة ر(س) في الجزء الواقع في الفترة س < ٠ والجزء الواقع في الفترة س > ٠؟
د. في أي جزء من مجال الدالة د(س) يكون ر(س) > د(س) وفي أي جزء يكون ر(س) < د(س)؟

قم الآن بتوسيع بحثك و ذلك عن طريق دراسة الدالتين

هـ(س) = ∛س ، ك(س) = ٢√س وقارن ذلك مع الدالتين د(س) ، ر(س).

٦٧

حول هذا النشاط

تحوي هذه الوحدة استكشاف لخصائص الدوال الجذرية وتمثيلها البياني.
يجب لفت الإنتباه هنا إلى أهمية تحديد المجال لبعض الدوال الجذرية وذلك لأن الجذور التربيعية على سبيل المثال غير معرّفة عندما تكون الأعداد سالبة.
يجب حث الطلاب على اكتشاف النتائج وانشاء تعميمات.
سيكون هذا النشاط سهل في حالة استخدام الآلات الحاسبة البيانية أو برامج التمثيل البياني.

خصائص الأداء المتقدم

- فهم الخصائص المميزة للدوال الجذرية.
- العمل بشكل منهجي والمناقشة والشرح والتواصل فيما تم استنتاجه رياضياً.

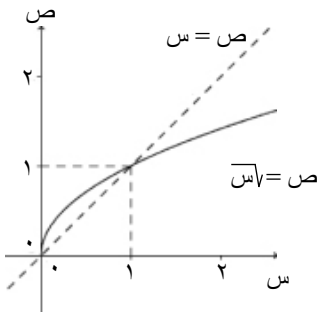
توصيات أسلوب التدريس

على الطلاب العمل على هذه الأسئلة بمفردهم وبمنأى عن المعلم.
إن المناقشة الجماعية ستساعدهم على المُضي قُدماً وبثقة كبيرة وببصيرة في الرياضيات.
ينبغي على المعلم تسهيل عملهم بشكل مستقل وفي مجموعات عندما يكون ذلك مناسباً.

إجابات الأسئلة

السؤال الأول

يفضّل في هذا السؤال أن يقوم الطلاب بانشاء جدول يحوي بعض القيم (يجب أن يشمل الجدول بعض القيم التي تكون فيها س < ١)
ومن ثم عليهم تمثيل هذه النقاط بيانياًعلى ورق رسم بياني:



مجال الدالة هو س ≥ ٠ وذلك لأن الجذر التربيعي لأي عدد سالب غير معرف (على الأقل في مجموعة الأعداد الحقيقية).
مدى الدالة هو د (س) ≥ ٠
د(س) > س عندما س > ١ و د(س) > س عندما س < ١ .
يمكن رؤية ذلك بسهولة من خلال التمثيل البياني للدالة وكذلك التمثيل البياني للمستقيم د(س) = س وملاحظة الفترات التي يكون فيها المنحنى فوق المستقيم وكذلك تحته.

السؤال الثاني

من السهل استكشاف تحويلات التمثيلات البيانية في حالة استخدام الطلاب لآلة حاسبة بيانية أو أحد برامج التمثيل البياني.وهذا سيمكنهم من تخمين ما يحدث ومن ثم يكون التركيز أكبر في البحث عن الأسباب.

أ- التمثيل البياني للدالة د(س) = $\sqrt{س}$ + أ هو إزاحة عمودية للدالة د(س) = $\sqrt{س}$ على المحور الصادي بمقدار أ.
مجال الدالة هو س ≥ ٠ والمدى هو د(س) ≥ أ .
الشرح: يتم إضافة المقدار أ إلى الإحداثي الصادي للنقطة وذلك لكل نقطة على التمثيل البياني.

ب- التمثيل البياني للدالة د(س) = $\sqrt{س + ب}$ هو إزاحة أفقية باتجاه المحور السيني بمقدار – ب.
مجال الدالة هو س ≥ – ب والمدى هو د(س) ≥ ٠ .
الشرح: الإحداث الصادي لأي نقطة على المنحنى هـ(س) = $\sqrt{س}$ يتم إيجاده على المنحنى
د(س) = $\sqrt{س + ب}$ عند قيمة س والتي هي أقل بمقدار ب من القيمة س في الدالة هـ (س).

على سبيل المثال:
هـ(س) = $\sqrt{س}$
هـ(٩) = $\sqrt{٩}$ = ٣ س = ٩ تعطينا القيمة ٣.
د(س) = $\sqrt{س + ب}$
د(٤) = $\sqrt{٤+٥}$ = $\sqrt{٩}$ = ٣(القيمة ٥ أقل من ٩) س = ٤ تعطينا القيمة ٣ .

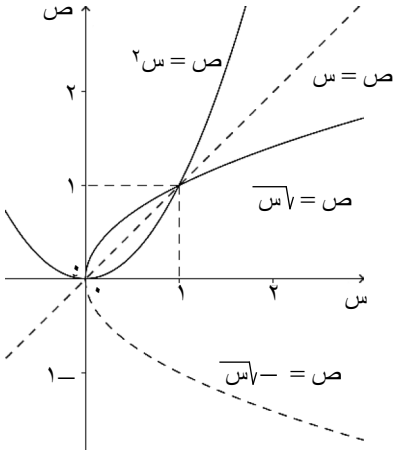
إن الجمع بين هذين التحويلين سوف يعطينا إزاحةً باتجاه المحور السيني والصادي معاً.
على سبيل المثال، د(س) = $\sqrt{س + ٢}$ – ١ (س ≥ – ٢) هو إزاحة أفقية بمقدار – ٢ باتجاه المحور السيني وإزاحة عمودية بمقدار – ١ باتجاه المحور الصادي.
مجال الدالة هو س ≥ – ٢ والمدى هو د(س) ≥ – ١ .

السؤال الثالث

أعط الطلاب الفرصة للعمل على هذا السؤال بشكل مستقل ولكن من المفيد الحصول على الإستنتاجات من خلال المناقشات الجماعية للتأكد فهمهم المشترك للسؤال.

أ. ص^{٢} = س
إذا كان ص^{٢} = س فإن ص = $\sqrt{س}$ أو ص = – $\sqrt{س}$
وبالتالي فإن التمثيل البياني للمنحنى ص^{٢} = س يتألف من التمثيل البياني للدالتين ص = $\sqrt{س}$ ، ص = – $\sqrt{س}$
(مع ملاحظة أن التمثيل البياني للدالة ص = – $\sqrt{س}$ هو إنعكاس للدالة ص = $\sqrt{س}$ على المحور السيني).
لاحظ أن المعادلة ص^{٢} = س لا تمثل دالة لأنها علاقة من عنصر إلى عدة عناصر
(فعلى سبيل المثال ٤ ← ٢ و ٤ ← – ٢).

ب. ص = س^{٢}
لقيم س ≥ ٠ فإن ص = س^{٢} هي معكوس للدالة ص = $\sqrt{س}$.
التمثيل البياني لأحدهما هو إنعكاس للآخر حول المستقيم ص = س.
لقيم س ≥ ٠ فإن ص = س^{٢} هو معكوس للدالة ص = - $\sqrt{س}$.
التمثيل البياني لأحدهما هو إنعكاس للآخر حول المستقيم ص = س .
يمكن مشاهدة هذه الدوال في الشكل التالي.



من الممكن ملاحظة أن التمثيل البياني للمنحنى ص^{٢} = س هو إنعكاس للمنحنى ص = س^{٢} حول المستقيم ص = س.

السؤال الرابع

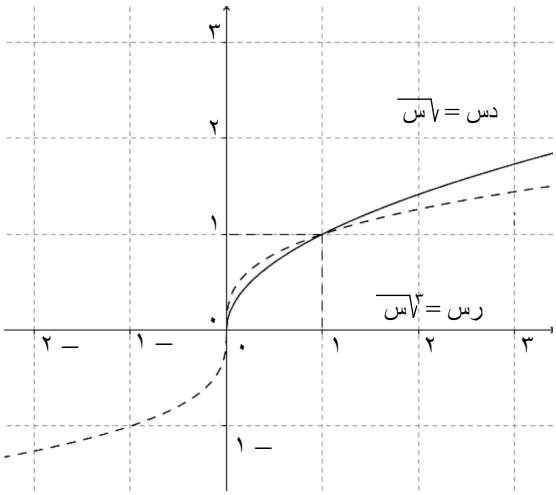
اقتصرت الدراسة حتى الآن على دوال الجذور التربيعية، سيتم الآن دراسة العلاقة بين الجذور التربيعية والجذور ذات الرتبة العليا. إن استخدام أحد برامج التمثيل البياني سيساعد كثيراً على إجراء هذه الدراسة.
الشكل التالي يوضح التمثيل البياني لكل من الدالتين
د(س) = $\sqrt{س}$ ، ر(س) = $\sqrt[٣]{س}$

"موهبة .. حيث تنتمي"

فرص التقويم

يستكشف الطلاب في هذا النشاط خصائص الدوال الجذرية والنتائج بأنفسهم.

- هل فهم الطلاب خصائص الدوال الجذرية وتعرّفوا على التمثيل البياني لها وكذلك تعرّفوا على أسباب الحاجة إلى تحديد المجال؟
- هل لدى الطلاب المقدرة على تنظيم عملهم وشرح وتبرير النتائج التي توصّلوا إليها؟



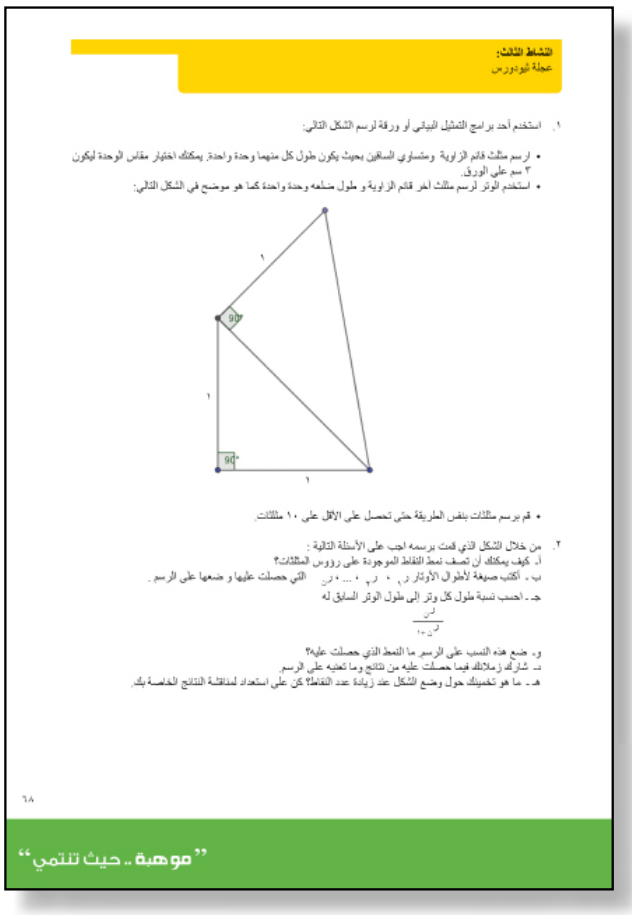
أ. حيث أن الجذر التكعيبي يكون معرّف دائماً حتى للأعداد السالبة
(على سبيل المثال $\sqrt[3]{-٨} = -٢$)
فإن المجال والمدى لهذه الدالة يشمل جميع الأعداد الحقيقية.

جـ. إن حساب الجذر التكعيبي لعدد أو عددين سوف يوضح المساواه ر(- س) = - ر(س) وهذا يعني أن السبب في أن التمثيل البياني للدالة ر(س) عندما س > ٠ هو انعكاس للتمثيل البياني عندما س < ٠ حول المحور السيني ثم المحور الصادي أو بعكس الترتيب .
يمكن النظر إلى ذلك بشكل آخر على أنه دوران بزاوية ١٨٠° حول نقطة الأصل.

د. ر(س) < د(س) في حالة أن س < ١ وكذلك فإن
ر(س) = د(س) عندما س = ١ وكذلك فإن ر(س) < د(س) عندما س < ١. يمكن التأكّد من هذه الحالات عن طريق تعويض بعض القيم الموجودة في الفترة المعطاه للتمثيلين البيانيين.

الدالة هـ(س) = $\sqrt[٤]{س}$ لها سلوك مشابه لدالة الجذر التربيعي د(س) = $\sqrt{س}$ حيث أن الدالة غير معرّفة عندما س < ٠ .
الدالة ك(س) = $\sqrt[٥]{س}$ لها سلوك مشابه لدالة الجذر التكعيبي ر(س) = $\sqrt[٣]{س}$ حيث أن التمثيل البياني عندما س < ٠ هو إنعكاس مضاعف للدالة عندما س > ٠ .

مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع
King Abdulaziz & his Companions Foundation for Giftedness & Creativity
موهبة


النشاط الثالث:
عجلة ثيودورس

١. استخدم أحد برامج التمثيل البياني أو ورقة لرسم الشكل التالي:

- ارسم مثلث قائم الزاوية ومتساوي الساقين بحيث يكون طول كل منهما وحدة واحدة. يمكنك اختيار مقاس الوحدة ليكون ٣ سم على الورق.
- استخدم الوتر لرسم مثلث اخر قائم الزاوية و طول ضلعه وحدة واحدة كما هو موضح في الشكل التالي:

- قم برسم مثلثات بنفس الطريقة حتى تحصل على الأقل على ١٠ مثلثات.

٢. من خلال الشكل الذي قمت برسمه اجب على الأسئلة التالية :
أ. كيف يمكنك أن تصف نمط النقاط الموجودة على رؤوس المثلثات؟
ب. اكتب صيغة لأطوال الأوتار ر١ ، ر٢ ، ر٣ ، ... ، رن التي حصلت عليها و ضعها على الرسم.
جـ. احسب نسبة طول كل وتر إلى طول الوتر السابق له

$$\frac{ر_{ن+١}}{ر_ن}$$

و. ضع هذه النسب على الرسم. ما النمط الذي حصلت عليه؟
ز. شارك زملائك فيما حصلت عليه من نتائج وما تعنيه على الرسم.
هـ. ما هو تخمينك حول وضع الشكل عند زيادة عدد النقاط؟ كن على استعداد لمناقشة النتائج الخاصة بك.

٦٨

"موهبة .. حيث تنتمي"

حول هذا النشاط

يربط هذا النشاط الدوال الجذرية بالهندسية من خلال دراسة عجلة ثيودورس وهي تعتبر مثال للأشكال الحلزونية الرياضية.
سوف يكون لدى الطلاب الفرصة لإنشاء مثال يتم استخدامه لدراسة العلاقات من خلال العجلة.
عند بناء العجلة من مثلثات قائمة الزاوية فإن العديد من الجذور التربيعية سوف تتشكل.
يحتاج الطلاب إلى تمثيل الدوال الجذرية بيانياً وتفسير ما وجدوه من خلال هندسة الشكل الحلزوني.

خصائص الأداء المتقدم

- فهم الخصائص المميزة للدوال الجذرية في الرياضيات.
- الربط بين المجالات المختلفة في الرياضيات (الربط بين الهندسة والجبر).

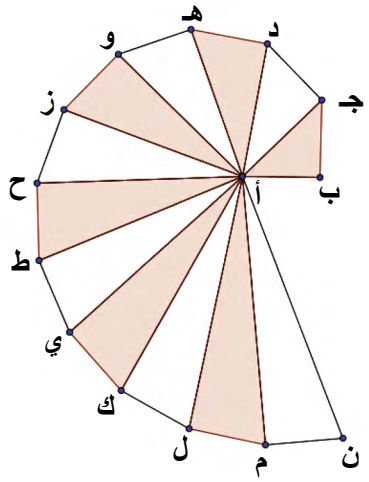
توصيات أسلوب التدريس

يجب على الطلاب إنشاء عجلة ثيودورس الخاصة بهم إمّا عن طريق الرسم اليدوي أو باستخدام أحد برامج الهندسة الديناميكية.
يفضّل أن يتم تحليل نتائج الطلاب من خلال مجموعات ثنائية وذلك لتحسين درجة الدقة وللمساعدة في تفسير النتائج (خصوصاً عند استخدام الجذور الصمّاء).
يحتاج المعلّم إلى أن يوجّه الطلاب للعمل معاً في أوقات معيّنة لمعرفة مدى فهمهم ومقدرتهم على شرح ما توصّلوا إليه وكذلك لدراسة خصائص الشكل الحلزوني.

إجابات الأسئلة

السؤال الأول

إن عجلة ثيودورس ليست إلاّ أحد الطرق العديدة لإنشاء شكل حلزوني.
إن النهج المقترح ليس الهدف منه هو إعطاء الشكل ولكن جعل الطلاب يبدأون بأنفسهم بإنشاء الشكل ومن ثمّ ملاحظة ما يحدث.
يجب أن يكون الشكل الذي تمّ عمله مطابق للشكل المُعطى في الأسفل علماً أنه يمكن رسمه باتجاه أو بعكس اتجاه عقارب الساعة من أي نقطة بداية.
سوف يكون لدى الطلاب الحريّة في اختيار الطول المناسب للضلع أ ب والذي يجب أن يكون مساوياً لأطوال الأضلاع ، لكل من ب جـ، جـ د، د هـ وهكذا.



السؤال الثاني

أ. من المتوقّع أن يلاحظ الطلاّب أن النقاط الواقعة على الرؤوس تتوافق مع أنماط الشكل الحلزوني. لذا يجب على المعلّم تشجيع الطلاب وحثّهم على التفكير في كيفية استمرارية الشكل وما سيحدث عند التوسّع في تمديد الشكل الحلزوني.

ب. يمكن تلخيص أطوال الأوتار للمثلّثات القائمة الزاوية وكذلك النسب بين طول كل وتر والوتر السابق له (الفقرة جـ) في الجدول التالي :

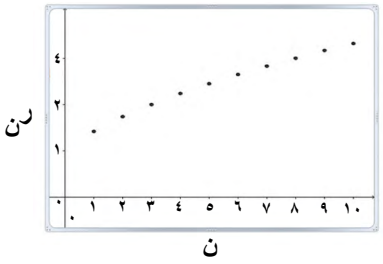
عدد المثلثات ن	الوتر ر ن	نسب الأضلاع هـ ن = ر ن / ر ن - ١
١	$\sqrt{٢}$	
٢	$\sqrt{٣}$	$\frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٢}}$
٣	$\sqrt{٤}$	$\frac{\sqrt{٤}}{\sqrt{٣}}$
....	.....	.....
ن	$\sqrt{ن + ١}$	$\frac{\sqrt{ن + ١}}{\sqrt{ن}}$

يجب على الطلاب معرفة التمثيل البياني للدالة

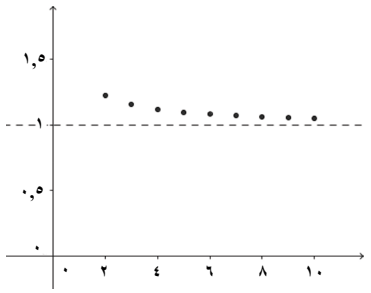
هـ ن = ن + ١ من خلال عملهم على النشاط الثاني، مع الأخذ بعين الإعتبار أن المنحنى ليس متصل ولكن يتكون من مجموعة من النقاط المتقطعة.

(إن هذا سوف يقود بعض الطلاب إلى التفكير في معنى النقاط الوسطية ومدى احتمالية استيفاء هذه القيم للحصول على منحنى متّصل بدلاً من الحصول على مجموعة من القطع المستقيمة).

التمثيل البياني للدالة ر ن معطى في الشكل التالي:



جـ. التمثيل البياني للنسب هـ ن = $\frac{ر ن}{ر ن - ١}$ معطى في الشكل التالي:



يمكن إجراء بعض النقاش حول حساب الجذور الصمّاء لذا يجب على الطلاب معرفة الصيغ المكافئة لتلك الجذور على الأقل.

- حساب كل جذر بشكل منفصل $\frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٢}}$
- إنطاق المقام يعطينا $\left(\frac{\sqrt{٦}}{٢}\right)$
- كتابة الصيغة كجذر لعدد واحد فقط $\sqrt{\frac{٣}{٢}}$ ن

سوف يلاحظ الطلاب أنه كلما زادت قيمة ن فإن نقاط المنحنى تقترب من القيمة ١ من الأعلى.

من المفيد أن يقوم الطلاب بإعادة صياغة هـ ن على النحو التالي:

$$هـ_ن = \frac{\sqrt{ن + ١}}{\sqrt{ن}} = \sqrt{\left(\frac{ن + ١}{ن}\right)} = \sqrt{\left(١ + \frac{١}{ن}\right)}$$

يجب حث الطلاب على ربط الجبر (وعلى الأخص سلوك ١ + $\frac{١}{ن}$ عند تزايد قيمة ن) مع شكل التمثيل البياني للدالة.

د. إن الهدف من هذه الحسابات هو التبصّر في هندسة الشكل الحلزوني، لذلك فإن ملاحظة النسب لأطوال الأوتار المتتالية سوف تقترب من القيمة ١ مما يعني أن أضلاع الشكل الحلزوني سوف تقترب من نفس القيمة وهذا يعني أن المثلث سوف يكون قريباً من شكل المثلث المتساوي الأضلاع (له قاعدة طولها وِحدة واحدة).

مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع
King Abdulaziz & his Companions Foundation for Giftedness & Creativity
موهبة

هـ. يجب على المعلّم اختيار الوقت المناسب لإنخراط الطلاب في مناقشة ما يحدث هندسياً، حيث ستشمل المناقشة كتابة الملاحظات حول أنماط الشكل الحلزوني وكيفية استمراره. فعلى سبيل المثال، قد يلاحظ الطلاب أن الأوتار على الدوائر توصل بالمركز من خلال أنصاف أقطار فإنها تشكّل مثلثات متساوية الساقين، وبالتالي فإن عجلة ثيودورس سوف تستمر بشكل حلزوني وتقترب من المسار الدائري تقريباً.
هناك العديد من الأسئلة التي يمكن طرحها ومنها على سبيل المثال:
في أي مرحلة تبدأ المثلثات في التداخل حول نفسها وأخذ الشكل الحلزوني؟
هذا السؤال يشمل حساب مجموع الزوايا الموجودة في المركز.

$$\text{ظا}^{-1}(1) + \text{ظا}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + \text{ظا}^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + \ldots$$

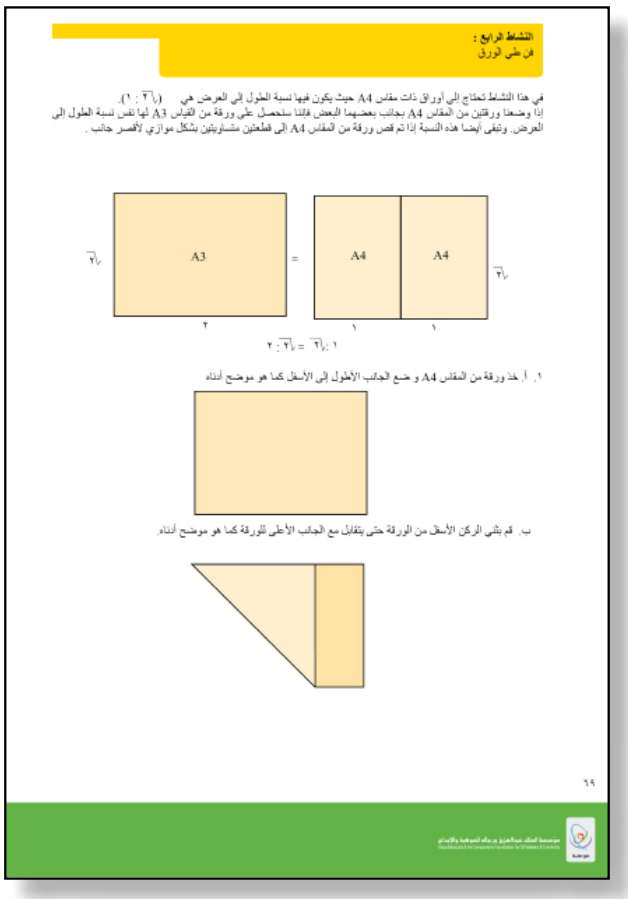
(يبدو أن هذا يحصل عندما تصل قيمة الوتر للمثلث إلى $\sqrt{17}$)
هناك سؤال آخر: هل من الممكن أن تتطابق أذرع الشكل الحلزوني؟
(الجواب هو لا ولكن هذا يصعب إثباته)
من الممكن أن يرغب الطلاب في إستكشاف أكثر لعجلة ثيودورس والأشكال الحلزونية الأخرى.
يجب على المعلّم أخذ الفرصة للحديث عن تاريخ إكتشاف الأشكال الحلزونية الأخرى في الرياضيات ووجودها في الطبيعة.

فرص التقويم

الهدف من هذا النشاط هو استخدام الهندسة للعمل على الدوال الجذرية.

- هل لدى الطلاب المقدرة على العمل على الجذور الصمّاء والدوال الجذرية؟
- هل يستطيع الطلاب شرح وتفسير أهمية النتائج الجبرية في ضوء الشكل الهندسي للحلزون؟

"موهبة .. حيث تنتمي"


النشاط الرابع :
فن طي الورق

في هذا النشاط نحتاج إلى أوراق ذات مقاس A4 حيث يكون فيها نسبة الطول إلى العرض هي (√٢ : ١).
إذا وضعنا ورقتين من المقاس A4 بجانب بعضهما البعض فإننا سنحصل على ورقة من القياس A3 لها نفس نسبة الطول إلى العرض. ونبقى أيضا هذه النسبة إذا تم قص ورقة من المقاس A4 إلى قطعتين متساويتين بشكل موازي لأقصر جانب .

٢ : √٢ = √٢ : ١

أ. خذ ورقة من المقاس A4 و ضع الجانب الأطول إلى الأسفل كما هو موضح أدناه

ب. قم بثني الركن الأسفل من الورقة حتى يتقابل مع الجانب الأعلى للورقة كما هو موضح أدناه.

٦٩

حول هذا النشاط

في هذا النشاط يتم التدرّب على استخدام فن طي الورق لتطبيق استخدام الجذور الصماء وعلى الأغلب √٢.
سوف يستمتع الطلاب من خلال العمل على هذا النشاط والذي سيمثل إنطلاقةً لهم لعمل دراسات أو بحوث أخرى وسوف يكون لديهم الفرصة لإختراع طرقهم الخاصة بطي الورق والذي يعطي نوعاً من التحدي للآخرين.
يحتاج السؤال الثاني إلى بعض الإستنتاجات الهندسية البسيطة وكذلك على الطلاب أن يكونوا على دراية بخصائص شكل الطائرة الورقية.

خصائص الأداء المتقدم

- التقصي الرياضي
- تكوين الصورة الذهنية والبرهان

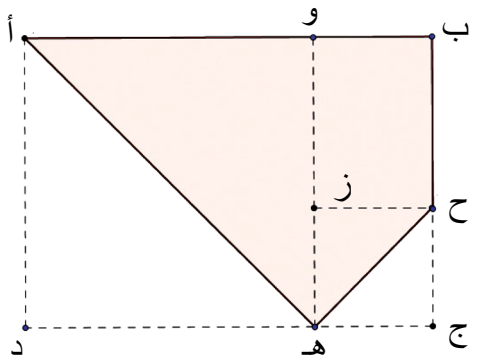
توصيات أسلوب التدريس

هذا النشاط مناسب تماماً للعمل عليه من خلال مجموعات ثنائية من الطلاب وذلك لتشجيعهم على المناقشة والاختبار.
يمكن للطلاب التدرب على البرهان مع بعضهم البعض حتى يتم تحسين البرهان.
في الجانب الإبداعي من هذا النشاط، يمكن للطلاب اختبار إبداعاتهم مع بعضهم أو من خلال مجموعات ثنائية أو على إنفراد.

إجابات الأسئلة

السؤال الأول

الشكل الذي سيتم عمله هو على شكل طائرة ورقية والذي يمكن إثباته على النحو التالي:



أطوال جوانب ورقة مقاس A4 هي أ ب = جـ د = $\sqrt{٢}$ وكذلك أ د = ب جـ = ١.
عند ثني الورقة فإن أ و هـ د سيكون مربع طول ضلعه ١ ولذلك باستخدام نظرية فيثاغورس نجد أن القطر أهـ = $\sqrt{٢}$ وبالتالي فإن أ ب = أ هـ.
هـ جـ = $\sqrt{٢}$ – ١ وعند ثني الورقة نجد أن الشكل هـ جـ ح ز يمثل مربع، بحيث أن ح جـ = هـ ز = $\sqrt{٢}$ – ١ .
بتطبيق نظرية فيثاغورس على المثلث هـ جـ ح نحسب طول الوتر
ح هـ = $\sqrt{(\sqrt{٢}-١)^{٢}+(\sqrt{٢}-١)^{٢}}$ = $\sqrt{٢(\sqrt{٢}-١)^{٢}}$
= $\sqrt{٢}(\sqrt{٢}-١)$ = $\sqrt{٢}-٢$
ب ح = ب جـ – جـ ح = ١ – ($\sqrt{٢}$ – ١) = ٢ – $\sqrt{٢}$.
وبالتالي فإن ب ح = ح هـ وكذلك فإن الشكل أ ب ح هـ يمثل طائرة ورقية بمحيط
٢ (أب + ب ح) = ٢ ($\sqrt{٢}$ + ٢ – $\sqrt{٢}$) = ٤.
يمكن حساب المساحة عن طريق حساب مساحة المثلثين القائمين المتطابقين أ ب ح ، أ هـ ح.
مساحة الطائرة الورقية = ٢($\frac{١}{٢}$ أهـ × ب ح) = $\sqrt{٢}$ (٢-$\sqrt{٢}$)
= ٢$\sqrt{٢}$ – ٢ = ٢($\sqrt{٢}$ – ١).

السؤال الثاني
هذا السؤال هو توسع للسؤال السابق حيث يتم إعطاء الفرصة للطلاب بإنشاء أشكال خاصة بهم عن طريق الطي باستخدام ورق من المقاس A4 بأبعاد ١ × $\sqrt{٢}$ ، وبالتالي فإن هناك العديد من الأشكال المحتملة التي يمكن للطلاب عملها.
يمكن حث الطلاب على محاولة عمل أشكال مشابهة وأشكال متطابقة.

فرص التقويم
في هذا النشاط يتم تطبيق معرفة الطلاب في المسائل الهندسية العملية ومن ثم حثهم على عمل أشكال خاصة بهم.

- هل قام الطلاب بالعمل بمنهجية في مرحلة التدريب والإستكشاف للسؤال من خلال بناء سلسلة خاصة بهم من الحقائق الهندسية؟
- هل لدى الطلاب المقدرة على تطبيق التسلسل المنطقي في الإستنتاج الهندسي لكي يقوموا بإثبات أن الشكل الناتج هو شكل طائرة ورقية؟

"موهبة .. حيث تنتمي"

الوحدة العاشرة

الإحصاء والاحتمالات

مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع
King Abdulaziz & his Companions Foundation for Giftedness & Creativity
موهبة

نظرة عامة

تعطي هذه الوحدة الفرصة للطلاب لاستكشاف كل من الاحتمالات التجريبية والنظرية والعمل على مشاريع إحصائية قصيرة. بعض هذه الأنشطة بحاجة إلى استخدام تقنية البرامج الحاسوبية مثل برامج التمثيل البياني وكذلك في بعض الأحيان برامج الجداول الإلكترونية.
يجب حث الطلاب على عرض النتائج التي توصلوا إليها على بعضهم البعض.

الأهداف التعلمية للوحدة

- دراسة مجموعة النتائج المختلفة في الاحتمالات التجريبية والنظرية.
- تطبيق المعرفة المسبقة بالمتوسط ومقاييس النزعة المركزية والانتشار والتبرير الرياضي للاستنتاجات من اثنين من التوزيعات.
- اختيار وبناء الرسوم المناسبة باستخدام تقنية المعلومات ICT إذا تطلب الأمر لدعم النتائج.

المعرفة السابقة

- المعرفة بالاحتمالات بشكل مبسّط والخبرة في انشاء الرسوم الشجرية لتمثيل فضاء العيّنة.
- المعرفة المسبقة بالوسط والوسيط والمنوال والمدى وكذلك المدى الربيعي وتمثيلها باستخدام التمثيل بالصندوق وطرفيه والمقدرة على استخدام الجداول الالكترونية للعمل على البيانات.

خصائص الأداء المتقدم

القيم و الإتجاهات و السمات

- المرونة (النشاط الرابع)
- القبول بحالة انعدام اليقين (النشاطان الثاني، والثالث)
- الإبداع (النشاطان الأول، والرابع)
- الاستقلالية والمثابرة على الدراسة (النشاط الثاني)
- العمل المنهجي المنظم (النشاط الأول)

المهارات المتقدمة

- التفكير المنطقي والاستدلال (الأنشطة الثالث، والرابع، والخامس)
- إقامة الصلات بين مختلف مجالات الرياضيات (النشاط الخامس)

المعرفة و الفهم المتقدمان

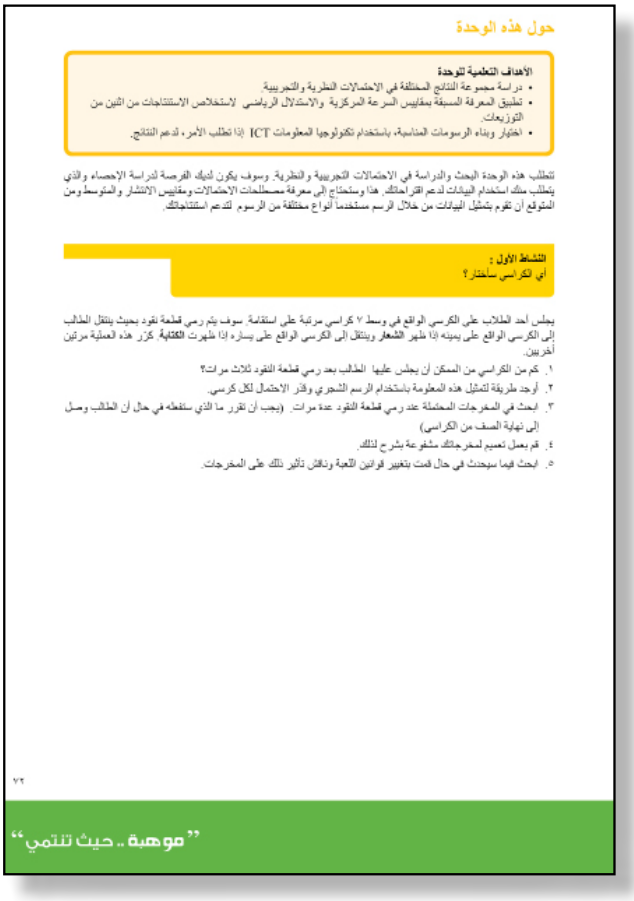
- وضوح المفاهيم (النشاطان الثاني، والثالث)
- إقامة الصلات (النشاط الثالث)
- التحقق والبرهان (الأنشطة الأول، والثاني، والرابع)

الخطة الزمنية

ست ساعات تقريباً.

المصادر

يحتاج الطلاب إلى دبابيس ومجموعة مختارة من النقود المعدنية وكذلك استخدام تقنية البرامج الحاسوبية مثل برامج التمثيل البياني وبرامج الجداول الإلكترونية وكذلك جداول وبيانات يتم تحديدها في الوحدة


حول هذه الوحدة

الأهداف التعليمية للوحدة
- دراسة مجموعة النتائج المختلفة في الاحتمالات النظرية والتجريبية
- تطبيق المعرفة السابقة بمقاييس السرعة المركزية والاستدلال الرياضي لاستخلاص الاستنتاجات من اثنين من التوزيعات.
- اختيار وبناء الرسومات المناسبة، باستخدام تكنولوجيا المعلومات ICT إذا تطلب الأمر، لدعم النتائج.

تتطلب هذه الوحدة البحث والدراسة في الاحتمالات التجريبية والنظرية. وسوف يكون لديك الفرصة لدراسة الإحصاء والذي يتطلب منك استخدام البيانات لدعم اقتراحاتك. هذا وستحتاج إلى معرفة مصطلحات الاحتمالات ومقاييس الانتشار والمتوسط ومن المتوقع أن تقوم بتمثيل البيانات من خلال الرسم مستخدماً أنواع مختلفة من الرسوم لتدعم استنتاجاتك.

النشاط الأول :
أي الكراسي سأختار ؟

يجلس أحد الطلاب على الكرسي الواقع في وسط ٧ كراسي مرتبة على استقامة. سوف يتم رمي قطعة نقود بحيث ينتقل الطالب إلى الكرسي الواقع على يمينه إذا ظهر **الشعار** وينتقل إلى الكرسي الواقع على يساره إذا ظهرت **الكتابة**. كرّر هذه العملية مرتين أخريين.

١. كم من الكراسي من الممكن أن يجلس عليها الطالب بعد رمي قطعة النقود ثلاث مرات؟
٢. أوجد طريقة لتمثيل هذه المعلومة باستخدام الرسم الشجري وقانون الاحتمال لكل كرسي.
٣. ابحث في المخرجات المحتملة عند رمي قطعة النقود عدة مرات. (يجب أن تقرر ما الذي ستفعله في حال أن الطالب وصل إلى نهاية الصف من الكراسي)
٤. قم بعمل تعميم لمخرجاتك مشفوعة بشرح لذلك.
٥. ابحث فيما سيحدث في حال قمت بتغيير قوانين اللعبة وناقش تأثير ذلك على المخرجات.

٧٢

"موهبة .. حيث تنتمي"

حول هذا النشاط

في هذا النشاط يعمل الطلاب على حساب بعض الاحتمالات المبسّطة حيث ستظهر للطلاب بعض النتائج المفاجئة وسوف يزيد من مدى فهم الطلاب للاحتمالات عند استخدام المخططات.
إن رمي قطعة النقود عدة مرات سوف يُظهر وبشكل سريع التباين بين النتائج من خلال الأعداد الفردية والزوجية وبالتالي يجب تشجيع الطلاب على إيجاد التعميمات.
يحتاج الطلاب في هذا النشاط إلى اتّخاذ بعض القرارات حول هيكلية التحقق من النتائج.

خصائص الأداء المتقدم

- الابداع والمنهجية عند وضع استراتيجية في التسجيل.
- تطوير التعميمات.

توصيات أسلوب التدريس

السؤال الأول هو مقدّمة مرة أخرى للاحتمالات ويمكن عمل نمذجة مع الطلاب بصورة موجزة.
السؤال الثاني والثالث ملائمان للعمل من خلال مجموعات ثنائية بينما يفضّل العمل على السؤال الرابع من خلال مناقشات جماعية.
السؤال الخامس يعتبر اختياري. أعط بعض الوقت للطلاب لاستكشاف بعض الأفكار ولكن يجب أن لا يأخذ العمل على جميع الأسئلة أكثر من ساعة واحدة.

إجابات الأسئلة

السؤال الأول

قم بترتيب سبعة كراسي على استقامة واشرح قوانين التجربة للطلاب.
قم بالتطبيق من خلال الطلب من أحد الطلاب كي يبدأ من الكرسي الأوسط ويتحرّك بحسب نتيجة رمي القطعة المعدنية ثلاث مرات.
اطلب من الطلاب أن يلاحظوا الموقع النهائي للطالب بعد رمي القطعة المعدنية ثلاث مرات.
سوف يشاهد الطلاب أن الطالب سوف ينتهي فقط في أحد الكرسيين الطرفيين أو أحد الكرسيين المجاورين للكرسي الواقع في الوسط.

مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع
King Abdulaziz & his Companions Foundation for Giftedness & Creativity
موهبة

السؤال الثاني

يقوم الطلاب باجراء التجربة عدة مرات وفي مجموعات ثنائية ويقوموا بانشاء نوع من التمثيل البياني مثل الرسم الشجري.

الاحتمالات الناشئة عن رمي قطعة النقود المعدنية ثلاث مرات هي كالتالي:

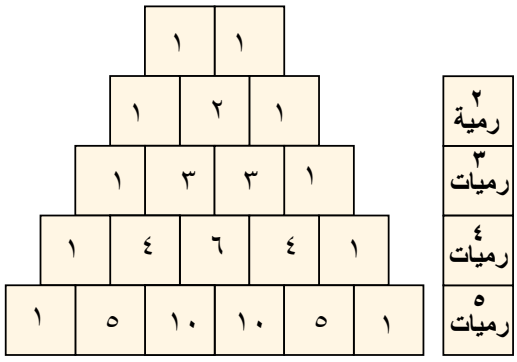
الكرسي	٣	٢	١	الوسط	١	٢	٣
	$\frac{١}{٨} \times ١$		$\frac{١}{٨} \times ٣$		$\frac{١}{٨} \times ٣$		$\frac{١}{٨} \times ١$
الاحتمالات	$\frac{١}{٨}$	٠	$\frac{٣}{٨}$	٠	$\frac{٣}{٨}$	٠	$\frac{١}{٨}$

السؤال الثالث

يستمر الطلاب بالعمل في مجموعات ثنائية على هذا السؤال من خلال دراستهم للنتائج المحتملة من رمي قطعة النقود المعدنية عدد مختلف من المرات وتسجيل نتائجهم بطريقة منهجية.

في حالة رمي القطعة المعدنية أكثر من ثلاث مرات فيجب عليهم ملاحظة حاجتهم لكراسي إضافية أو يتم تغيير قوانين التجربة.

قم بحث الطلاب على المناقشة الجماعية لتحديد مايجب عمله.



السؤال الرابع

يجب حث الطلاب على التفريق بين عدد مرات رمي قطعة النقود إذا كان زوجي أو فردي وايجاد تعميم لذلك وشرح أسباب مرات انشغال الكراسي المجاورة للوسط غالباً.

من الممكن أن تشمل التعميمات كل مما يلي:

- في حالة كان عدد مرّات رمي قطعة النقود عدد زوجي، فإن الكرسي الموجود في الوسط والكراسي التي ترتيبها عدد زوجي فقط سوف يتم إشغالها.
- في حالة كان عدد مرات رمي قطعة النقود عدد فردي، فإن الكرسي الموجود في الوسط يكون فارغاً أو أن الكراسي ذات الترقيم الفردي سوف يتم إشغالها.
- عند إضافة كراسي في النهاية ورمي قطعة النقود عدد أكبر من المرات، فإن الاحتمالات المتوقعة سوف تتبع مثلث باسكال (عدد مرات الجلوس لكرسي ما، هو العدد المناظر في مثلث باسكال).

يجب أن يلاحظ الطلاب التماثل في الاحتمالات أو في المخططات.

يجب حث الطلاب على اجراء نقاش الجماعي في حالة تغيير القانون ورمي قطعة النقود أكثر من ثلاث مرات.

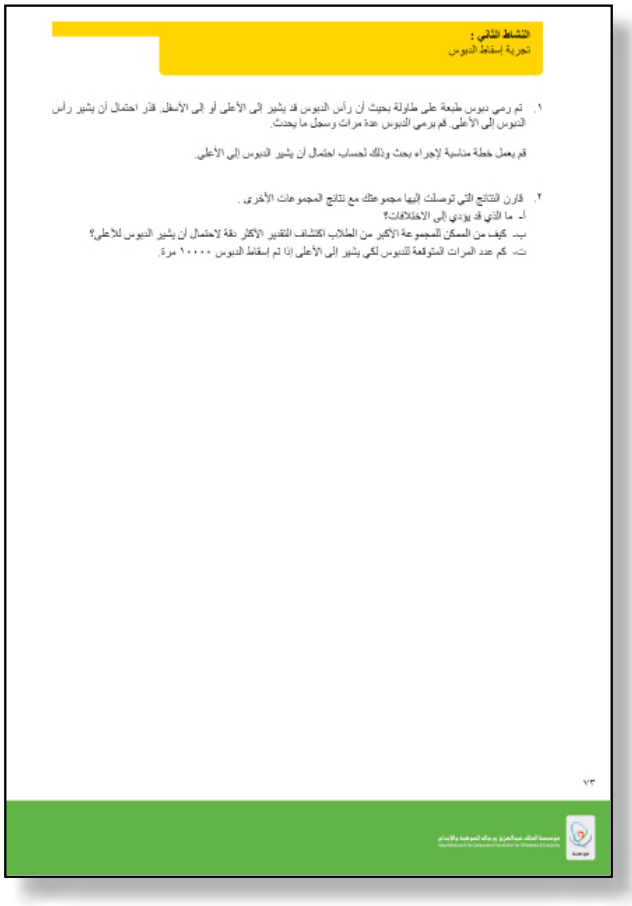
السؤال الخامس

يعتبر هذا السؤال فرصة للطلاب لكي يكونوا مبدعين من خلال تغيير قوانين التجربة وفهمهم لتأثير ما سيحصل.

فرص التقويم

تعطي الأسئلة في هذا النشاط الفرصة للطلاب لاثبات فهمهم للاحتمالات والتأكّد من ايجاد جميع الاحتمالات الممكنة وتسجيلها.

- هل يستطيع الطلاب تمثيل فضاء العيّنة من خلال العمل بمنهجية لحصر جميع البدائل الممكنة؟


النشاط الثاني :
تجربة إسقاط الدبوس

١. تم رمي دبوس طبعة على طاولة بحيث أن رأس الدبوس قد يشير إلى الأعلى أو إلى الأسفل. قدّر احتمال أن يشير رأس الدبوس إلى الأعلى. قم برمي الدبوس عدة مرات وسجل ما يحدث.

قم بعمل خطة مناسبة لإجراء بحث وذلك لحساب احتمال أن يشير الدبوس إلى الأعلى.

٢. قارن النتائج التي توصلت إليها مجموعتك مع نتائج المجموعات الأخرى.
أ. ما الذي قد يؤدي إلى الاختلافات؟
ب. كيف من الممكن للمجموعة الأكبر من الطلاب اكتشاف التقدير الأكثر دقة لاحتمال أن يشير الدبوس للأعلى؟
ت. كم عدد المرات المتوقعة للدبوس لكي يشير إلى الأعلى إذا تم إسقاط الدبوس ١٠٠٠٠ مرة.

٧٣

حول هذا النشاط

يستكشف الطلاب في هذا النشاط الاحتمالات بشكل عملي، حيث يتم إسقاط دبّوس طبعة ويتم بعد ذلك دراسة احتمال أن يشير الدبوس إلى الأعلى عند رميه. تعتبر هذه التجربة بسيطة نوعا ما مقارنة بما تم دراسته في النشاط ١ حيث لا يوجد حل نظري واضح.
ينبغي إذا لزم الأمر حث الطلاب على معرفة مزايا تجميع النتائج الحاصلة ووضع خطة عمل لتجاربهم وذلك لضمان الاتّساق في العمل

خصائص الأداء المتقدم

- العمل بشكل مستقل لإعداد البحث المطلوب وتحديد المعايير.
- تقبُّل حالات عدم اليقين بالنسبة للنتائج وطبيعة التجربة من منظور رياضي.

توصيات أسلوب التدريس

يجب العمل على هذا النشاط من خلال المناقشات الجماعية.
تعتبر هذه التجربة ملائمة للعمل من خلال مجموعات صغيرة أو على مجموعات ثنائية من الطلاب.
إن إنشاء الفرضيات ومقارنة النتائج يمكن دعمه عن طريق تدخّلات المعلّم في توقيت مأخوذ بعناية لاستخلاص النقاط في جلسة عامة داخل الفصل قبل مواصلة العمل الجماعي.

إجابات الأسئلة

إن دور المعلّم في هذا النشاط هو المراقبة والاستماع للمساعدة في إثراء النقاش.
إن التقديرات المبدئية للاحتمالات سوف تختلف من طالب إلى آخر وهذا يُظهر مدى صعوبة التنبؤ بالحادثة، لذا ينبغي على الطلاب أن يكونوا واقعيين في تصميمهم لتجاربهم والكيفية التي ينبغي عليهم تكرار التجربة على نحو معقول للحصول على نتيجة منطقية.
على الرغم من أن بعض المتغيّرات الحالية في هذه التجربة (كيفية حمل الدبّوس قبل إسقاطه، والإرتفاع الذي يُسقط منها الدبّوس وكذلك طبيعة السطح الذي يُسقط عليه الدبّوس) فإنه على المعلّم ان لايتدخّل مبكّرا وأن يسمح بوجود هذه العوامل كي يتم استخلاصها من قِبل الطلاب.

من المثير للإهتمام أن يتم تقسيم الطلاب إلى مجموعتين ومن ثم يتم مقارنة نتائج المجموعتين في النهاية، فيما قد يرغب البعض في العمل من خلال مجموعات ثنائية وبنفس الأسلوب حيث يتم إسقاط الدبّوس من ارتفاع ثابت ويتم رميه على أسطح متطابقة وفي هذه الحالة يتم الجمع بين النتائج.
سوف يكون هناك فرصة جيّدة في نهاية التجربة لتلخيص النتائج لكل مجموعة ومناقشة الجدوى والتأثير من جمع تلك النتائج من المجموعات المختلفة.

فرص التقويم

يعطي هذا النشاط الفرصة للطلاب لكي يظهروا مدى استقلاليتهم في تحديد معالم التجربة.

- هل عمل الطلاب بشكل مستقل في إعداد البحث المطلوب وتحديد المعايير؟
- هل تقبّل الطلاب حالة عدم اليقين للنتائج التي تحصّلوا عليها وعملوا بشكل جماعي ومنهجي للحدّ من التباين في التجربة؟

حول هذا النشاط

يدرس الطلاب في هذا النشاط مجموعة من النتائج التي تم التحصّل عليها عن طريق رمي أربع أزواج من المكعّبات الغامضة (مرقمّة بشكل خاطئ).
إن الطلاب بحاجة إلى تشكيل وتبرير فرضياتهم حول الفروقات في الأعداد الموجودة على أوجه المكعّب الغير مرئية. يحتاج الطلاب إلى المعرفة المسبقة بمخطّطات فضاء العيّنة والاحتمالات النظرية لكشف الغموض، حيث سيعمل الطلاب على تطوير استراتيجية من خلال عملهم السابق لمساعدتهم على حل المسائل اللاحقة بسرعة أكبر.

خصائص الأداء المتقدم

- تطوير التفكير المنطقي والاستنتاج الرياضي.
- تقبّل حالة عدم اليقين في البيانات التجريبية.

توصيات أسلوب التدريس

يتم العمل على جميع الأسئلة الأربع بنمط واحد ويمكن العمل عليها بشكلٍ مستقل أو من خلال مجموعات صغيرة.
يمكن للمعلّم تجميع الطلاب عند الحاجة للمشاركة في النقاط الرئيسية وكذلك للمشاركة في تبادل الإستراتيجيات والتقدّم في العمل ولكن فيما عدا ذلك يجب عليه الإكتفاء بمراقبة الطلاب والتدخل عند الحاجة فقط.
قد يرغب الطلاب الذين لديهم دراية بالجداول الالكترونية باستخدامها لضبط تمثيلاتهم لفضاء العيّنة.

إجابات الأسئلة

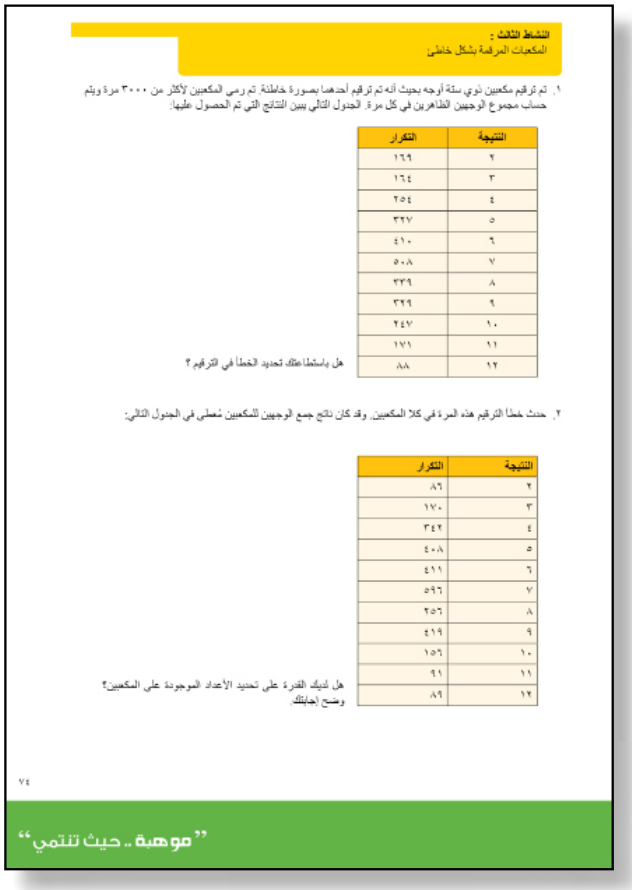
تتطلب جميع الأسئلة من الطلاب تحديد الخطأ في البيانات التجريبية.

السؤال الأول

مقارنة الاحتمالات:

قد يرغب الطلاب في المقارنة بين الاحتمالات النظرية للمكعّبات المنتظمة ذات الستّة أوجه مع الاحتمالات التجريبية لمكعّبات الأرقام الغامضة.
عدد مرّات الرمي هو ٣٠٠٦ مرّة ولذلك يتم تقسيم كل تكرار يتم تسجيله على ٣٠٠٦ وهذا سيعطينا الاحتمال التجريبي والذي يمكن مقارنته بمضاعف للعدد $\frac{١}{٣٦}$.

.



النشاط الثالث :
المكعبات المرقمة بشكل خاطئ

١. تم ترقيم مكعبين ذوي ستة أوجه بحيث أنه تم ترقيم أحدهما بصورة خاطئة. تم رمي المكعبين لأكثر من ٣٠٠٠ مرة وتم حساب مجموع الوجهين الظاهرين في كل مرة. الجدول التالي يبين النتائج التي تم الحصول عليها:

النتيجة	التكرار
٢	١٦٩
٣	١٦٤
٤	٢٥٤
٥	٣٢٧
٦	٤١٠
٧	٥٠٨
٨	٣٣٩
٩	٣٢٩
١٠	٢٤٧
١١	١٧١
١٢	٨٨

هل باستطاعتك تحديد الخطأ في الترقيم؟

٢. حدث خطأ الترقيم هذه المرة في كلا المكعبين. وقد كان ناتج جمع الوجهين للمكعبين مُعطى في الجدول التالي:

النتيجة	التكرار
٢	٨٦
٣	١٧٠
٤	٣٤٢
٥	٤٠٨
٦	٤١١
٧	٥٩٦
٨	٣٥٦
٩	٤١٩
١٠	١٥٦
١١	٩١
١٢	٨٩

هل لديك القدرة على تحديد الأعداد الموجودة على المكعبين؟ وضح إجابتك.

٧٤

"موهبة .. حيث تنتمي"

مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع
King Abdulaziz & his Companions Foundation for Giftedness & Creativity
موهبة

مقارنة التكرار:

قد يختار الطلاب حساب التكرار النظري (التكرار المتوقّع) لمكعّب منتظم مع التكرار التجريبي للمكعّب الغامض.

حاصل ضرب احتمالات زوج من المكعّبات المنتظمة بعدد الرميات (في هذه الحالة عدد الرميات هو ٣٠٠٦) سوف يعطينا التكرار النظري كما هو موضّح أدناه.

مقارنة هذه النتائج مع التكرار التجريبي سوف يسمح للطلاب بملاحظة أن العددين ٢ و٨ يبدوان أنهما مُدخلين غير طبيعيين.

ما الذي يعنيه ذلك بالنسبة للأعداد الموجودة على المكعّب الغامض؟

النتيجة	التكرار التجريبي في مكعبات الأرقام الغامضة	التكرار النظري في مكعبات الأرقام المنتظمة
٢	١٦٩	٨٣,٥
٣	١٦٤	١٦٧
٤	٢٥٤	٢٥٠,٥
٥	٣٢٧	٣٣٤
٦	٤١٠	٤١٧,٥
٧	٥٠٨	٥٠١
٨	٣٣٩	٤١٧,٥
٩	٣٢٩	٣٣٤
١٠	٢٤٧	٢٥٠,٥
١١	١٧١	١٦٧
١٢	٨٨	٨٣,٥
	٣٠٠٦	٢٠٠٦

قد يضع الطلاب فرضية أنّ العدد ٢ قد تم إبداله بالعدد ١، ومن ثم يمكنهم تبرير ما يفكّرون به باعتبار التكرار الناتج من فراغ العيّنة.

	١	١	٣	٤	٥	٦
١	٢	٢	٤	٥	٦	٧
٢	٣	٣	٥	٦	٧	٨
٣	٤	٤	٦	٧	٨	٩
٤	٥	٥	٧	٨	٩	١٠
٥	٦	٦	٨	٩	١٠	١١
٦	٧	٧	٩	١٠	١١	١٢

حل السؤال الثاني

	١	٢	٣	٤	٤	٦
١	٢	٣	٤	٥	٥	٧
٢	٣	٤	٥	٦	٦	٨
٣	٤	٥	٦	٧	٧	٩
٣	٤	٥	٦	٧	٧	٩
٥	٦	٧	٨	٩	٩	١١
٦	٧	٨	٩	١٠	١٠	١٢

حل السؤال الثالث

	١	٢	٣	٤	٦	٧
١	٢	٣	٤	٥	٧	٨
٢	٣	٤	٥	٦	٨	٩
٣	٤	٥	٦	٧	٩	١٠
٤	٥	٦	٧	٨	١٠	١١
٥	٦	٧	٨	٩	١١	١٢
٦	٧	٨	٩	١٠	١٢	١٣

حل السؤال الرابع

	١	٣	٥	٧	٩	١١
١	٢	٤	٦	٨	١٠	١٢
٢	٣	٥	٧	٩	١١	١٣
٣	٤	٦	٨	١٠	١٢	١٤
٤	٥	٧	٩	١١	١٣	١٥
٥	٦	٨	١٠	١٢	١٤	١٦
٦	٧	٩	١١	١٣	١٥	١٧

"موهبة .. حيث تنتمي"

فرص التقويم

- يتطلب هذا النشاط التعمق والمثابرة وكذلك الربط بين كل من الإحتمالات التجريبية والنظرية.
- هل لدى الطلاب المقدرة على ايجاد بداية منطقية وهل حافظوا على مواصلة تقدمهم خلال دراستهم؟
- هل لدى الطلاب المقدرة على استخدام تكنولوجيا المعلومات في تسريع عملية الحساب واستخلاص النتائج ودعم استنتاجاتهم

حول هذا النشاط

يشمل هذا النشاط تعداد بديهي لمكعّبات أرقام غير متعدّية ويقدّم كذلك عنصر الألغاز الرياضية.
المكعّبات المرقّمة غير المتعدّية هي مكعّبات مرقّمة وتظهر معضلة في أنه على الرغم من أن المكعّب المرقّم أ يتفوّق على المكعّب المرقّم ب والمكعّب المرقّم ب يتفوّق على المكعّب ج فإن المكعّب أ لا يتفوّق على المكعّب ج.
إن الإستنتاج بأن مكعبات الأرقام هي غير متعدّية، يجب أن يتم من خلال التجارب التي يجريها الطلاب.
سيكون لدى الطلاب الفرصة كذلك لاستنباط مجموعات مشابهة من الأقراص ذات المؤشّر الدوار.

خصائص الأداء المتقدم

- التفكير بشكل منطقي عند إنشاء استفسار رياضي.
- الإبداع في تكوين المصادر.

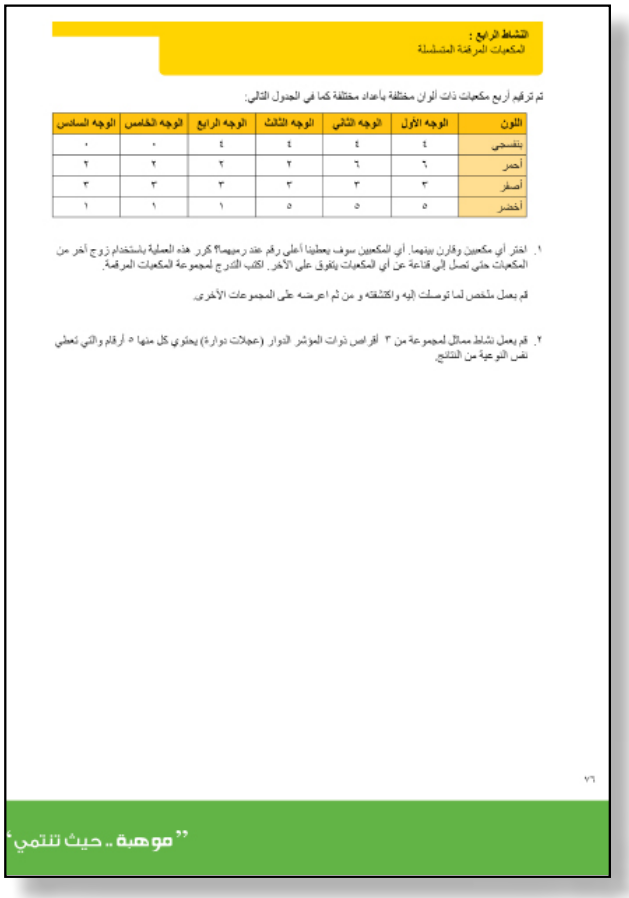
توصيات أسلوب التدريس

بعد إعطاء نبذة مختصرة، يجب على الطلاب أن يكونوا قادرين على العمل بشكل مستقل وفي مجموعات صغيرة.

إجابات الأسئلة

قم بحث الطلاب على توقّع النتائج قبل اختبارها عن طريق الربط بين أزواج الأعداد في المكعّبات لمعرفة أيّهما على الأرجح سيتفوق على الآخر.
إن استخدام الرسوم الشجرية لتمثيل فضاء العيّنة سيساعد الطلاب على فهم السؤال.
يجب أن يلاحظ الطلاب أن اللون البنفسجي يتفوّق على اللون الأخضر وهو الذي بدوره يتفوّق على اللون الأحمر و اللون الأحمر يتفوق على اللون الأصفر، وأيضاً نجد أن اللون الأصفر يتفوق على اللون البنفسجي لكي يكمل دورة كاملة بترتيب غير متعدّي والموضّح في الشكل أدناه:

في السؤال الأول يقوم الطلاب بكتابة ملخّص يتم عرضه على بقيّة الطلاب مع شرح الأسباب.
قم بإعطاء الوقت المناسب للطلاب للعمل على السؤال الثاني بحيث يقومون باختبار نتائجهم مع بعضهم البعض.
بالنسبة للطلاب الذين أنهوا جميع الأسئلة بسرعة يمكن حثهم على إنشاء مجموعة من خمس مكعّبات ذات ستة أوجه بحيث تكون غير متعدّية


النشاط الرابع :
المكعبات المرقمة المتسلسلة

تم ترقيم أربع مكعبات ذات ألوان مختلفة بأعداد مختلفة كما في الجدول التالي:

اللون	الوجه الأول	الوجه الثاني	الوجه الثالث	الوجه الرابع	الوجه الخامس	الوجه السادس
بنفسجي	٤	٤	٤	٤	٠	٠
أحمر	٦	٦	٢	٢	٢	٢
أصفر	٣	٣	٣	٣	٣	٣
أخضر	٥	٥	٥	١	١	١

١. اختر أي مكعبين وقارن بينهما. أي المكعبين سوف يعطينا أعلى رقم عند رميهما؟ كرر هذه العملية باستخدام زوج آخر من المكعبات حتى تصل إلى قناعة عن أي المكعبات يتفوق على الآخر. اكتب التدرج لمجموعة المكعبات المرقمة.

قم بعمل ملخص لما توصلت إليه واكتشفته و من ثم اعرضه على المجموعات الأخرى.

٢. قم بعمل نشاط مماثل لمجموعة من ٣ أقراص ذوات المؤشر الدوار (عجلات دوارة) يحتوي كل منها ٥ أرقام والتي تعطي نفس النوعية من النتائج.

٧٦

"موهبة .. حيث تنتمي"

فرص التقويم

يستخدم هذا النشاط المعرفة المسبقة والمهارات التي تم تطويرها في الأنشطة السابقة ويجب أن تكون النتائج مفاجئة للطلاب.

- هل عمل الطلاب بشكل منطقي وقاموا بإنشاء الروابط بين الإحتمالات التجريبية والنظرية؟
- هل لدى الطلاب المقدرة على التفكير بشكل إبداعي في تطوير مصادر جديدة؟

حول هذا النشاط

يعتبر هذا النشاط استقصاء إحصائي يتطلب من الطلاب مقارنة نوعين من التوزيعات لاتخاذ قرار ما.
يجب على الطلاب تقديم المشورة لمسافر في تحديد الطريق الذي يجب أن يتخذه بناءً على البيانات التي تم تجميعها عند اختبار الطرق.
سيكون هناك القليل من الهيكلية المتوفرة وذلك لإعطاء فرصة للطلاب لتطبيق معرفتهم المسبقة لمقاييس التشتت والنزعة المركزية.
ومن خلال سياق حقيقي فإنه قد تم التحفّظ على معلومات إضافية بسيطة لم يتم تزويدها مثل التكاليف.
سيكون العمل على هذا النشاط بطريقة أسرع فيما لو كان لدى الطلاب فرصة استخدام تكنولوجيا المعلومات، مثل برامج الجداول الإلكترونية أو أحد برامج التمثيل البياني.

خصائص الأداء المتقدم

- اختيار وتطبيق الأساليب الملائمة للسياق.
- تطوير الإستنتاج الرياضي.

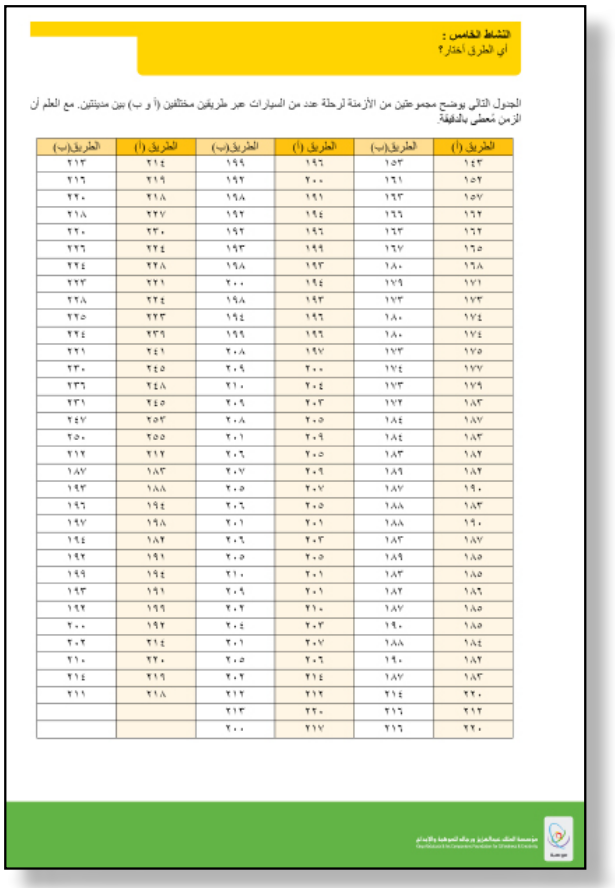
توصيات أسلوب التدريس

يفضل العمل في السؤالين بشكل مستقل ومنفرد أو من خلال مجموعات صغيرة وسيكون دور المعلّم هو طرح الأسئلة لاكتساب فهم أعمق لما يعرفه الطلاب وما يستطيعون عمله.
سيكون هناك فائدة أكبر فيما لو استخدم الطلاب الجداول الإلكترونية لترتيب وتحليل البيانات.

إجابات الأسئلة

كل من التوزيعين في السؤال الأول لهما نفس الخصائص ويمكن القول أي من الطريقين قد يكون هو الأفضل ولا سيّما في ضوء المعايير المتضاربة نوعاً ما.
انظر إلى المقاييس المبسّطة للانتشار والنزعة المركزية والموجودة في النتائج التالية:

الطريق (أ)	الطريق (ب)	
١٨٣	١٩٢	المنوال
١٩٨,٥	١٩٩,٥	الوسيط
١٩٩,٧٤٤٩	١٩٩,٤٧٩٦	الوسط
٢٥٥	٢٥٠	أكبر قيمة
١٤٣	١٥٣	أقل قيمة
١١٢	٩٧	المدى
٥٦	٤٨,٥	المدى الربيعي
١٧١	١٧٧,٢٥	الرُّبيع الأول
٢٢٧	٢٢٥,٧٥	الرُّبيع الثالث


النشاط الخامس :
أي الطرق أختار؟

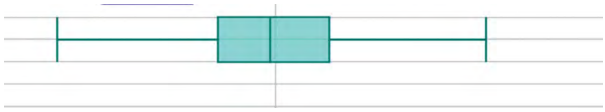
الجدول التالي يوضح مجموعتين من الأزمنة لرحلة عند من السيارات عبر طريقين مختلفين (أ و ب) بين مدينتين. مع العلم أن الزمن مُعطى بالدقيقة

الطريق (أ)	الطريق(ب)	الطريق (أ)	الطريق(ب)	الطريق(أ)	الطريق(ب)
١٤٣	١٥٣	١٩٦	١٩٩	٢١٤	٢١٣
١٥٢	١٦١	٢٠٠	١٩٢	٢١٩	٢١٦
١٥٧	١٦٣	١٩١	١٩٨	٢١٨	٢٢٠
١٦٢	١٦٦	١٩٤	١٩٢	٢٢٧	٢١٨
١٦٢	١٦٣	١٩٦	١٩٢	٢٣٠	٢٢٠
١٦٥	١٦٧	١٩٩	١٩٣	٢٢٤	٢٢٦
١٦٨	١٨٠	١٩٣	١٩٨	٢٢٨	٢٢٤
١٧١	١٧٩	١٩٤	٢٠٠	٢٢١	٢٢٣
١٧٣	١٧٣	١٩٣	١٩٨	٢٢٤	٢٢٨
١٧٤	١٨٠	١٩٦	١٩٤	٢٢٣	٢٢٥
١٧٤	١٨٠	١٩٦	١٩٩	٢٣٩	٢٢٤
١٧٥	١٧٣	١٩٧	٢٠٨	٢٤١	٢٢١
١٧٧	١٧٤	٢٠٠	٢٠٩	٢٤٥	٢٣٠
١٧٩	١٧٣	٢٠٤	٢١٠	٢٤٨	٢٣٦
١٨٣	١٧٢	٢٠٣	٢٠٩	٢٤٥	٢٣١
١٨٧	١٨٤	٢٠٥	٢٠٨	٢٥٣	٢٤٧
١٨٣	١٨٤	٢٠٩	٢٠١	٢٥٥	٢٥٠
١٨٢	١٨٣	٢٠٥	٢٠٦	٢١٢	٢١٢
١٨٢	١٨٩	٢٠٩	٢٠٧	١٨٣	١٨٧
١٩٠	١٨٧	٢٠٧	٢٠٥	١٨٨	١٩٣
١٨٣	١٨٨	٢٠٥	٢٠٦	١٩٤	١٩٦
١٩٠	١٨٨	٢٠١	٢٠١	١٩٨	١٩٧
١٨٧	١٨٣	٢٠٣	٢٠٦	١٨٢	١٩٤
١٨٥	١٨٩	٢٠٥	٢٠٥	١٩١	١٩٢
١٨٥	١٨٣	٢٠١	٢١٠	١٩٤	١٩٩
١٨٦	١٨٢	٢٠١	٢٠٩	١٩١	١٩٣
١٨٥	١٨٧	٢١٠	٢٠٢	١٩٩	١٩٢
١٨٥	١٩٠	٢٠٣	٢٠٤	١٩٢	٢٠٠
١٨٤	١٨٨	٢٠٧	٢٠١	٢١٤	٢٠٣
١٨٢	١٩٠	٢٠٦	٢٠٥	٢٢٠	٢١٠
١٨٣	١٨٧	٢١٤	٢٠٢	٢١٩	٢١٤
٢٢٠	٢١٤	٢١٢	٢١٢	٢١٨	٢١٩
٢١٢	٢١٦	٢٢٠	٢١٣		
٢٢٠	٢١٦	٢١٧	٢٠٠		

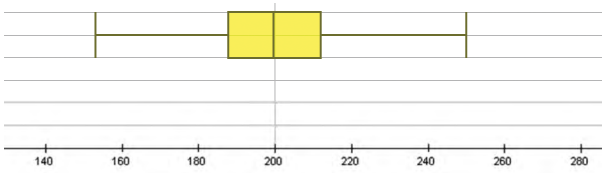
إن زوج من مخططات الصندوق وطرفية سوف يعطي تصوّر تمثيلي للبيانات مما سيسهل إجراء المقارنات والتناقضات.

الشكل ١٣

الطريق (أ)



الطريق (ب)



في السؤال الثاني سيكون لدى الطلاب الفرصة لإنشاء مجموعات من البيانات بأنفسهم ومن ثم اختبارها مع طلاب آخرين.
يجب أن يهدف الطلاب إلى تحقيق جميع المعايير المعطاه في هذا السؤال.

فرص التقويم

لا يوجد إجابة صحيحة للمسألة الموجودة في السؤال الأول ولكن يجب حث الطلاب على شرح أسبابهم باستخدام البيانات والرسوم.

- هل لدى الطلاب المقدرة على الدخول في حوار حول الأسباب التي قدّمتها المجموعات الأخرى؟
- هل استخدم الطلاب معرفتهم المسبقة بالأساليب الإحصائية في إنشاء توزيعات في السؤال الثاني؟

النشاط السادس :
إجراء تحليلات إحصائية

في هذه المهمة ستقوم بعمل دراسة بنفسك. في هذه الدراسة ستقوم بالتنقل من مرحلة إلى أخرى في التعامل مع دورة البيانات. القائمة التالية سوف تساعدك على إجراء الدراسة و في حال واجهت أي غموض في بعض المصطلحات التي لم ترها من قبل، فعليك إجراء البحث عن هذه الكلمات قبل أن تبدأ دراستك.

١. قم بتحديد مسألة ما و خطط لها. فكر في السؤال الذي تريد أن تبحث عن إجابته أو فكر في الفرضية التي تريد اختبارها. في هذه المرحلة أنت تقوم بتصميم دراستك. قم الآن بالتخطيط لذلك من خلال النقاط التالية:

أ- ما هو السؤال (أو الفرضية)؟ هل من الممكن إيجاد الإجابة و هل يمكن اختبارها؟
ب- كيف ستقوم بتجميع البيانات؟ هل تعتبر مصادرك أساسية أو ثانوية ؟
ت- ما هي أفضل طريقة لأخذ العينات؟ خطط لذلك.
ث- كيف يمكنك التقاط وتسجيل البيانات؟
ج- هل ستحتاج البيانات التفاصيل التي ستحتاجها للإجابة على سؤالك أو اختبار فرضيتك؟

قبل أن تتعمق أكثر قم باستشارة معلمك حول خطتك وخذ موافقته.

٢. قم الآن بتجميع البيانات المطلوبة (هذه هي المرحلة التي ستجمع فيها البيانات لدعم تحقيقاتك) سوف يكون الآن تجميع البيانات من المصادر الأساسية أو الثانوية. من المفروض أن تكون هذه المرحلة سهلة إذا كنت قد خططت لها بشكل دقيق و محدد.

٣. ابدأ في تحليق وتمثيل البيانات التي جمعتها
اختر نوع التمثيلات البيانية التي سوف تساعدك على تحليل البيانات. كيف من الممكن أن تساعدك على سؤالك؟
اعمل ملخص وصفي احصائي و اختر تلك التي ستساعدك في مناقشتك.

٤. الشرح ونناقش نتائجك.

أ- قم بالعودة إلى سؤالك أو فرضيتك و استخدم المخططات و التمثيلات البيانية والإحصاءات الوصفية لاستخلاص استنتاجاتك.
ب- قم الآن مناقشة متوازنة، ووضح محاسن ومساوئ استنتاجاتك.
ت- لاحظ أي تحفظات أو انتقاد محتمل على خطتك.

قم في النهاية بتقديم تقرير إلى معلمك.

٧٩

حول هذا النشاط

يقوم الطلاب في هذا النشاط بإنشاء دراسة بأنفسهم حيث ينتقلون من مرحلة إلى أخرى في التعامل مع دورة البيانات مستخدمين في ذلك القائمة التي تساعدهم على ذلك.

دور المعلم هنا هو دور استشاري في الجوانب التي لم يمر بها الطلاب من قبل. المراحل في هذه الدورة هي كالتالي:

١. تحديد مشكلة ما والتخطيط لها: يجب على المعلم الموافقة على الخطة المقترحة من الطلاب قبل البدء بالعمل عليها. يجب تشجيع الطلاب على تعديل الخطة في حال كان هناك حاجة لذلك، فالمراحل التالية ستكون أبسط وأكثر تماسكاً في حال كانت الخطة محددّه.

٢. تجميع البيانات: قد تكون المصادر المتوفرة ثانوية أو أولية. فمن الممكن اشراك الطلاب في مجموعة متنوعة من الأنشطة بما في ذلك التجارب العملية والملاحظة وعمل الإستبيان والبحث من خلال شبكة الإنترنت.

٣. معالجة البيانات وتمثيلها: ويشمل ذلك التمثيلات البيانية بالإضافة إلى عمل ملخصات إحصائية تشمل مقاييس التشتت والنزعة المركزية. قم بحث الطلاب على أن لا تتعدى دراستهم النقاط التي تم طرحها في الخطة مع تذكيرهم ببحث التمثيلات التي رأوها من قبل في وحدات سابقة (على سبيل المثال الوحدة الثامنة).

٤. فسر وناقش نتائجك: قم بإرشاد الطلاب كي يقوموا بتحسين هذه المرحلة بحيث تشير إلى السؤال أو الفرضية. ينبغي على الطلاب تقديم تبرير متوازن يشمل إستنتاجات واضحة ونقد شامل للخطة.

خصائص الأداء المتقدم

- الثقة العقلانية – المقدرة على التعبير عن الآراء الشخصية والمبنية على الأدلة والبراهين والدفاع عنها عند الضرورة.
- المقدرة على رؤية وجهات نظر أخرى بديلة – أخذ آراء الآخرين والتعامل مع التعقيد والغموض.
- التفكير الناقد والمنطقي – المقدرة على الإستنتاج وبناء الفرضيات والبحث عن أدلة داعمة.
- المقدرة على مراقبة النفس والتقويم الذاتي بشكل منتظم.
- التركيز والمثابرة والمقدرة على التكيّف - المقدرة على الإستمرارية حتى انتهاء المهمة

توصيات أسلوب التدريس

العمل بشكل فردي أو من خلال مجموعات ثنائية.

فرص التقويم

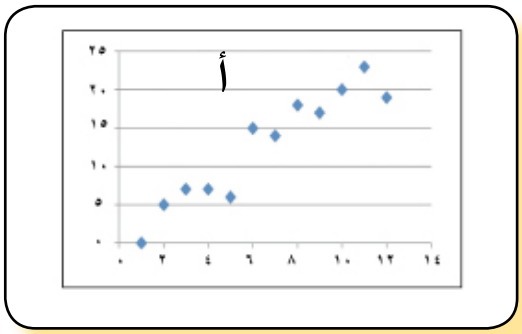
يمكن أن يتم تصحيح التقرير من قِبل الطلاب باستخدام قائمة محددة لكل مرحلة من الدورة تمثل معايير للتقييم وبعد ذلك يمكن مراجعة التصحيح من قِبل المعلم.

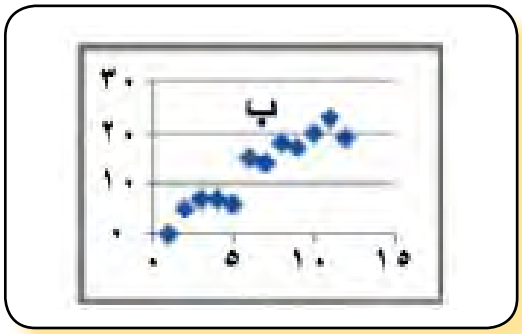
مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع
King Abdulaziz & his Companions Foundation for Giftedness & Creativity
موهبة

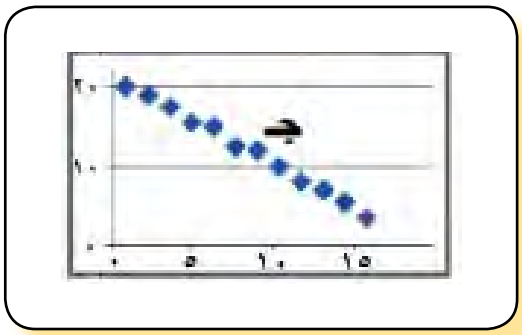
أوراق عمل المصادر

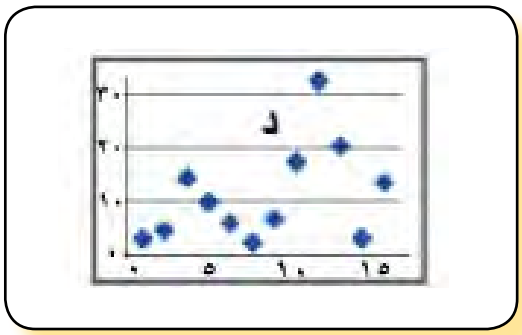
الوحدة الثالثة: الدوال الخطية والعلاقات

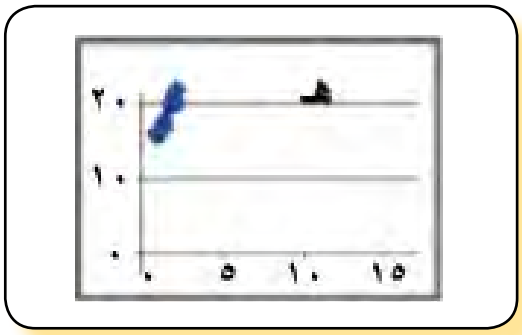
- ورقة عمل المصادر رقم (١)

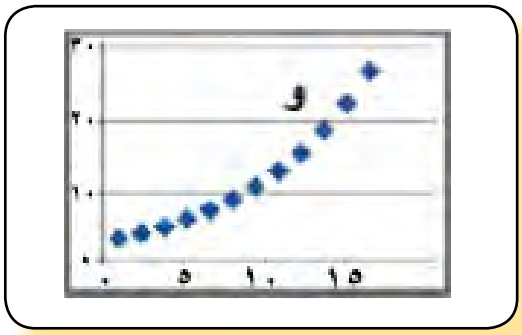


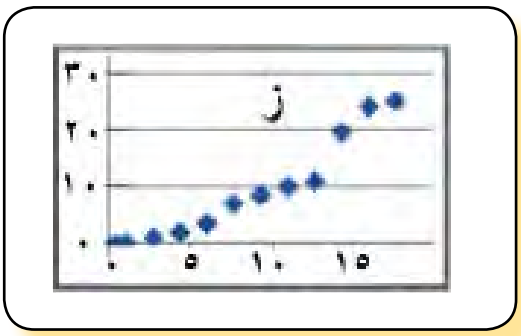












"موهبة .. حيث تنتمي"

- ورقة عمل المصادر رقم (٢)

عدد الأشخاص داخل مصعد	مجموع أوزان الأشخاص	درجة الحرارة
نمو الشتلات	الزمن بالأشهر	أطوال الأطفال
عدد الأميال	استهلاك الوقود	عدد أجهزة التلفاز
فترة الحياة	الزمن بالساعات	تكاثر الفيروسات
الزمن بالسنوات	تناقص المواد المشعة	الضغط
سرعة الرياح	كمية الأسمدة المعطاة للمحصول خلال نموه	غلّة المحاصيل المنتجة

مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع
King Abdulaziz & his Companions Foundation for Giftedness & Creativity
موهبة

- ورقة عمل المصادر رقم (٣)

١
إن العمر المتوقع لسكان هذه الدولة هو ٨٠ سنة ومتوسط عدد الأشخاص الذين يستعملون جهاز التلفاز الواحد هو ٥ أشخاص تقريباً.

٢
إن العمر المتوقع لسكان هذا البلد متوسط كما وأن عدد أجهزة التلفاز التي يستخدمها كل شخص مرتفع.

٣
إن معدل دخل الفرد في هذا البلد عالٍ جداً، ويحصل جميع السكان على الرعاية الصحية مجاناً.

٤
هذا البلد فقير ولا يحصل السكان على الرعاية الصحية اللازمة

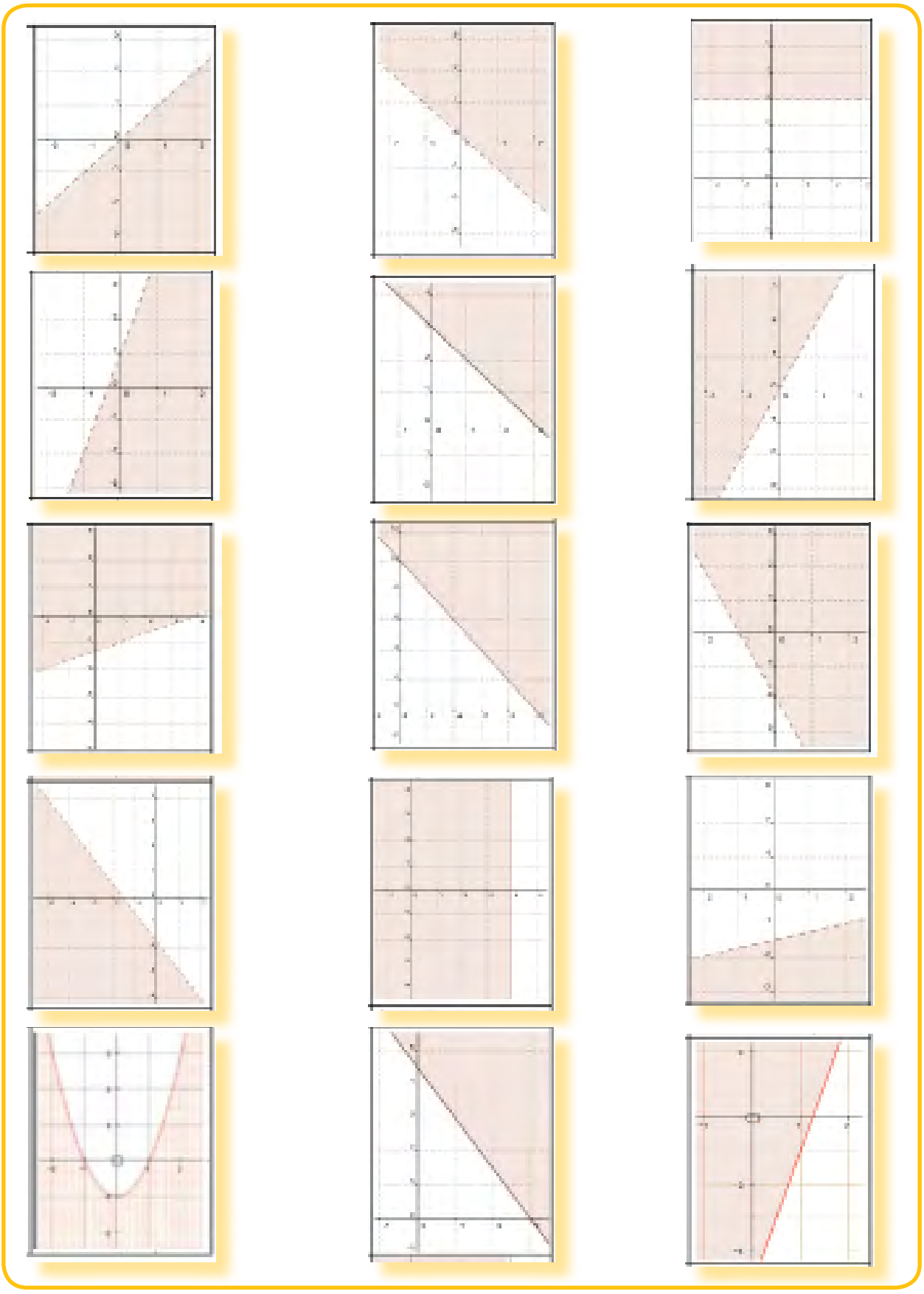
٥
تطور هذا البلد ، والعمر المتوقع لسكان هذا البلد طويل.

٦
هذا البلد فقير نوعاً ما مقارنة بالمقياس الغربي ومع ذلك فان سكان هذا البلد يتمتعون بحياة صحية جيدة من حيث ممارسة التمارين الرياضية واتباع الحمية الغذائية

٧
هذا بلد غني وفي المتوسط يملك كل فرد في المجتمع جهاز تلفاز، وعلى الرغم من ذلك فإن العمر المتوقع لسكان هذا البلد في تناقص وهذا قد يكون بسبب ارتفاع نسبة الدهون والسكر في النظام الغذائي للسكان.

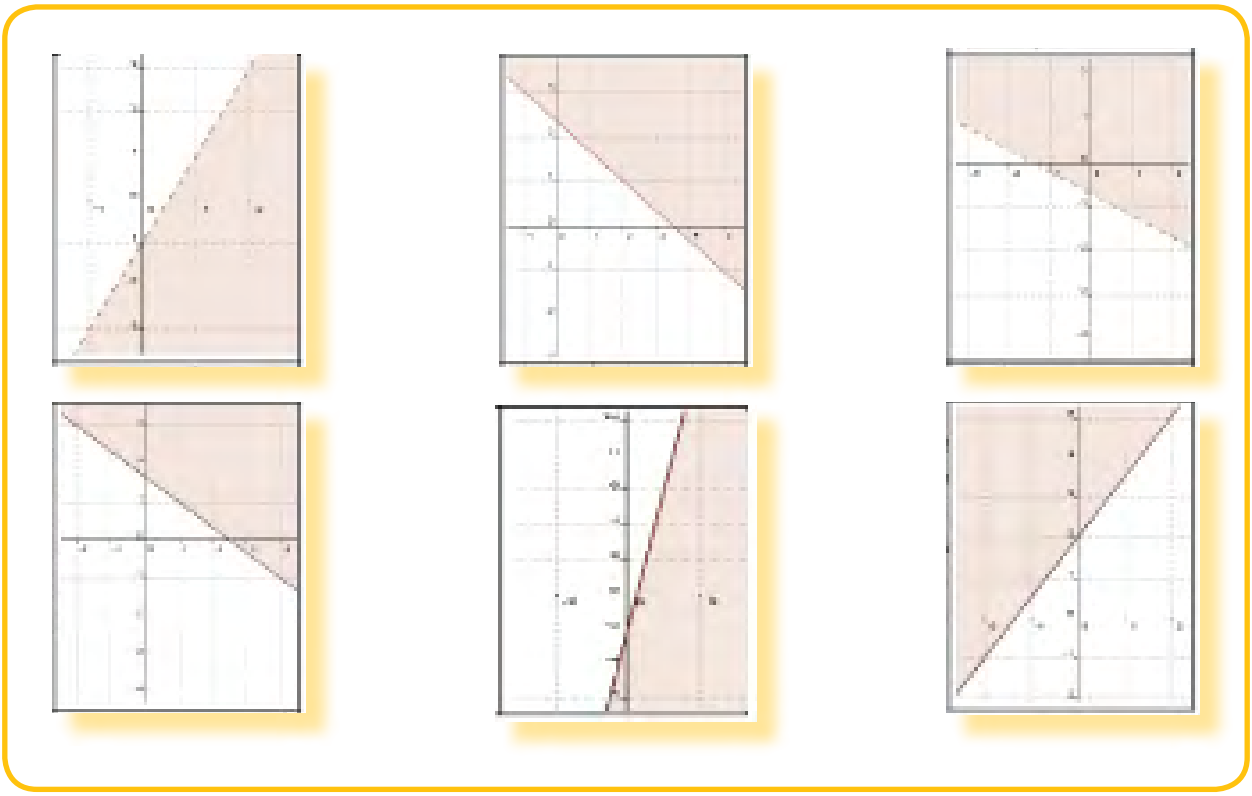
- ورقة عمل المصادر رقم (١)

مجموعة البطاقات (أ)



مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع
King Abdulaziz & his Companions Foundation for Giftedness & Creativity
موهبة

تكملة مجموعة البطاقات (أ)



مجموعة البطاقات (ب)

ص > س	ص > ٣	ص < ٢ س
ص > ٣س + ١	ص > - ٢س - ٢	ص > - س

"موهبة .. حيث تنتمي"

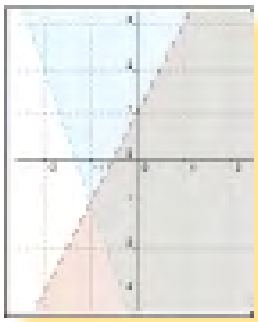
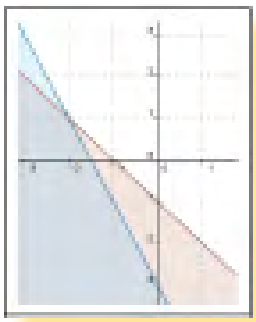
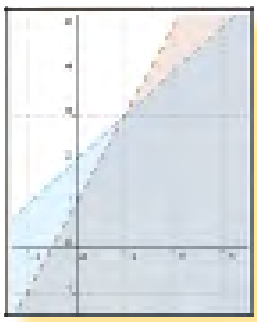
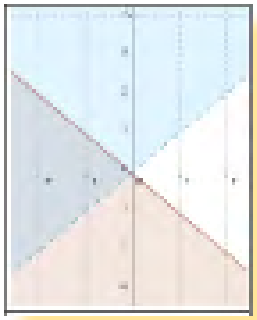
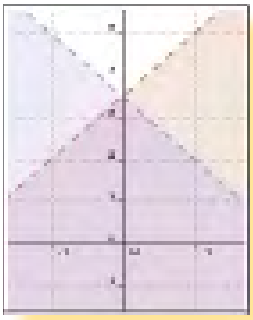
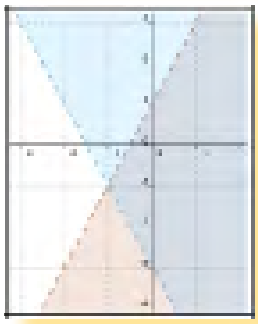
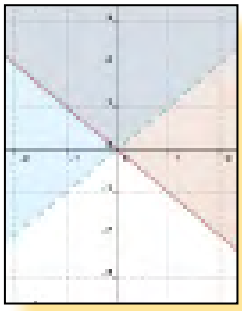
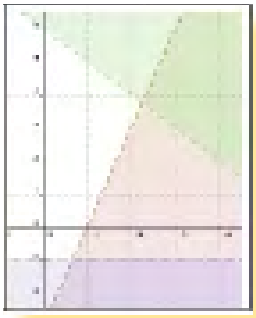
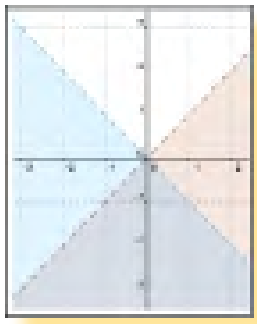
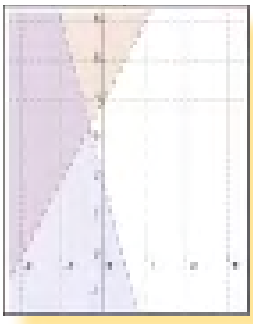
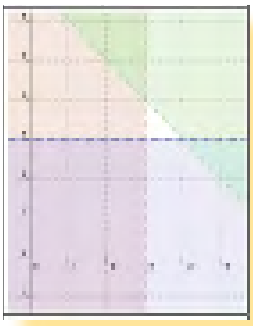
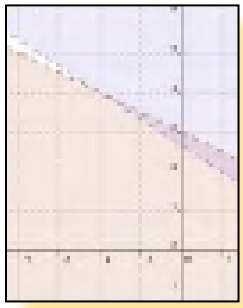
ص ≤ ٨س - ٢	س + ص ≥ ١٠	٣س + ٢ص ≥ ٩
س ≤ ٤	س ≥ ٣ - ص	س > ٣ص + ٤
س > ٦ + ٤ص	٨س + ٧ص > -١٢	س ≤ ٤س - ٥
ص > س^{٢} - ١	٢س ≥ ٥ - ٣ص	٢ص ≥ ٣ص + ٤

مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع
King Abdulaziz & his Companions Foundation for Giftedness & Creativity
موهبة

(١، ٢) (-٢، -١,٥) (١,٥، ١,٧٥)	(٢، -٣) (-٢، ١) (-٢، -٢)	(٠,٥، ٩,٥) (-٣، -٧) (-٢، -١٢)
(-١، ٣) (٠، ٢) (-١، ٣)	(٣، ٤) (-١، ١) (٢٠، ٣٩)	(١، ٣) (٢، -٢) (٣، ٠)
(-١، ٤) (-٢، ٢) (١,٥، ١,٥)	(٤، -٤) (٥، ٢) (٤، ١٢)	(٢، -٢٩) (٠، ٢,٩) (-٤، -٤)
(-١,٥، -٣) (-٢، -٢) (٠، ٢)	(١، ٢) (٠، ٠) (-١، -٢)	(-١، ٣) (-١، -٢) (-١، ٤)
(-١، ١,٥) (-٢، -١) (-١، -١,٥)	(-٢، ٠) (-١، ٠) (-٢، ٢)	(٠، -٣) (-٢، ١) (-٠,٥، -١,٥)

- ورقة عمل المصادر رقم (٢)

مجموعة البطاقات (أ)

مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والابداع
King Abdulaziz & his Companions Foundation for Giftedness & Creativity
موهبة

ص > ٢س + ١	ص > ٢س + ١	ص > ٢س + ١
ص > س + ٢	ص > -٣س - ٤	ص > -٢س - ٣
ص ≤ -س - ١	ص > س	ص > س
س + ٢ص > ٦	٢س + ٣ص > ٨	ص > - س
ص > س	ص ≤ -س	ص ≥ -س

"موهبة .. حيث تنتمي"

ص ≤ -٢س - ٣

-٣س + ٢ص > ٧

٢ص – ٤س < ٨

ص > -٤س + ٢

٣س + ٢ص > ٧

ص + ٣ > ٣س
ص – ٢ > -٣
س + ص < ٦

س < ٣
ص < ٣
س + ص > ٧

مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع
King Abdulaziz & his Companions Foundation for Giftedness & Creativity
موهبة

- ورقة عمل المصادر رقم (١)

١

$(ii)\ (-١)$

$س + ص - ع = -٢$

$ص + ع = ٢$

$-ص + ٣ع = ١٠$

٢

$(iii)\ \frac{١}{٤}$

$س + ص - ع = -٢$

$ص + ع = ٢$

$ع = ٣$

٣

$(i)\quad ٢س + ص + ع = ٦$

$(ii)\quad -٣س - ٤ص + ٢ع = ٤$

$(iii)\quad س + ص - ع = -٢$

٤

$(ii) \longleftarrow ٣(i) + (ii)$

$(iii) \longleftarrow -٢(i) + (iii)$

$س + ص - ع = -٢$

$-ص - ع = -٢$

$-ص + ٣ع = ١٠$

٥

عوِّض قيمة ع = ٣ في المعادلة (ii) لتحصل على قيمة ص

$ص + ٣ = ٢$

$\Rightarrow ص = -١$

٦

عوِّض قيمة كل من ص و ع في المعادلة (i) لتحصل على قيمة س

$س - ١ - ٣ = -٢$

$\Rightarrow س = ٢$

٧

$(iii) \longleftarrow (ii) + (iii)$

$س + ص - ع = -٢$

$ص + ع = ٢$

$٤ع = ١٢$

٨

$(i) \longleftrightarrow (iii)$

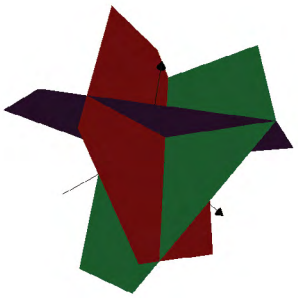
$س + ص - ع = -٢$

$-٣س - ٤ص + ٢ع = ٤$

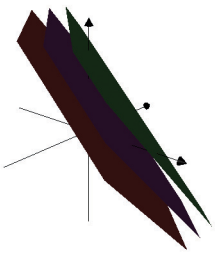
$٢س + ص + ع = ٦$

"موهبة .. حيث تنتمي"

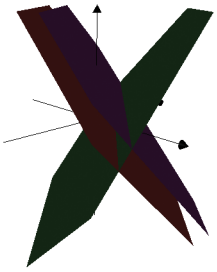
- ورقة عمل المصادر رقم (٢)



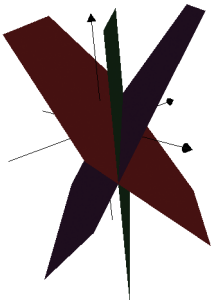
- معادلة ١: س + ص + هـ = ١
- معادلة ٢: س + ص – هـ = ١
- معادلة ٣: س - ص + هـ = ١



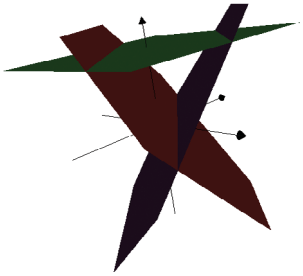
- معادلة ١: س + ص + هـ = ١
- معادلة ٢: س + ص + هـ = ٢
- معادلة ٣: س + ص + هـ = – ١



- معادلة ١: س + ص + هـ = ١
- معادلة ٢: س + ص + هـ = ٢
- معادلة ٣: س + ص – هـ = ١



- معادلة ١: س + ص + هـ = ١
- معادلة ٢: س + ص – هـ = ١
- معادلة ٣: س + ص = ١



- معادلة ١: س + ص + هـ = ١
- معادلة ٢: س + ص – هـ = ١
- معادلة ٣: هـ = ٣

مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع
King Abdulaziz & his Companions Foundation for Giftedness & Creativity
موهبة

- ورقة عمل المصادر رقم (١)

مجموعة البطاقات (أ)

$س^{٢} + ٦س$	$٥س - س^{٢}$	$س^{٢} + ٥س + ٦$
$س^{٢} + ١٠١س + ١٠٠$	$س^{٢} + ٥س - ٢٤$	$١٦ - س^{٢}$
$٢ - س^{٢}$	$١ - س^{٢}$	$س^{٢} + ٢س + ١$
$س^{٢} - ٢س + ١$	$١٠ - ٣س - س^{٢}$	$س^{٢} + ٢٥$
$٢٥ - س^{٢}$	$٤س^{٢} + ١٦س + ١٥$	

"موهبة .. حيث تنتمي"

س(س + ٦)	(س + ٤)(س – ٤)	(س + ١٠٠)(س + ١)
(س + ٨)(س – ٣)	(س + ٣)(س + ٢)	$(س + \sqrt{٢٧})(س - \sqrt{٢٧})$
س(٥ – س)	(س + ١)(س – ١)	(س – ١) (س – ١)
$(٢س + ٣)(٢س + ٥)$	$(س – ٥)^{٢}$	لا يوجد لها معاملات خطية
(٥ + س)(٢ – س)	(س + ١) (س + ١)	

مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع
King Abdulaziz & his Companions Foundation for Giftedness & Creativity
موهبة

- ورقة عمل المصادر رقم (١)

مجموعة البطاقات (أ)

تناقص نصف العمر لمادة ما هو الوقت الذي تستغرقه المادة لتفقد نصف قيمتها. من الناحية الطبية يمثل نصف العمر الزمن الذي يحتاجه تركيز بلازما الدم ليصبح نصف قيمته. يتناسب معدل الاضمحلال مع الثابت الأصلي ويوجد لكل دواء نسبة تغير ثابتة.

نسبة الفائدة المركبة هي ١٠٪ لإيداع مبدئي مقداره ٥٠٠٠ ريال

المسافة العمودية لسقوط كرة ثقيلة من الطائرة

عندما قام مخترع لعبة الشطرنج بعرض اختراعه على حاكم البلد، أعجب الحاكم من هذا الاختراع حتى أنه طلب من العالم أن يقوم باختبار جائزته بنفسه. طلب العالم، وكان حكيماً جداً، من الحاكم أن يعطيه على المربع الأول من لوح الشطرنج حبة قمح وعلى المربع الثاني حبتين وعلى الثالث أربع حبات و هكذا بمضاعفة الكمية السابقة في كل مرة.

المعدل الذي يمكن أن تتسارع به سيارة إلى السرعة العالية هو أمر حاسم لأدائها وللتعامل معها. يتم حساب تسارع السيارة من نقطة السكون (٠ ميل/ ساعة) إلى اللحظة التي تصبح فيها السرعة ٦٠ ميل في الساعة. هذا يعني أن السرعة الإبتدائية هي صفر و السرعة النهائية ٦٠ ميل في الساعة (٢٦,٧٨ م / الثانية). في مناطق أخرى من العالم تكون من ٠ كلم/ساعة إلى ١٠٠كلم/ساعة (٢٧,٧٨ م / الثانية)

إذا كانت السرعة الابتدائية لجسم هي ع$_{0}$ و يتحرك في مستقيم بتسارع ثابت ت فإن السرعة النهائية ع بعد مضي ز من الزمن ستكون ع = ت ز + ع$_{0}$.

$د(ن) = ٢^{ن-١}$

$د(ز) = ٤٠ هـ^{-٠,٠٥ز}$

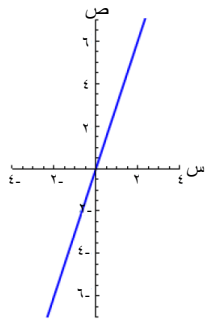
$د(ت) = ٣ت$

$د(ت) = ٤,٩ت^{٢}$

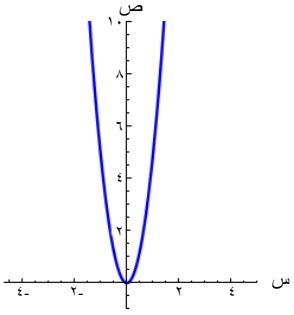
$د(ن) = ٥٠٠٠(١ + ٠,١)^{ن}$

مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع
King Abdulaziz & his Companions Foundation for Giftedness & Creativity
موهبة

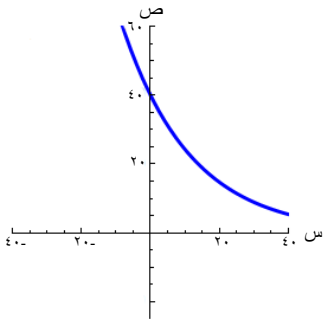
أ



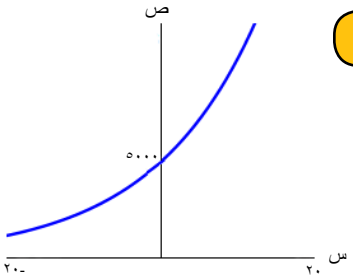
ب



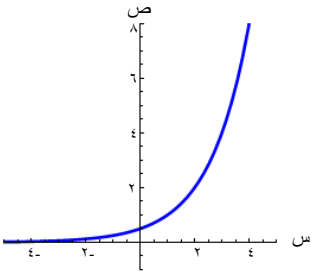
ج



د



هـ



"موهبة .. حيث تنتمي"

- ورقة عمل المصادر رقم (١)

الفرضية الأساسية : نقول عن العدد $\sqrt{٢}$ أنه عدد نسبي بالإعتماد على ما يلي:

- العددان أ و ب هما عددان صحيحان، حيث ب $\neq$ ٠ ولا يوجد لهما قواسم مشتركة.
- يمكننا كتابة $\sqrt{٢} = \frac{أ}{ب}$ ويجب أن يكون بأبسط صورة.

هذا يعني أن أ يمكن كتابته كمضاعف للعدد ٢

بالتالي فإن الفرضية الأساسية يجب أن تكون خاطئة ويستحيل كتابة $\sqrt{٢}$ كعدد نسبي على الشكل $\frac{أ}{ب}$ بحيث أن أ و ب عددان صحيحان لا يوجد لهما قاسم مشترك

إذا كان $أ^{٢}$ عدد زوجي فإن أ هو عدد زوجي ايضاً

هذا يخبرنا أن العدد $أ^{٢}$ هو مضاعف للعدد ٢ وهذا يعني أن $أ^{٢}$ هو عدد زوجي

هذا يتناقض مع الفرضية الأساسية بأن أ و ب لا يوجد لهما أي قاسم مشترك

نضرب الطرفين بالعدد $ب^{٢}$

$أ^{٢} = ٢ب^{٢}$

هذا يعني أن $أ^{٢} = (٢ن)^{٢}$

لقد قمنا باثبات أن كلاً من أ و ب هما عددان زوجيان وهذا يعني أنه يوجد قاسم مشترك لهما

لذا يمكننا كتابة

$(٢ن)^{٢} = ٢ ب^{٢}$

نُربّع كل من الطرفين:

$\frac{أ^{٢}}{ب^{٢}} = ٢$

لذا يمكننا كتابته أ = ٢ ن (حيث ن عدد صحيح)

سيؤدي ذلك إلى $٢ن^{٢} = ب^{٢}$

وبنفس الطريقة السابقة: $ب^{٢}$ عدد زوجي سيؤدي إلى أن ب عدد زوجي

وهذا يعني أن

$٤ ن^{٢} = ٢ ب^{٢}$

مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع
King Abdulaziz & his Companions Foundation for Giftedness & Creativity
موهبة

مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع
King Abdulaziz & his Companions Foundation for Giftedness & Creativity

موهبة

بوابة موهبة الإلكترونية

شاركنا التجربة واكتشف عالم بوابة موهبة
المرجع الرئيسي للموهبة والإبداع والابتكار في العالم العربي

بوابة موهبة الإلكترونية بوابةٌ علمية متخصصة في إرساء أسس تربية الموهوبين والمبدعين في المملكة العربية السعودية والعالم العربي. تقدّم خدمات متنوعة للموهوبين والقائمين على رعايتهم، وتعتبر مصدرًا معرفيًا متجددًا ومجالاً تفاعليًا للمشاركة المجتمعية.

Info@mawhiba.org.sa
الرقم المجاني: 8006123333

"موهبة .. حيث تنتمي"