الصفّ الثالث الثانوي

منهج موهبة الإضافيّ المتقدّم

الرياضيات
كتاب الطالب

مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع
King Abdulaziz & his Companions Foundation for Giftedness & Creativity

موهبة

تم تطوير مادة منهاج موهبة الإضافي المتقدم لتستعمل في المدارس المنضوية في مبادرة موهبة للشراكة مع المدارس.

شارع تركي بن عبدالعزيز الأول
صندوق بريد ٣٠٠٨٢٠ الرياض ١١٣٧٢، المملكة العربية السعودية – www.mawhiba.org.sa

بِسْمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحْمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

المحتويات

استعمال هذا الكتاب

صُمّمت نشاطات هذا الكتاب لمساعدتك كي تصبح متعلّمًا متقدّمًا؛ وهذا يعني أنّ هذه النشاطات ستتحدّى قدراتك لتقوم بأمور، منها على سبيل المثال:

- استعمال المهارات التّي تعلّمتها في دروس أخرى سابقًا؛ لتطبّقها في مسائل ومواقف جديدة غير مألوفة.
- التحلّي بالإبداع والمرونة عند حلّ هذه المسائل.
- المثابرة على المهمّة، وتجريب طرق بديلة إن لم تكن طريقة الحلّ الأولى ناجحة.
- اكتشاف الأنماط، والتوصّل إلى تعميمات وتنبؤات عن الأنماط والتوجّهات.
- تنمية مهارات التفكير والتبرير.
- العمل مع الآخرين ضمن فريق وأداء أدوار مختلفة، فتارة تقود الفريق، وتسهم بصورة ناجحة وفعّالة في عمل الفريق تارة أخرى.
- تفسير استنتاجاتك كي يتمكّن الآخرون من فهمها والردّ عليها.
- ولكي يصبح الطلاّب في مدارس شراكة موهبة متعلّمين ومتقدّمين؛ فإنّ نشاطات هذا الكتاب تركّز على ستّ قيم واتّجاهات وسمات أساسيّة تشجّع هذا النوع من العمل والتفكير، هي:

الاستقصاء

سوف ينمّي طلاّب مدارس شراكة موهبة روحَ الاستقصاء، وسيرغبون في التعلّم الذاتيّ، وينشطون فيه، ويتوقون إليه. وستظهر عليهم سمات المبادرة والتفكير المستقلّ، وتحدّي الافتراضات، وطلب البرهان على المسلّمات والتوكيدات. وسينظّمون مسيرة تعلّمهم بفعاليّة، منتقلين من استيعاب المعارف وإتقان الخطوات العمليّة، إلى تطوير وجهات النظر الشخصيّة والحلول الفرديّة.

المجازفة

سوف ينمّي طلاّب مدارس شراكة موهبة روحَ المجازفة، وسيظهرون الثقة بأنفسهم، ويتناولون الأفكار والظواهر الجديدة عليهم بالتجربة والنقد، ويُقدِمون على التخمين، وتوقّع الفرضيّات، ولن يزعجهم العمل في ظلّ ظروف جديدة عليهم. وسوف يرجئون التوصّل إلى الاستنتاجات قبل نضوجها في أذهانهم، ويتحمّلون عدم التيقن المؤقّت.

الإبداع

سوف ينمّي طلاّب مدارس شراكة موهبة روحَ الإبداع والابتكار، وسيصبحوا متفتّحي العقول، ومرنين في طريقة تفكيرهم. إلى جانب إبداء استعدادهم للابتكار، وإيجاد حلول متعدّدة للمشاكل والمواقف، مظهرين قدرة على تكييف أساليب عملهم لتتلاءم مع الظروف. وسيغدو عملهم مثيرًا للدهشة، ودليلاً على الأصالة، ومتميّزًا بأسلوبهم الشخصيّ الخاصّ.

المثابرة

سوف ينمّي طلاّب مدارس شراكة موهبة روحَ المثابرة، ولن تثبّط العقبات والصعوبات من عزائمهم، بل سيصرّون على مواصلة بذل الجهود. وسوف يبرهنون على تميّزهم بالتأنّي في العمل، والالتزام بأسلوبهم المنهجيّ المنظّم، ولن يكلّوا من المثابرة على تحقيق النتائج المرجوّة بأعلى مستويات الجودة والدقّة الممكنة.

التعاون

سوف ينمّي طلاّب مدارس شراكة موهبة روحَ التعاون والعمل الجماعيّ، وسيسعون إلى الحصول على الملاحظات والتعليقات على أعمالهم، وسيُدلون بآرائهم وأفكارهم بوضوح واختصار، مصغين إلى وجهات نظر الآخرين وأفكارهم. وسيتمتّعون بالقدرة على العمل الجماعيّ والاستعداد له، ويؤدّون أدوار متنوّعة ضمن فرق العمل، ويتمكّنون من تقويم أفكارهم ومساهماتهم.

الاهتمام بالمجتمع

سوف ينمّي طلاّب مدارس شراكة موهبة روحَ الاهتمام بالمجتمع. ففي الوقت الذي سيكونون فيه مدفوعين بالطموح الشخصيّ والرغبة في تحقيق النجاح، فإنّهم سيمتلكون أيضًا إحساسًا قويًّا بأهميّة المساهمات التّي يقدّمونها للمجتمع تحقيقًا لمصلحة الوطن، ومنفعة أولئك الذين هم أقلّ منهم حظًّا. وسيكونون مثالاً للمواطن الصالح المتعاطف مع المصلحة الجماعيّة لمحيطه الاجتماعيّ، المدرك لأوجه التباين والتشابه بين الأفراد والشعوب، والواعي بتراثه الثقافيّ، والتراث الثقافيّ للآخرين، كما سيكون الطلاّب متجاوبين مع القضايا الأخلاقيّة التّي تثار في سياق دراساتهم.

كتابة الحلول

سوف يرشدك معلّمك أين تكتب الحلول والإجابات والأعمال الخاصّة بشراكة مدارس موهبة، والطريقة المتّبعة لهذه الغاية. ومن المهمّ أن تحتفظ بأعمالك كلّها مجتمعة حتّى يكون لديك سجّل عن النمو والتقدّم الذي تحرزه في أثناء سير هذا المقرّر، والتطوّر في المهارات والسمات المرتبطة بالتحوّل إلى متعلّم متقدّم ناجح.

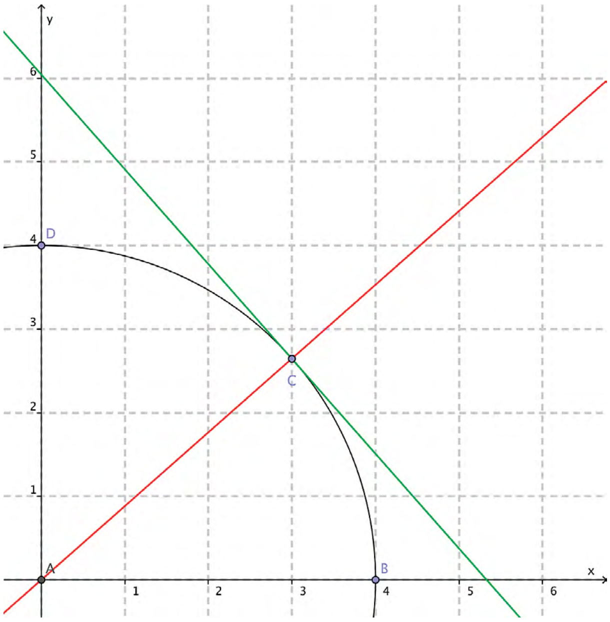
الوحدة الأولى

دراسة الدوال باستخدام حساب التفاضل والتكامل

الأهدافُ التعلميّةُ للوَحدةِ

- تطوير فهم عميق للأفكار الرياضية التي يقوم عليها الإشتقاق بما في ذلك الأفكار الرئيسية في الإتصال والنهايات.

النشاط الأول
ميل منحنى الدائرة



نهتم في العديد من المسائل الرياضية بدراسة شدّة الإنحدار لمنحنى ما عند نقطة معينة. ولحساب هذا الإنحدار نحتاج إلى إيجاد الميل للمماس عند هذه النقطة.

سوف تدرس في هذا النشاط بعضا من طرق حساب ميل مماس الدائرة والتي تعد ذات منحنى بسيط يمكن حساب ميله مباشرة.

ويمكننا كذلك استخدام طريقة التقريب ومن ثم إنشاء المقارنة بين نتائج الطريقتين.

أ) **حساب الميل بطريقة مباشرة**

يوضح الشكل المجاور جزء من منحنى دائرة مركزها $(0\,,0)$ ونصف قطرها 4 وحدات.

1. انسخ الشكل بدقة.

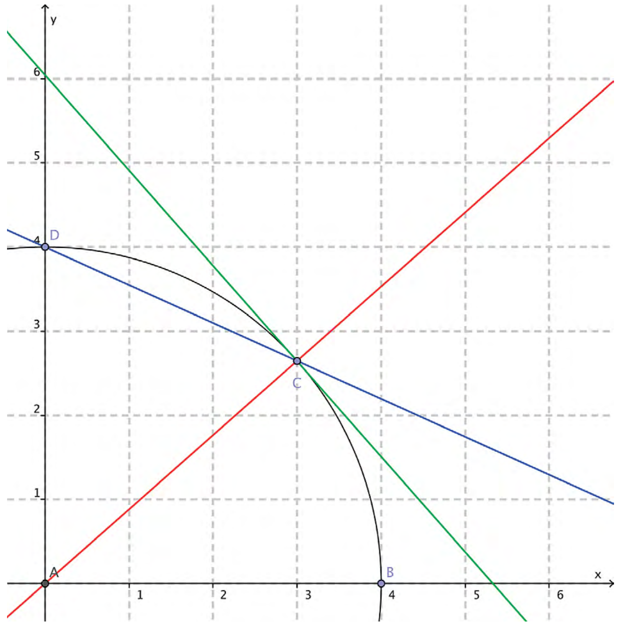
a. أوجد معادلة الدائرة.

b. الإحداثي x للنقطة C هو 3 ، أوجد الإحداثي y لها.

c. المستقيم AC يمثل نصف قطر الدائرة ، أوجد ميل AC.

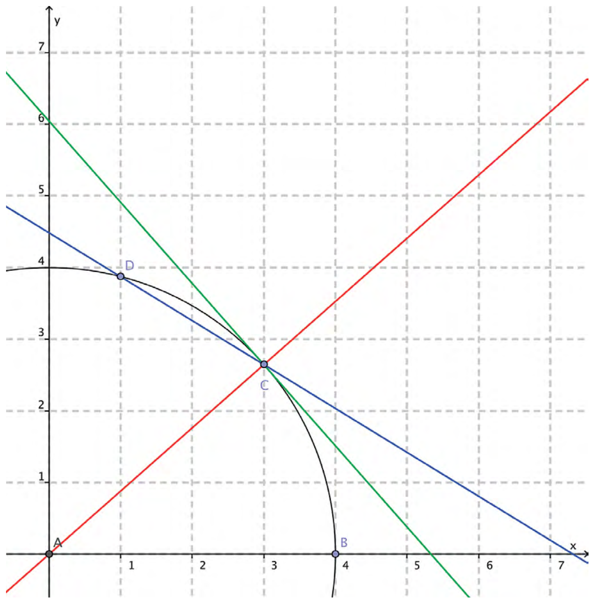
d. يمثل المستقيم الأخضر مماساً للدائرة عند النقطة C. احسب ميل المستقيم.

ب) حساب الميل باستخدام التقريب المتعاقب



لقد تم حساب ميل المماس بطريقة مباشرة وسهلة ولكن لا يمكن استخدام هذه الطريقة في العديد من المنحنيات المعقدة.

سوف ندرس الآن طريقة لحساب الميل يمكن تطبيقها على نطاق أوسع من المنحنيات.



قارن بين الشكل أعلى الصفحة والشكل في الصفحة السابقة، نلاحظ أنه قد تم إضافة مستقيم ذو لون أزرق ويمر في كل من النقطتين $D = (0 , 4)$ و C.

2. كما ومن الممكن ملاحظة أن ميل المستقيم DC مقارب نوعاً ما لميل المماس ذو اللون الأخضر.

a. احسب ميل المستقيم DC .

تخيل الآن أن النقطة D تتحرك باتجاه عقارب الساعة على منحنى الدائرة حتى تصل إلى النقطة التي إحداثي x لها هو 1 .

كما تلاحظ في الشكل المجاور فإن ميل المستقيم DC مقارب بشكل أفضل لميل المماس عند النقطة C.

b. احسب احداثيات النقطة D واستخدمها لإيجاد قيمة ميل المستقيم DC.

c. الآن قم بتحريك النقطة D لكي تصبح أقرب إلى النقطة C ويكون الإحداثي x لها هو 2.
احسب الميل الناتج للمستقيم DC.

d. قم بالتحقق من نتيجة ما يحدث عند اقتراب النقطة D من النقطة C وسجل النتائج التي حصلت عليها في جدول مشابه للتالي:

الإحداثي x للنقطة D	0	1	2	2.5	2.9	2.99
الإحداثي y للنقطة D						
ميل المستقيم DC						

3. كيف تجد القيم التقريبية المتعاقبة التي قمت بحسابها مقارنة بالقيمة الحقيقية للميل الذي أوجدته في المهمة 1؟

4. ارسم دائرة نصف قطرها 5cm ومركزها $(0,0)$. استخدم الطريقة الدقيقة وطريقة التقريب المتعاقب لحساب الميل عند النقاط (x, y) الواقعة على الدائرة بحيث أن:

a. $x=2$ و $y>0$

b. $x=3$ و $y<0$

c. $x<0$ و $y=-2$

d. $x=-4$ و $y>0$

النشاط الثاني
تمثيل دالة الميل بيانياً

في هذا النشاط سوف تجد القيمة التقريبية لميل منحنى دالة عند نقطة واقعة عليه بطريقتين ، الأولى هي رسم مماس المنحنى عند هذه النقطة والثانية هي حساب الميل لجزء صغير من المنحنى عند هذه النقطة.

يمكن التفكير بالقيم الناتجة عن حساب الميل عند نقاط مختلفة على أنها دالة جديدة تسمى دالة الميل ويرمز لها بالرمز $g(x)$.

ويتمثيل الدالة $g(x)$ بيانياً ومقارنتها بالدالة الأصلية ودوال أخرى، يمكن مشاهدة العلاقات بين $g(x)$ ودوال أخرى درستها سابقاً.

الجزء الأول

a. قم برسم محورين على ورق رسم بياني مستخدماً المقياس 2cm لكل وحدة على المحور x والمقياس 1cm لكل وحدة على المحور y.

ضع القيم من -5 إلى 5 على المحور x والقيم من -10 إلى 18 على المحور y. ارسم المنحنى $y = x^2$.

b. ارسم مماس المنحنى عند $x=2$. استخدم نقطتين على المماس لإيجاد قيمة تقريبية لميله وهو مساوٍ لميل المنحنى عند $x=2$ وهذا يمثل القيمة $g(2)$.

c. انسخ الجدول التالي وضع القيمة التقريبية للميل التي حصلت عليها في الفقرة (b).

-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	x
									$g(x)$ باستعمال المماس

d. كرر الفقرة (b) لجميع قيم x الموجودة في الجدول. اكمل الصف الثاني واترك الصف الثالث فارغاً في الوقت الحالي.

سوف تقوم وبشكل تقريبي بتقدير ميل المنحنى بطريقة مختلفة وذلك لتتحقق من مدى دقة التقريب الذي حصلت عليه للدالة $g(x)$.

على الرغم من أن $y = x^2$ هو منحنى فإنه وبتكبير جزء صغير منه نلاحظ أن المنحنى قد أصبح أقرب إلى المستقيم وكلما قمنا بزيادة مقدار التكبير أصبح المنحنى أقرب وبشكل كبير إلى المستقيم.

من خلال حساب الميل للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(2 , 4)$ و $(2.05 ,4.2025)$ والواقعتين على المنحنى $y = x^2$ سوف تحصل على تقريب مختلف لميل المنحنى عند $x=2$ مقارنة بالميل الذي تم إيجاده مسبقاً. يمكن الحصول على ميل أكثر دقة من خلال حساب ميل القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(2,4)$ و $(2.05, 4.2025)$.

e. أوجد ميل القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين (x, y) و $(x + 0.05, y + 0.05)$ وقم بتسجيل هذه القيم في الجدول التالي.

-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	x
									$g(x)$ باستعمال المماس
									$g(x)$ باستعمال القطعة المستقيمة

f. استعمل هذه الطريقة لتقدير قيمة الميل وإكمال الصف الثالث من الجدول.

g. مثّل منحنى الدالة $y = g(x)$ بيانياً على المستوى الإحداثي نفسه الذي مثّلت عليه الدالة الأصلية.
يشكّل منحنى الدالة $y = g(x)$ مستقيماً معادلته $y = 2x$
هل كان المنحنى الذي قمت برسمه مقارباً لذلك؟ إذا لم يكن كذلك فقم بمراجعة تقديراتك التي قِيمُها بعيدة عن هذا المستقيم.

h. الآن مثِّل الدالة $y = x^2 + 6$ بيانياً وقم بتطبيق الخطوات من (a) إلى (g) على منحناها. هل تستطيع توقع دالة الميل في هذه الحالة؟ اشرح توقعك.

i. ماذا عن دالة الميل لمنحنى $y = 5x$ ؟ للحصول على دالة الميل يجب تطبيق الخطوات من (a) إلى (e).
هل تستطيع توقع الدالة $g(x)$ لهذا المنحنى؟ اشرح توقعك.

الجزء الثاني

تحتاج في هذا النشاط إلى استخدام التقدير الدائري (الراديان) لذا تأكد من ضبط آلتك الحاسبة لكي تعمل بالراديان.

a. قم برسم محورين على ورقة رسم بياني مستخدماً المقياس 12cm لكل وحدة على المحور x والمقياس 8cm لكل وحدة على المحور y. ارسم بدقة المنحنى $y=\sin x$ لقيم x الواقعة بين $-\frac{\pi}{6}$ و $\frac{13\pi}{6}$

b. ارسم مماس المنحنى عند النقطة التي فيها $x = \frac{\pi}{6}$. اختر نقطتين واقعتين على المماس لتقدير ميله وهو بالتالي ميل المنحنى عند $x = \frac{\pi}{6}$ وهذا يمثل القيمة $g\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

c. انسخ الجدول التالي وضع القيمة التقريبية للميل التي حصلت عليها في الفقرة (b).

x	0	2π	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{6}$	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$
$g(x)$ باستعمال المماس													
$g(x)$ باستعمال القطعة المستقيمة													

d. كرر الفقرة (b) لجميع قيم x الموجودة في الجدول. أكمل الصف الثاني واترك الصف الثالث فارغاً في الوقت الحالي.

e. قم بتقدير ميل المنحنى $y=\sin x$ عندما $x= \frac{\pi}{6}$ أو $x=0.52356$ من خلال حساب ميل القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(0.523, \sin(0.523))$ و $(0.524, \sin(0.524))$ ؛ أي بين النقطتين $(0.523,0.4995)$ و $(0.524,0.5003)$. اكتب القيمة التي حصلت عليها في الجدول.

f. كرر الفقرة(e) لجميع القيم الموجودة في الجدول.

g. استخدم معرفتك المسبقة للدوال وتوقع أفضل تقدير للدالة $g(x)$. مثل الدالة $y = g(x)$ بيانياً على نفس المحاور الإحداثية.

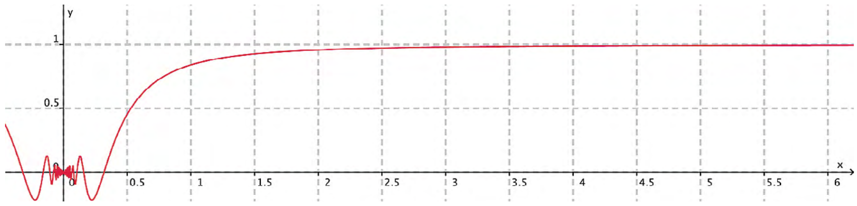
h. مثل الدالة $y = \cos x$ بيانياً على نفس المحاور الإحداثية وقارن بين منحنى الدالة $y = g(x)$ و منحنى الدالة $y = \cos x$ هل المنحنيان متشابهان؟ يجب أن يكونا كذلك. في حالة عدم وجود تشابه ، اختبر مدى دقة قيم الميل التي أوجدتها.

النشاط الثالث
أشباه الكميات المرحلّة

لقد تم على مر السنين تطوير العديد من الطرق المستخدمة لإيجاد ميل المنحنى عند نقطة واقعة عليه ، وهذا التطوّر لم يمر بمراحل سهلة بل كانت توجد العديد من الصعوبات والإختلافات الجوهرية حول هذه الطرق قبل التوصل إلى الطرق الحديثة وإقرارها.

إن النتائج التي حصلنا عليها في النشاط السابق موثوق بها ولكن هل من الممكن التأكد من دقتها؟ لهذا السبب سوف يتم طرح العديد من الأفكار للتحقق من مدى فعالية هذه الطرق.

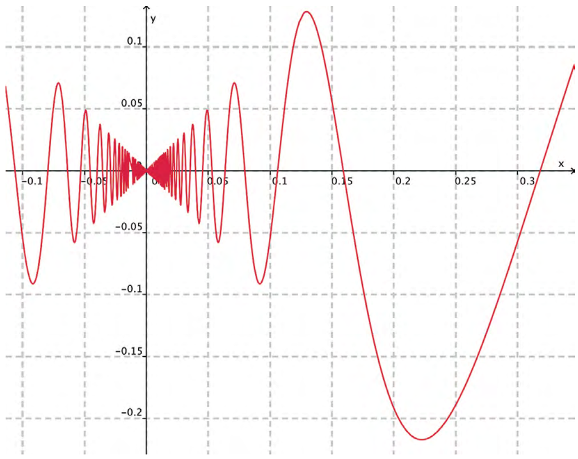
1. يوضح الشكل التالي جزءاً من التمثيل البياني للدالة $y = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$



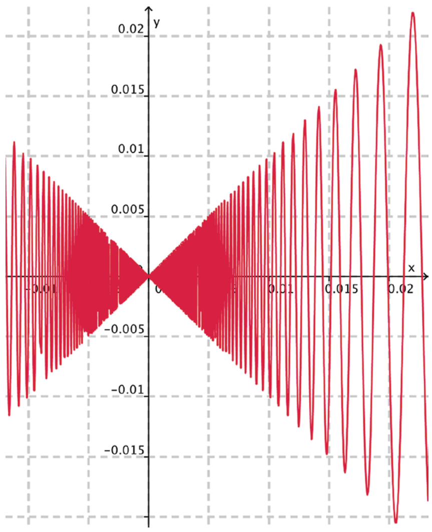
a. استخدم طريقة التقريب لإيجاد ميل مماس المنحنى عند $x = 1$.
(تأكد من أن تكون الآلة الحاسبة في وضعية التقدير الدائري (الراديان))

b. احسب الآن الميل عندما $x = 0.2$

c. احسب الآن الميل عندما $x = 0.1$. إن تكبير الجزء المطلوب من التمثيل البياني سوف يساعدك كثيراً على تصور الحل.



d. لنفرض الآن أنك تريد حساب ميل المنحنى عند $x = 0.01$



يوضح الشكل المجاور جزء من التمثيل البياني للدالة عندما يكون المجال بين $x = -0.01$ و $x = 0.02$.

من الصعب في هذه الحالة استخدام الطرق التي درستها سابقاً لحساب الميل. أذكر الأسباب.

2. متناقضات زينو

عاش الفيلسوف اليوناني زينو قبل 2500 سنة في إيليا وهي منطقة معروفة الآن بجنوب إيطاليا. وقد قام هذا العالم بوضع سلسلة من المتناقضات والتي يمكن النظر إليها على أنها ألغاز توضح مواقف مألوفة من العالم كانت تبدوا على أنها مستحيلة الحدوث.

درست في كتاب الصف الثاني ثانوي التناقض في قصة المُحارب أخيل مع السلحفاة. نُوضح الآن أحد متناقضات زينو للأسهم.

قم بالتفكير في السهم المنطلق من القوس. ففي لحظة الانطلاق نجد ان السهم يشغل حيزاً من الفراغ مساوياً لطوله ولا يظهر أي حركة ولما كانت هذه الملاحظة صحيحة في أي لحظة فإن السهم لا يمكن أن يكون في حالة الحركة.

المهمة: من الواضح وجود خلل في هذا الاستنتاج ، فهل من المعقول أن السهم لا يتحرك ! هل تستطيع مناقشة هذه المتناقضة وما الذي يمكنك قوله؟

3. طريقة نيوتن للتغيّر المستمر: لقد استخدم العالم إسحاق نيوتن (من عام 1643 م إلى 1747 م) طريقة التغير المستمر (Fluxion) لإيجاد الميل عند أي نقطة واقعة على منحنى ما.

سوف نقوم بشرح هذه الطريقة من خلال إيجاد ميل المنحنى $y = x^2$ عند النقطة $A = (3, 9)$

يمكننا البدء بأي نقطتين واقعتين على المنحنى. النقطة الأولى هي (x, x^2) والنقطة الثانية قريبة جداً من النقطة الأولى و وتقع على يمينها. الإحداثي x لهذه النقطة هو $x + h$. نحسب الآن الإحداثي y لهذا النقطة وهو عبارة عن مربع المقدار $x + h$ وبمعنى آخر: $(x + h)^2 = x^2 + 2xh + h^2$

وبالتالي فإن النقطتين هما (x, x^2) و $(x + h, x^2 + 2xh + h^2)$

ميل المستقيم المار بهاتين النقطتين هو

$$\text{الميل} = \frac{y \text{ مقدار التغير في}}{x \text{ مقدار التغير في}} = \frac{(x^2+2xh+h^2)}{(x+h)-x} = \frac{2xh+h^2}{h}$$

فكر الآن فيما سيحدث عندما يصبح المقدار h صغير جداً . نجد أن المقدار h^2 يمكن إهماله عندما تقترب h من الصفر. ونتيجة لذلك نجد أن النقطتين سوف تكونان متطابقتان وبالتالي فإن قيمة الكسر سوف تساوي $2x$.

وبالتالي فإن قيمة الميل عند $x = 3$ هي 6.

المهمة: استخدم طريقة نيوتن لحساب ميل المنحنى $y = x^3$ عندما $x = 2$

4. نقد بيركلي

من المؤكد أن طريقة نيوتن سوف تعطينا نتائج، ولكن توجد العديد من الثغرات المنطقية في هذه الطريقة والتي تم طرحها عن طريق جورج بيركلي (من 1685 م إلى 1753 م) في كتابه الذي يحمل العنوان التحليل (Analyst) ويحتوي على التساؤلات :

ما الذي يعنيه التغير المستمر؟ وما هي سرعة وطبيعة الزيادات المنتهية؟

ما هي هذه الكميات المنتهية ؟ وهي كذلك ليست كميات محدودة ولا كميات صغيرة غير منتهية وهي لا شيء حتى الآن. من غير المحتمل أن نسميها أشباه كميات مرحلة.

المهمة: كيف يمكن الرد على انتقادات بيركلي؟

5. مثال أخير

لقد تعرفت في بداية هذا النشاط على دوال لم يكن من الممكن إيجاد دالة الميل لها بطريقة سهلة، سوف ننهي هذا النشاط بطرح مثال لدالة من المستحيل إيجاد دالة ميل لها وتسمى دالة دريتشلت (Dirichlet) والمعرفة كالتالي:

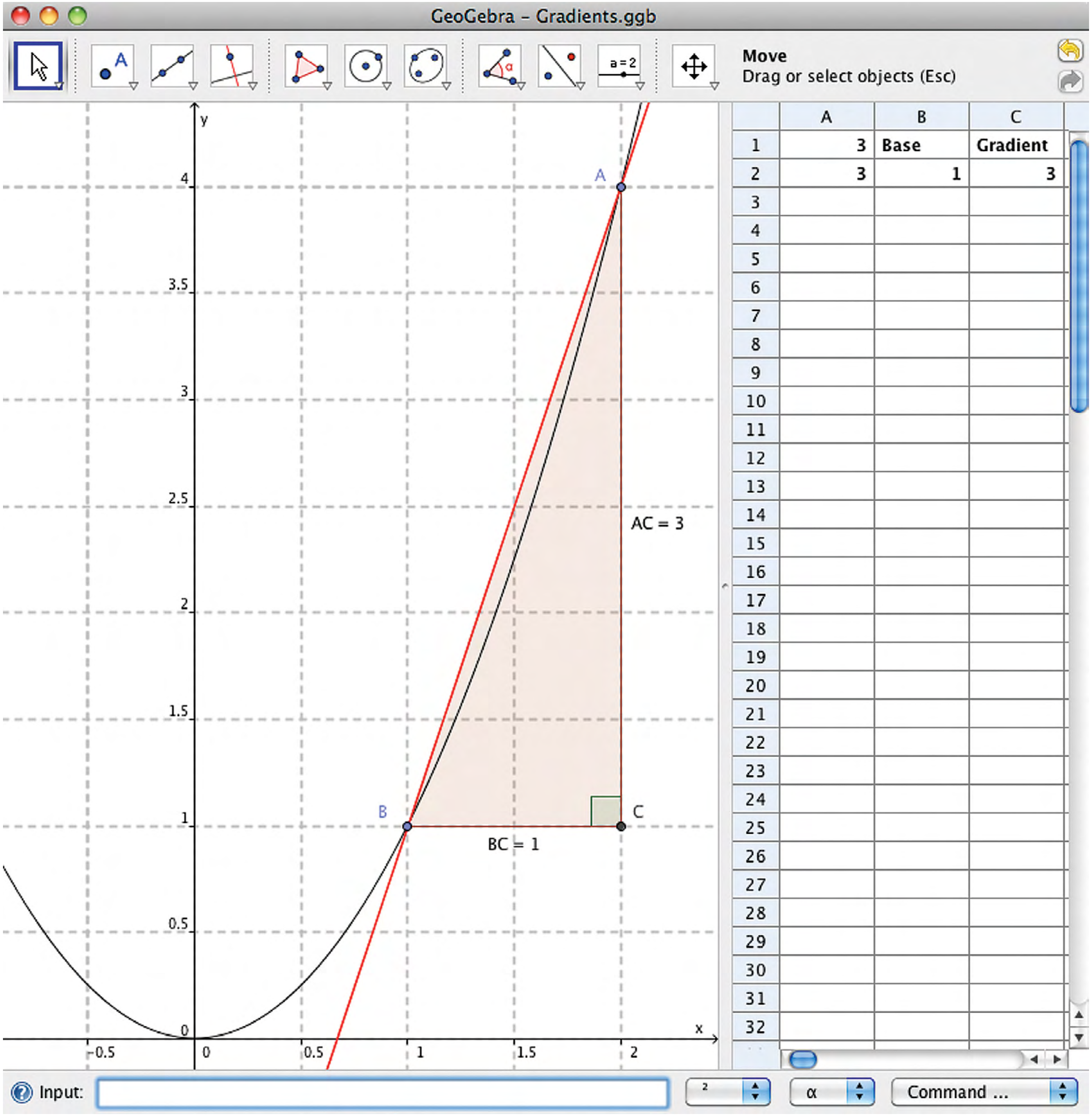
$$\mathrm{D}(x)=\begin{cases} 1 \ , \ x \in \mathrm{Q} \\ 0 \ , \ x \in \mathrm{I} \end{cases}$$

حيث Q هي مجموعة الأعداد النسبية، I مجموعة الأعداد غير النسبية.

المهمة: تحقق من سلوك الدالة. ولماذا يستحيل حساب دالة الميل لمنحناها ؟

النشاط الرابع
دراسة الميل باستخدام تقنية المعلومات ICT

يوضح الشكل التالي تمثيلاً بيانياً يمكن استخدامه لإستكشاف ميل المستقيم القاطع والمار بنقطتين على منحنى.



من خلال العمل في هذا الشكل سوف نحاول إيجاد قيمة تقريبية لميل المنحنى عند النقطة $B(1,1)$. يوضح الجدول الإلكتروني والموجود على يمين الشاشة طول القاعدة والارتفاع للمثلث القائم ABC وكذلك ميل المستقيم القاطع AB. يمكننا تحريك النقطة A لكي تكون قريبة من النقطة B ومن ثم نستكشف أثر ذلك على الميل.

1. استخدام برنامج جيوجبرا لعمل نسختك الخاصة من الشكل المعطى أعلاه.

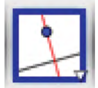
التعليمات التالية سوف تساعدك على عمل نسخة مبسطة للرسم.

افتح صفحة جديدة في برنامج جيوجبرا. استخدم قائمة **العرض** (View) للتأكد من ظهور المحاور والشبكة الإحداثية.

استعمل قائمة **خيارات** (Options) لضبط **التقريب** (Rounding) إلى 5 منازل عشرية.

أدخل الصيغة $y = x^2$ في منطقة **الإدخال** (Input) والموجودة أسفل الشاشة وذلك بطباعة: $y = x^\wedge 2$

اختر أمر **نقطة جديدة** (New point) ثم انقر على موقعين مختلفين على منحنى القطع المكافئ لإضافة النقطتين A و B.



اختر قائمة **مستقيم عمودي** (perpendicular line) ومن ثم قم بما يلي:

انقرعلى النقطة A ثم على المحور x.

انقرعلى النقطة B ثم على المحور y.

اختر أمر **تقاطع منحنيين** (Intersect Two Objects) (يمكن الحصول عليه من خلال النقر على السهم الصغير والموجود أسفل أيقونة **نقطة جديدة** (New Point) والتي استعملتها قبل قليل) ثم انقر على كلا المستقيمين الناتجين في الخطوة السابقة لعمل نقطة التقاطع C.

اختر أمر **المسافة أو الطول** (Distance or Length)

يمكن الحصول عليه من خلال النقر على السهم الصغير الموجود أسفل أيقونة **زاوية** (Angle)

انقر على النقطة A ومن ثم على النقطة C

انقر على النقطة B ومن ثم على النقطة C

الآن قم باختيار **عرض الجدول الإلكتروني** (Spreadsheet View) من قائمة **العرض** (View).

أدخل الصيغة [A،C] distance = في الخلية A1

أدخل الصيغة [B،C] distance = في الخلية B1

أدخل الصيغة A1/B1 = في الخلية C1

اختر أمر **الحركة** (Move) ومن ثمّ اختر النقطتين A و B وقم بتحريكهما إلى أي موقع تريده على الرسم. يمكنك قراءة الميل الناتج من الجدول الإلكتروني.

للحصول على شكل أكثر وضوحاً ، يمكنك القيام بما يلي:

- استخدم الأمر **مضلع** (Polygon) لإنشاء المثلث ABC.
- قم بإخفاء المستقيمين المتعامدين .

تأكد من استخدامك لخاصية **التقريب** (Rounding) (الموجودة في قائمة **خيارات** (Options)) لضبط التقريب ليكون 5 **فواصل عشرية** (5 decimal places).

2. انسخ الجدول التالي وقم بوضع قيمة ميل المستقيم BA عند النقطة A (2,4) في الجدول. يمكنك مشاهدة إحداثيات كل من A و B بالنظر إلى منطقة الجبر (Algebra) والواقعة في الجزء الأيسر من الشاشة.

الإحداثي x للنقطة A	2	1.5	1.2	1.1	1.01	1.001
الإحداثي y للنقطة A	4					
ميل BA						

3. حرِّك النقطة A إلى الموقع الذي يكون فيه $x = 1.5$ واحسب بقية القيم الموجودة في العمود التالي.

4. استمر بتحريك النقطة A بنفس الطريقة حتى تقوم بإتمام الجدول. لن تستطيع تحريك النقطة A إلى الموقع الذي يكون فيه إحداثي x لها 1.01 أو 1.001 إلا إذا قمت بتكبير الرسم للحصول على دقة كافية للحركة. يمكن الحصول على خيار **التكبير** (Zoom In) عن طريق الضغط على رأس السهم أسفل أيقونة **عرض تحريك الرسوم** (Move Graphic View)

e. ما الذي سيحدث في حال تم تحريك النقطة A إلى (1,1)؟

f. الآن قم بإنشاء واستكشاف بعض الأشكال التي استخدمتها في بعض الأنشطة السابقة من هذه الوحدة باستخدام برنامج جيوجبرا. ومنها على سبيل المثال:

- ميل منحنى الدائرة في النشاط 1.
- دالة الميل في النشاط 2.
- التمثيل البياني للدالة $y = x \sin \frac{1}{x}$ في النشاط 3.

الوحدة الثانية

الدوال الأُسيّة والعلاقات

مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع
King Abdulaziz & his Companions Foundation for Giftedness & Creativity

الأهدافُ التعلميّةُ للوَحدة

- استقصاء العلاقة بين الصيغ الجبريّة للدوالّ الأسيّة وتمثيلاتها البيانيّة عند تطبيق مجموعة من التحويلات الهندسيّة على التمثيلات البيانيّة.
- استكشاف طبيعة الدوالّ الأسيّة، ودراسة الشروط التّي تمثّل عندها الدوالّ الأسيّة مواقف مفيدة من واقع الحياة.

سوف تستقصي في هذه الوحدة، الدوالّ الأسيّة، وستبحث في العلاقة بين الصيغ الجبريّة لهذه الدوالّ وتمثيلاتها البيانيّة بوساطة تمثيل منحنيات هذه الدوالّ بيانياً، كما ستتعامل مع بعض تطبيقات الدوالّ المثلّثيّة التّي تستعمل لتمثيل مواقف من واقع الحياة.

لا بدّ لك من استعمال تقنية تمثيل بياني لاستكشاف الدوالّ الأسيّة، وتمثيلها بشكل دقيق.

النشاط الأول
الدوالّ الأسيّة

الدوالّ الأسيّة هي دوالّ على الصورة $f(x) = a^x$.

فمثلاً، الدوالّ $y = 2^x, f(x) = 0.5^x, y = 3^{-x}, g(x) = 10^{2x}, h(t) = 2^t, z = 8^{(w-1)}$ جميعها دوالّ أسيّة.

لنبدأ البحث في الدالّة الأسيّة البسيطة $y = 2^x$. يسمّى العدد (2) في هذه الدالّة الأساس، و تسمّى x الأسّ. لاحظ أنّ قيم هذه الدالّة y تزداد بشكل متسارع مع زيادة الأسّ x.

1. كوِّن جدولاً لقيم الدالّة $y = 2^x$ في الفترة $-8 \le x \le 8$.

a. مثِّل النقاط التّي حدّدتها في جدولك على ورقة رسم بيانيّ بأبعاد مناسبة، ثمّ مثِّل الدالّة $y = 2^x$ بيانياً.

b. استعمل حاسبة بيانيّة لتمثيل الدالّة $y = 2^x$ بيانياً على الفترة نفسها، للتحقّق من إجابتك في (a).

c. استعمل حاسبة بيانيّة لتمثيل الدوالّ $y = 2^x, y = 3^x, y = 10^x$ بيانياً في المجال نفسه.

d. أضف تمثيليْ الدالّتيْن $y = 3^x, y = 10^x$ على الورقة نفسها التّي استعملتها لتمثيل $y = 2^x$ دون استعمال جدْول قيم، ثمّ أضف تمثيليْ الدالّتيْن $y = 5^x, y = 12^x$.

e. تحقّق من إجابتك باستعمال تقنية تمثيل بياني.

f. اكتب فقرةً تصف فيها الخصائص الأساسيّة للدوالّ الأسيّة عندما يكون الأساس عددًا صحيحًا موجبًا، من حيث الشكل العامّ، والصفات المشتركة، وكيفيّة تغيّر قيم y عند تغير قيم x. ثمّ قارن بين أشكال المنحنيات لقيم مختلفة للأساس.

2. استعمل تقنية تمثيل بياني لتمثيل مجموعة دوالّ أسيّة على الصورة: $y=(-a)^x$؛ على سبيل المثال: $y=(-2)^x$.

a. اكتب فقرة تصف تمثيلات هذه الدوالّ.

b. استعمل حاسبة لإيجاد قيمة كلّ من: $(-2)^3, (-2)^4, (-2)^{0.5}, (-2)^{3.5}$، ثمّ فسّر إجاباتك.

c. والآن، بيّن سبب عدم قدرتك على تمثيل دوالّ أسيّة ذات أساس سالب.

d. استقصِ الحالات التّي يكون فيها الأساس عددًا موجبًا غير صحيح. هل من الممكن تمثيل هذه الدوالّ؟ أعطِ أمثلة على مجموعة من هذه الدوالّ.

3. صِف التحويل الجبريّ اللازم لعكس منحنى الدالّة: $f(x)=a^x$ في المستقيم $y=0$.

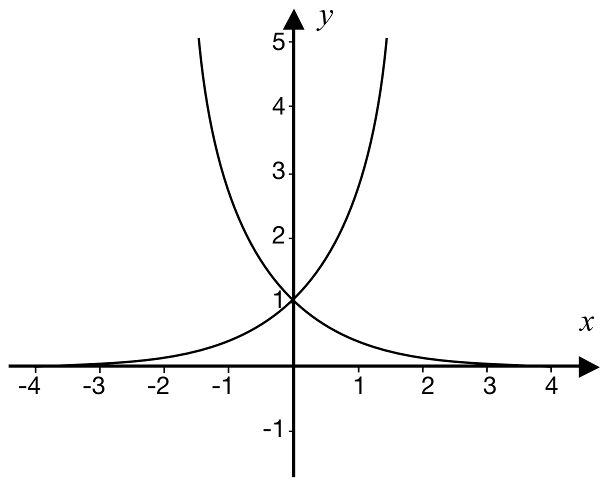
4. يوجد خطّ تقارب أفقيّ لمنحنى الدالّة $f(x)=a^x$ هو $y=0$، عندما $a>1$.
أيْ أنّ: $y=0$ عندما $x\to\infty$. صف التحويل الهندسيّ اللازم لجعل خطّ التقارب الأفقيّ هو $y=b$.

5. صِف تأثير انعكاس منحنى الدالّة $f(x)=2^x$ في المستقيم $y=x$.
صِف الدالّة الجديدة، وأعطِ أمثلةً على قيم هذه الدالّة عند بعض الأعداد الصحيحة. ما هذه الدالة؟ ما العلاقة بين $f(x)=2^x$ والدالّة الناتجة؟

1. سوف تستقصي في هذه المهمّة الدوالّ الأسيّة عندما يكون الأساس بين 0 و 1.
ابدأ بالدالّة $y = (0.1)^x$ ذلك لأنّ حساباتها مباشرة.
a. كوِّن جدولاً لقيم الدالة $y = (0.1)^x$ لقيم x في الفترة $-5 \le x \le 5$.
b. مثِّل الأزواج المرتبة التّي حصلت عليها على ورق رسم بيانيّ، ثمّ ارسم منحنى الدالّة $y = (0.1)^x$.
c. تحقّق من دقّة التمثيل البياني الذي حصلت عليه باستعمال حاسبة بيانيّة وعلى المجال نفسه.
d. صف التحويل الهندسيّ الذي يُنتِج الدالّة $y = 10^x$ من الدالة $y = (0.1)^x$.
e. فسر جبريًا أو حسابيًا لماذا يُنتج هذا التحويل الدالّتين كلّ من الأخرى.

2. استخدم جدول قيم لتمثيل الدالّة $y = (0.5)^x$ بيانياً واستعمل تقنية تمثيل بياني للتحقق من إجابتك.
a. أوجِد دالّةً تمثّل انعكاس الدالّة $y = (0.5)^x$ في المستقيم $x = 0$.
b. مثِّل الدالّتين $y = (0.5)^x$ و $y = 2^x$.
c. أوجِد أزواجًا أخرى من الدوالّ الأسيّة التّي تكون فيها كلّ من الدالّتين انعكاسًا للدالّة الأخرى في المستقيم $x = 0$.
e. اكتب فقرة تلخّص استنتاجاتك.

3. a. وضِّح لماذا تكون العلاقة بين الدالّتين $y = a^x$ و $y = (\frac{1}{a})^x$ هي ذاتها العلاقة بين الدالّتين $y = a^x$ و $y = a^{-x}$.
b. أوجِد دالّتين أسيّتين يتطابق تمثيلاهما البيانيّان مع الشكل أدناه.



c. استعمل الحاسبة البيانيّة للتحقّق من إجابتك في الفرع b.

4. استخدم تقنية تمثيل بياني لتمثيل الدالّتين $f(x) = 2^x$ ،$g(x) = 2^{2x}$ بيانياً.

a. اكتب تعليقًا على العلاقة الهندسيّة بين الدالّتين $f(x) = 2^x$ ،$f(x) = 2^{2x}$.

b. مثِّل الدالّتين $f(x) = 10^x$ و $g(x) = 10^{2x}$ بيانيًّا على المستوى الإحداثي نفسه دون استعمال جداول القيم، ثمّ استعمل تقنية تمثيل بياني للتحقّق من إجابتك.

5. استعمل تقنية تمثيل بياني لتمثيل الدوالّ $f(x) = 2^x$ و$g(x) = 2^{x-1}$ و$h(x) = 2^{x+1}$ بيانياً.

a. اكتب تعليقًا على العلاقة الهندسيّة بين هذه الدوالّ.

b. مثِّل الدوالّ $f(x) = 10^x$ و $g(x) = 10^{x-1}$ و $h(x) = 10^{x+1}$ بيانيًّا على المستوى الإحداثي نفسه، دون استعمال جداول القيم، ثمّ استعمل تقنية تمثيل بياني للتحقّق من إجابتك.

6. استقصِ جميع الدوالّ الأسيّة على الصورة $f(x) = a^{bx+c} + d$، ثمّ اكتب استنتاجاتك المتعلّقة بالتحويلات الهندسيّة التّي تنتج عن $f(x) = a^x \to f(x) = a^{bx+c} + d$ لقيم مختلفة من a, b, c, d، ثمّ اكتب تقريرًا يلخّص استنتاجاتك، وأيّ شروط أخرى.

النشاط الثالث
خدمة توصيل الوجبات

افتُتِح مطعم للوجبات السريعة في منطقتك، ويحرص مدير المطعم على توصيل الوجبات ساخنة إلى الزبائن، لذا قرّر الاسترشاد برأيك بصفتك خبيرًا في الرياضيّات لمعرفة الزمن الذي تحافظ فيه الوجبة على درجة حرارتها بعد إعدادها.

سوف يستعمل عامل المطعم درّاجة ناريّة لتوصيل الوجبات، وذلك بسرعة متوسّطها 30km/h. فإذا كان الزمن اللازم لبقاء الوجبة ساخنة معروفًا، فإنّ بإمكان الإدارة تحديد الأماكن التّي من الممكن أن توصل إليها الوجبات السريعة إلى الزبائن. لذلك؛ قامت الإدارة بعمل مسح إحصائيّ لزبائن المطعم، فتبيّن أنّ درجة حرارة 48^{o} هي أقلّ درجة حرارة مقبولة للوجبة.

وبصفتك خبيرًا رياضيًّا، قرّرتَ القيام بتجربة لإيجاد المعدّل الذي تبرد فيه الوجبة، فأخذتَ وجبةً بعد إعدادها مباشرةً ووضعتَها في صندوق توصيل يحتوي ثقبًا؛ للتمكّن بوساطته من قياس درجة الحرارة، وقمت بقياس درجة الحرارة فور إعداد الوجبة، ثمّ قياسها كلّ دقيقة، وعلى مدار عشر دقائق، فكانت النتائج كما هي مبيّنة في الجدول أدناه:

الزمن (دقيقة)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
درجة الحرارة (C^{o})	86.12	84.21	82.36	80.57	78.83	77.14	75.50	73.91	72.36	70.87	69.43

1. على فرض أنّك تركت الوجبة في صندوق التوصيل لفترة زمنية طويلة:
   – كم تبلغ درجة الحرارة المتوقعة للوجبة بعد (i) 30 دقيقة، (ii)ساعتين، (iii) 24 ساعة، على التوالي.

2. مثّل الأزواج المرتبة الظاهرة في الجدول بيانياً، وارسم منحنى أفضل دالة خطية $f(t)$ تمثّل هذه البيانات، ثمّ أوجدْ الدالة .

3. استعمل الدالّة $f(t)$ لحساب الزمن اللازم كي تصل درجة حرارة الوجبة إلى 48^{o} درجة.

4. سنختبر الآن مناسبة هذا النموذج لوصف البيانات:
   استعمل الدالّة $f(t)$ لحساب درجة الحرارة بعد (i) 30 دقيقة، (ii)ساعتين، (iii) 24 ساعة،على التوالي. ثمّ قارن إجاباتك بتلك الإجابة التيّ حصلت عليها في المهمة 1، ثمّ اكتب تعليقًا على خصائص الدالّة $f(t)$ التّي لا تجعلها أفضل نموذج لوصف درجة الحرارة.

5. استعمل طريقة جبرية لإيجاد دالّة تربيعيّة $g(t)$ تَصِف البيانات المعطاة ثمّ استعمل برمجية حاسوبية للتحقق من إجابتك. بيّن لماذا لا تكون الدالّة $g(t)$ أفضل نموذج لوصف درجة الحرارة كما في (4).

6. ينصّ قانون نيوتن للتبريد على أنّ درجة حرارة الوجبة تتبع نموذجًا أسيًّا.
   استعمل معلوماتك حول الدوالّ الأسيّة لإيجاد النموذج الأسيّ $h(t)$ ، ثمّ تحقّق من هذا النموذج باستعمال توقّعاتك في الواجب الأوّل لحساب الزمن اللازم كي تصل درجة حرارة الوجبة إلى 48^{o} درجة، وبناءً على ذلك، جدْ نصف قطر المنطقة الدائريّة التّي يمكن أن يخدمها المطعم.

النشاط الرابع
مقادير كبيرة جدًّا

ستتعامل في هذا النشاط مع ثلاث مسائل تقليديّة تحتوي نموذجًا أسيًّا.

1. **برج هانوي** هو إحدى الأحاجي التّي اقترحها الرياضيّ الفرنسيّ لوكاس عام 1883م، حيث افترض وجود ثلاثة أعمدة، يحتوي العمود الموجود على أحد الطرفين 64 قرصاً مرتّبة فوق بعضها بعضًا، بحيث يكون كلّ قرص أصغر من القرص الذي دونه؛ لتكوّن شكلاً هرمياً. المطلوب هو نقل هذه الأقراص واحداً تلو الآخر إلى عمود آخر شريطة ألاّ يوضع قرص فوق قرص أصغر منه ، لنحصل في النهاية على الترتيب نفسه في عمود آخر.
تعتقد الأحجية أنّه من المستحيل إنجاز هذه المهمّة؛ في أي زمن مهما كان طويلاً.

يتعيّن عليك استقصاء هذه الأحجية بإيجاد أقلّ عدد من الحركات المطلوبة لإنجاز المهمّة لعدّة خيارات من عدد الأقراص. توصّل إلى قاعدة لعدد هذه الحركات، ثمّ برهن صحّة القاعدة التّي توصّلت إليها، واستعملها لإيجاد عدد الحركات المطلوبة لنقل 64 قرص. بإمكانك إيجاد الزمن اللازم لإنهاء العمليّة إن قدّرت الزمن اللازم لنقل قرص واحد.

2. إذا طويتَ ورقةً من منتصفها، ثمّ طويتَ القطعة الناتجة من منتصفها أيضًا، وكرّرت ذلك عدّة مرّات، ما عدد الطيّات الممكنة للورقة؟
لاحظ أنّ ذلك يعتمد على سُمك الورقة، لذا؛ قُصّ الورقة بدلاً من طيّها. ثمّ قصّ الورقة من النّصف وضع جزأيْ الورقة فوق بعضهما، وقصّ الناتج من النصف، ثمّ ضع الأجزاء الأربعة فوق بعضها، وهكذا. كم مرّةً تستطيع قصّ الورق؟ كم سيصل ارتفاع قطع الورق؟ كم مرّةً ستحتاج لقص الورقة كي يصبح ارتفاع الورق مماثلاً لارتفاع الغرفة؟ أو مماثلاً لارتفاع البناية التّي تسكنها؟ أو مماثلاً لارتفاع أعلى بناية في العالم؟ أو بُعد القمر؟ هل من الممكن فعل هذا؟ فسّر إجابتك.

3. يُحكى أنّ خادمًا قدّم خدمة عظيمةً لملك إحدى الدول الغنيّة، فسأل الملك الخادم عن المكافأة التّي يطلبها. فأجاب الخادم "أريد حبّة أرز مقابل أوّل مربّع على لوح الشطرنج، وحبّتين مقابل المربّع الثاني، وأربع حبّات مقابل المربّع الثالث، وهكذا إلى أن تنتهي جميع مربّعات اللوح". فابتهج الحاكم، معتقدًا أنّها مهمّة سهلة، لكنّ الحاكم لم يستطع تحقيق طلب الخادم!

أوّلاً، احسب عدد حبّات الأرز المطلوبة لإنجاز المهمّة. سيكون الناتج عددًا كبيرًا جدًّا، ولكن، كم سيكون هذا العدد المتوقّع ؟ كم عدد أكياس الأرز المطلوبة؟ وكم هو كبير هذا العدد؟ كم وزن الأرز المطلوب؟ كيف ستُنقل هذه الكميّة من الأرز؟ كم المدّة الزمنيّة التّي تحتاجها زراعة هذه الكميّة من الأرز؟

الوحدة الثالثة

الدوال والعلاقات اللوغاريتمية

حول هذه الوحدة

الأهدافُ التعلميّةُ للوَحدةِ

- استكشاف الدوال والعلاقات اللوغاريتمية.
- تطوير فهم عميق لخصائص اللوغاريتمات.

في هذه الوحدة ستقوم باستكشاف اللوغاريتمات و الدوال اللوغاريتمية من خلال عدد من المنظورات. وتتضمن الوحدة مهاماً عملية ، ونهجاً جبرياً وعددياً.

النشاط الأول

اللوغاريتمات

الأسئلة الأربعة الأولى هي تدريبات تُنمِّي مهارتك في التعامل مع اللوغاريتمات.

يجب أن تمتلك ثقةً في فهم العلاقة بين الأسس واللوغاريتمات، حيث

$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$

قبل البدء، اكتب قوانين جمع اللوغاريتمات وطرحها وضربها وقسمتها وقوانين الأسس المُناظرة لها.

1. جِدْ قيمة كلٍّ ممّا يلي:

a. $\log_2 (\log_2 2^2)^2$

b. $\log_{a^a} \sqrt{\dfrac{1}{a\sqrt{a}}}$

c. $(\log_{10} a^2 + \log_{10} b^2) \div \log_{10} ab$

2. جِدْ قيمة: $\log_2 9 \times \log_3 8$.

3. أثبت أنّ: $\log_a x + \log_a x^2 + \ldots + \log_a x^n = n(n+1) \log_a \sqrt{x}$.

4. بسّط العبارة: $\log_{10} \tan 1^\circ + \log_{10} \tan 2^\circ + \ldots + \log_{10} \tan 89^\circ$.

اكتشف يوهان كيبلر (1571م– 1630م) وهو عالم فلكيّ رياضيّ، ثلاثة قوانين تصف حركة الكواكب، وكانت من الاكتشافات المذهلة في علم الفلك. حيث كتب في قانونه الثالث:

تخيلّت في 8 آذار من عام 1618 ..... واعتقدت في البداية أنّني أحلم، وأنّ استنتاجاتي المذكورة في المقدّمة مجرّد افتراض. ولكنّني تحقّقت بما لا يدع مجالاً للشك من أنّ النسبة بين زمنيْ دورتيْ أيّ كوكبيْن حول الشمس، تساوي مرّة ونصف المرّة من النسبة بين متوسط بُعديْهما عن الشمس.

(قم بزيارة الموقع http://plus.maths.org/issue8/features/proof2/ للإطلاع على مزيد من المعلومات).

ماذا يعني ذلك؟

سوف تستقصي هذا السؤال باستعمال اللوغاريتمات.

على فرض أنّ السنة الأرضيّة هي وحدة قياس الزمن، ومتوسّط المسافة (أنظر الملاحظة أسفل الجدول) بين الأرض والشمس هي وحدة قياس المسافة. ويبيّن الجدول التالي متوسّط المسافة (d) ، والزمن (T) الذي يتطلّبه دوران كلّ من الكواكب الستة الأولى حول الشمس .

	عطارد	الزهرة	الأرض	المريخ	المشتري	زحل
d	0.3871	0.7233	1.000	1.524	5.203	9.539
T	0.2408	0.6152	1.000	1.881	11.86	29.46

ملاحظة: تدور الكواكب حول الشمس في مدارات بيضاويّة (كان ذلك هو قانون كيبلر الأول) لذلك تتغيّر المسافة بين الكوكب والشمس. لذا؛ فإننا نأخذ متوسّط المسافة.

5.a. أكمل الجدول التالي، موضّحًا أهمية إيجاد لوغاريتم كلٍّ من المتغيّرين:

	عطارد	الزهرة	الأرض	المريخ	المشتري	زحل
$\log_{10}d$						
$\log_{10}T$						

b. مثّل هذه النقاط بيانيًّا بصورة تقريبيّة على ورقة رسم لوغاريتميّ.

c. ناقش العلاقة التّي تظهر في التمثيل البيانيّ للعلاقة بين لوغاريتم زمن دورة الكوكب، ولوغارتم متوسّط المسافة، ثمّ اكتب العلاقة كصيغة جبرية، مبسطًا إيّاها دون استعمال اللوغاريتم، وموضّحًا صحّة هذه الخطوة.
بيّن كيف تفسّر هذه العلاقة اكتشافات كيبلر.
اكتب العلاقة، وتوضيحاتك بطريقة مفهومة للقارئ.

اللوغاريتمات وقوانين المسطرة المتحركة

قبل ظهور الآلات الحاسبة، كانت جداول اللوغاريتمات والمساطر المتحركة (slide rules) شائعة الاستخدام للقيام بعمليات الضرب والقسمة والعديد من العمليات الحسابية الأخرى. بالرغم من أن الآلات الحاسبة وأجهزة الحاسب الآلي جعلت العمليات الحسابية أسهل بكثير، إلا أنه من المفيد تعلم كيفية عمل الطرائق الحسابية التي استخدمت سابقاً. هذا النشاط سيبحث في القوانين الرياضية المتعلقة باستخدام جداول اللوغاريتمات والمساطر المتحركة.

1. عندما تُستخدم اللوغاريتمات في الحسابات، فإنها تستبدل الضرب والقسمة بالجمع والطرح. الأمثلة الموجودة أدناه تبين كيف يتم ذلك.

الضرب: 1.8×32

نقوم بإيجاد اللوغاريتم لكل من الأعداد المضروبة. (ستقوم بعمل ذلك باستخدام آلة حاسبة ولكن قبل وجود الآلات الحاسبة، كان يتم استخدام كتب مطبوعة تحتوي على جداول اللوغاريتمات). سنستخدم اللوغاريتم للاساس 10.

العدد	اللوغاريتم
32	1.505
1.8	0.255

الآن اجمع قيمة اللوغاريتم: $0.255 + 1.505 = 1.760$.

أخيراً، أوجد قيمة $10^{1.760} = 57.5$ مقرباً إلى منزلة عشرية واحدة

للتحقق من الإجابة، قم بإجراء عملية الضرب مباشرة: $1.8 \times 32 = 57.6$

القسمة: $491 \div 17.6$

قم بإيجاد اللوغاريتم لكل من العددين كما فعلنا في السابق، ولكن اطرح بدلاً من الجمع.

العدد	اللوغاريتم
491	2.691
17.6	1.246

ثم نحسب $2.691 - 1.246 = 1.445$ و من ثم $10^{1.445} = 27.9$

بإجراء القسمة مباشرة $491 \div 17.6 = 27.9$ مقرباً إلى منزلة عشرية واحدة.

الآن قم بإجراء العمليات الحسابية التالية باستخدام اللوغاريتمات. اكتب قيم اللوغاريتمات مقربة إلى 3 منازل عشرية واكتب النتائج النهائية مقربة إلى منزلة عشرية واحدة.

بين خطواتك كما في الأعلى.

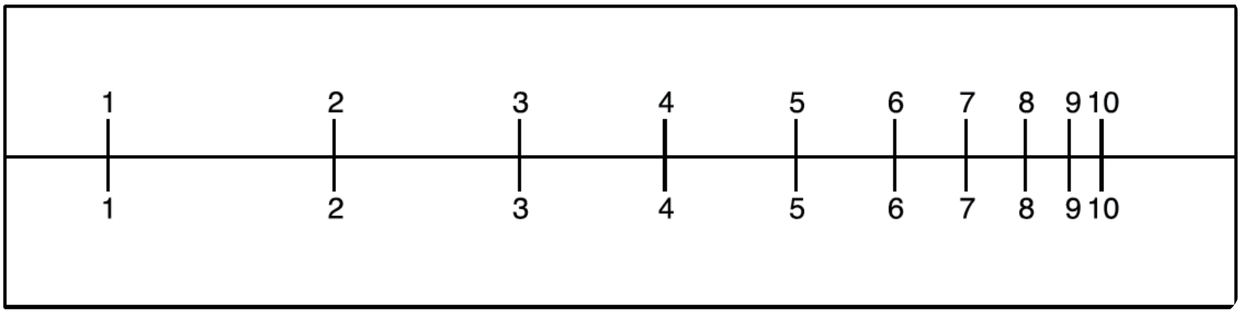
a. 48×6.7

b. 38.9×104.6

c. $663 \div 29.2$

d. $1087 \div 345$

تم تطوير طريقة المسطرة المتحركة لإيجاد طريقة مناسبة في متناول اليد للقيام بإجراء العمليات الحسابية باستخدام اللوغاريتمات. طريقة المسطرة المتحركة تتكون من مقياسين (مسطرتين) متحركين للوغاريتم كما هو مبين في الرسم أدناه (مقياس الرسم غير حقيقي).



الأعداد محددة على المسطرة كما يلي: العدد 1 على النهاية اليسرى من المسطرة، وكل عدد n بعد ذلك يتم وضعه على يمين العدد 1 بحيث تكون المسافة من مضاعفات العدد $\log_{10} n$

.

2. في السؤال التالي ستقوم بعمل مسطرة متحركة بسيطة بنفسك.

a. ارسم مستطيل طوله 22cm وعرضه 6cm على قطعة ورقية. ارسم مستقيماً في منتصف المستطيل وبموازاة الطول كما هو مبين أعلاه.

b. اكتب العدد 1 على الجهة اليسرى من المسطرة على بعد 1cm من النهاية أعلى المستقيم وأسفله كما في الشكل .

c. اكتب كلاً من الأعداد 2، 3، 4،...، 10 على بعد $20 \log_{10} n$ cm على يمين العدد 1.

d. الآن قص الورقة على امتداد المستقيم الذي رسمته في المنتصف.

ستستخدم مسطرتك المتحركة لإجراء بعض العمليات الحسابية.

3. بداية سنضرب 3×2 .

a. حرك المسطرة بحيث يكون العدد 1 على المسطرة العلوية فوق العدد 3 على المسطرة السفلية.

b. الآن انظر إلى العدد 2 على المسطرة العلوية وستجد ناتج الضرب 6 على المسطرة السفلية مقابلاً للعدد 2 على المسطرة العلوية.

c. اشرح كيف حصل ذلك.

4. الآن سنضرب 3×8 .

a. حاول إجراء الضرب باستخدام نفس الطريقة المبينة في السؤال 3. ماذا حدث؟

b. لمعالجة الأمر حيث كانت الإجابة خارج حدود المسطرة، قم بوضع العدد 10 فوق العدد الأول (3) بدلاً من 1. عند ذلك ستجد الإجابة على المسطرة السفلية تحت العدد الثاني وهو 8. لاحظ ان عليك تعديل قيمة العدد. سترى العدد 2.4 على المسطرة السفلية لكن الإجابة الصحيحة في هذه الحالة هي 24.

c. اشرح كيف حصل ذلك.

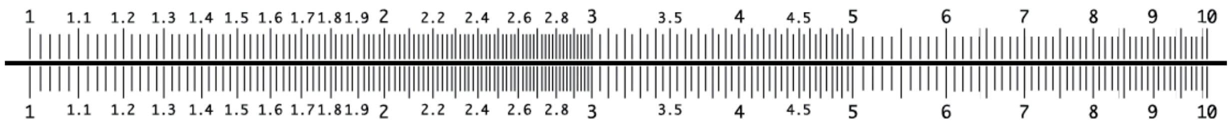
5. الآن سنستخدم مسطرتك لقسمة $32 \div 2$.

a. ضع العدد 2 من المسطرة العلوية فوق العدد 3.2 من المسطرة السفلية.

b. الآن انظر إلى العدد 1 على المسطرة العلوية وستجد الناتج 1.6 تحته على المسطرة السفلية. (إذا كان العدد 1 خارج حدود المسطرة استخدم 10 بدلاً من 1 وتذكر دائماً تعديل قيمة العدد بشكل مناسب).

c. اشرح كيف حصل ذلك.

6. الآن سنستخدم مسطرة متحركة أدق بقليل من السابقة لإجراء بعض العمليات الحسابية بشكل أدق.



a. قم بنسخ صورة واضحة للمسطرة وقصها من المنتصف.

b. قم بإجراء العمليات الحسابية التالية. تحقق من إجاباتك باستخدام آلة حاسبة وبين مدى دقة المسطرة المتحركة.

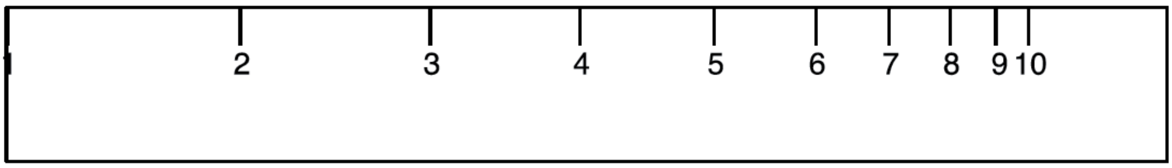
(i). 35×26

(ii). 410×67.3

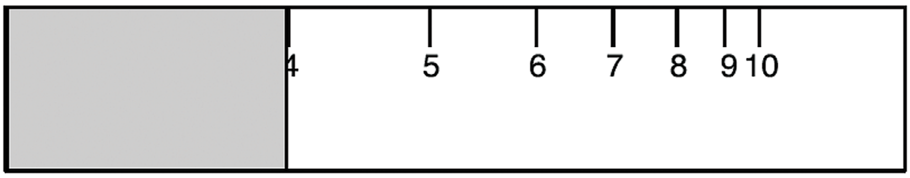
(iii). $35.4 \div 1.82$

(iv). $52 \div 7.8$

7. a. خذ أحد جزأي المسطرة التي عملتها في البداية وقص الطرف بحيث يكون العدد 1 على الحافة اليسرى تماماً من المسطرة.



b. اثنِ المسطرة بحيث تكون حافة المسطرة اليسرى عند العدد 4.



c. ارجع المسطرة كما كانت. ما هو العدد الموجود عند حافة الثني.

d . أعد تكرار هذه العملية وضع حافة المسطرة اليسرى عند أعداد مختلفة وسجل العدد الموجود عند حافة الثني في كل مرة.

e . صف واشرح النتائج التي حصلت عليها.

8. كيف تم إنتاج جداول اللوغاريتمات قبل وجود الآلات الحاسبة وأجهزة الحاسب الآلي؟ أحد الطرائق هي استخدام متسلسلة مثل هذه والتي تصلح لقيم x الموجودة في $-1 < x < 1$:

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

هذه المتسلسلة تحسب اللوغاريتم الطبيعي للأساس ... $e = 2.718$.

a. استخدم آلة حاسبة لإيجاد $\ln 1.5$.

b. بتعويض $x = 0.5$ في المتسلسلة أعلاه أوجد عدد الحدود التي نحتاج جمعها لحساب اللوغاريتم الطبيعي للعدد 1.5 صحيحاً لثلاث منازل عشرية.

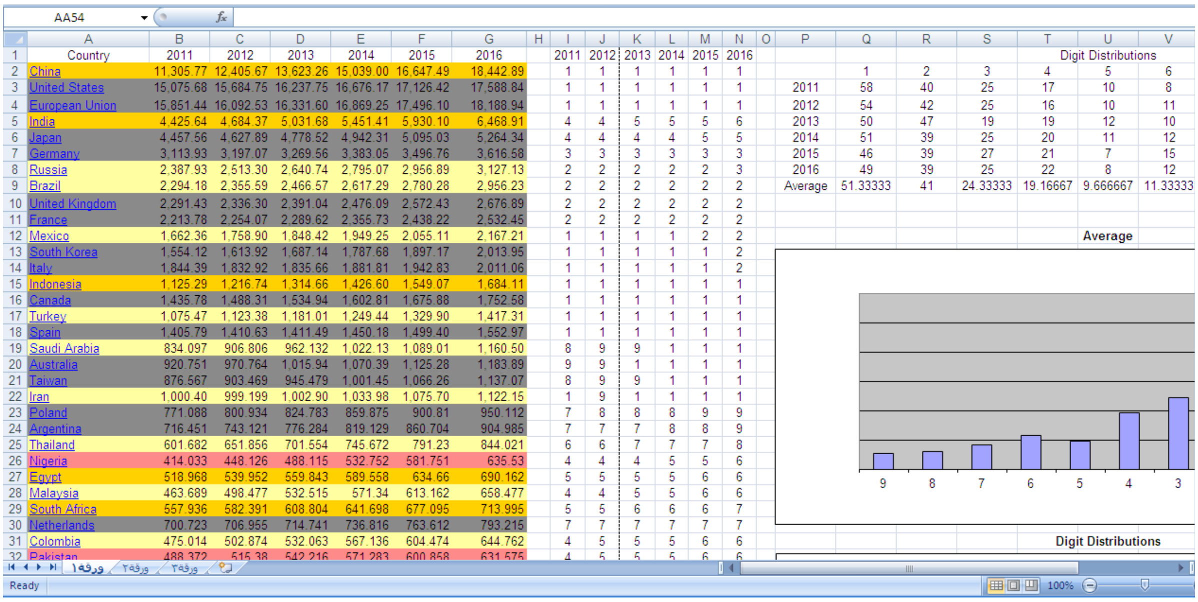
النشاط الثالث
قانون بنفورد

في حياتنا العملية، العديد من مجموعات البيانات الرقمية التي تظهر خاصية مثيرة للفضول: الأرقام الموجودة في المنزلة الأولى لكل من الأعداد غير موزعة بشكل متساوي. في هذا النشاط سنبحث في هذه الظاهرة.

1. يظهر الشكل البياني أدناه جدولاً إلكترونياً تم استخدامه لدراسة الرقم الأول من كل عدد في مجموعة من البيانات التي تبين إجمالي الإنتاج المحلي المتوقع لِـ 185 دولة (الأعداد المبينة هي بِـ مليارات الدولارات الأمريكية).

اتبع التعليمات أدناه لعمل نسخة مشابهة للجدول الإلكتروني التالي باستعمال مجموعة بيانات تجدها في الموقع التالي:

http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_countries_by_future_GDP_(PPP)_estimates



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	Country	2011	2012	2013	2014	2015	2016		2011	2012	2013	2014	2015	2016
2	China	11,305.77	12,405.67	13,623.26	15,039.00	16,647.49	18,442.89		1	1	1	1	1	1
3	United States	15,075.68	15,684.75	16,237.75	16,676.17	17,126.42	17,588.84		1	1	1	1	1	1
4	European Union	15,851.44	16,092.53	16,331.60	16,869.25	17,496.10	18,188.94		1	1	1	1	1	1
5	India	4,425.64	4,684.37	5,031.68	5,451.41	5,930.10	6,468.91		4	4	5	5	5	6
6	Japan	4,457.56	4,627.89	4,778.52	4,942.31	5,095.03	5,264.34		4	4	4	4	5	5
7	Germany	3,113.93	3,197.07	3,269.56	3,383.05	3,496.76	3,616.58		3	3	3	3	3	3
8	Russia	2,387.93	2,513.30	2,640.74	2,795.07	2,956.89	3,127.13		2	2	2	2	2	3
9	Brazil	2,294.18	2,355.59	2,466.57	2,617.29	2,780.28	2,956.23		2	2	2	2	2	2
10	United Kingdom	2,291.43	2,336.30	2,391.04	2,476.09	2,572.43	2,676.89		2	2	2	2	2	2
11	France	2,213.78	2,254.07	2,289.62	2,355.73	2,438.22	2,532.45		2	2	2	2	2	2
12	Mexico	1,662.36	1,758.90	1,848.42	1,949.25	2,055.11	2,167.21		1	1	1	1	2	2
13	South Korea	1,554.12	1,613.92	1,687.14	1,787.68	1,897.17	2,013.95		1	1	1	1	1	2
14	Italy	1,844.39	1,832.92	1,835.66	1,881.81	1,942.83	2,011.06		1	1	1	1	1	2
15	Indonesia	1,125.29	1,216.74	1,314.66	1,426.60	1,549.07	1,684.11		1	1	1	1	1	1
16	Canada	1,435.78	1,488.31	1,534.94	1,602.81	1,675.88	1,752.58		1	1	1	1	1	1
17	Turkey	1,075.47	1,123.38	1,181.01	1,249.44	1,329.90	1,417.31		1	1	1	1	1	1
18	Spain	1,405.79	1,410.63	1,411.49	1,450.18	1,499.40	1,552.97		1	1	1	1	1	1
19	Saudi Arabia	834.097	906.806	962.132	1,022.13	1,089.01	1,160.50		8	9	9	1	1	1
20	Australia	920.751	970.764	1,015.94	1,070.39	1,125.28	1,183.89		9	9	1	1	1	1
21	Taiwan	876.567	903.469	945.479	1,001.45	1,066.26	1,137.07		8	9	9	1	1	1
22	Iran	1,000.40	999.199	1,002.90	1,033.98	1,075.70	1,122.15		1	9	1	1	1	1
23	Poland	771.088	800.934	824.783	859.875	900.81	950.112		7	8	8	8	9	9
24	Argentina	716.451	743.121	776.284	819.129	860.704	904.985		7	7	7	8	8	9
25	Thailand	601.682	651.856	701.554	745.672	791.23	844.021		6	6	7	7	7	8
26	Nigeria	414.033	448.126	488.115	532.752	581.751	635.53		4	4	4	5	5	6
27	Egypt	518.968	539.952	559.843	589.558	634.66	690.162		5	5	5	5	6	6
28	Malaysia	463.689	498.477	532.515	571.34	613.162	658.477		4	4	5	5	6	6
29	South Africa	557.936	582.391	608.804	641.698	677.095	713.995		5	5	6	6	6	7
30	Netherlands	700.723	706.955	714.741	736.816	763.612	793.215		7	7	7	7	7	7
31	Colombia	475.014	502.874	532.063	567.136	604.474	644.762		4	5	5	5	6	6
32	Pakistan	488.372	515.38	542.216	571.283	600.858	631.575		4	5	5	5	6	6

P	Q	R	S	T	U	V
				Digit Distributions		
	1	2	3	4	5	6
2011	58	40	25	17	10	8
2012	54	42	25	16	10	11
2013	50	47	19	19	12	10
2014	51	39	25	20	11	12
2015	46	39	27	21	7	15
2016	49	39	25	22	8	12
Average	51.33333	41	24.33333	19.16667	9.666667	11.33333

a. افتح صفحة جديدة في برنامج الجداول الإلكترونية (Excel)

b. افتح الموقع الالكتروني البين أعلاه وانسخ الأعمدة التي تحتوي على اسم الدولة وإجمالي الإنتاج المحلي المتوقع من العام 2011 إلى العام 2016 فقط وألصقها في الجدول الإلكتروني.

c. استخدم دالة(LEFT) في الأعمدة من I إلى N لإيجاد الرقم الأول من البيانات الموجودة.

d. في الجدول المبين أعلى الأعمدة P إلى Y استخدم دالة (COUNTIF) لإيجاد عدد مرات تكرار الرقم الأول في بيانات كل سنة.

e. استخدم دالة (AVERAGE) لإضافة متوسط عدد مرات تكرار كل عدد إلى الجدول.

f. أضف تمثيلات بيانية تبين المتوسط الحسابي لتكرار كل رقم.

2. باستخدام المتوسط الحسابي للتكرار فإن احتمال وجود العدد 1 في المنزلة الأولى لقيمة الإنتاج المتوقعة لدولة اختيرت عشوائياً هو $51 \div 167 = 0.305$

قم بنسخ وإكمال الجدول الموجود أدناه لتبين احتمال وجود العدد في المنزلة الأولى من اليسار.

الرقم الأول	1	2	3	4	5	6	7	8	9
الاحتمال	0.277								

3. يمكن عرض قانون بنفورد كما يلي:

احتمال وجود العدد d في المنزلة الأولى من اليسار هو:

$$P(d) = \log_{10}(d+1) - \log_{10}(d) = \log_{10}\left(1 + \frac{1}{d}\right)$$

a. قم بنسخ وإكمال الجدول أدناه لتبين احتمال وجود العدد في المنزلة الأولى من اليسار.

الرقم الأول	1	2	3	4	5	6	7	8	9
الاحتمال	0.301								

b. بمقارنة إجاباتك في الفقرة a مع النتائج التي حصلت عليها في السؤالين 1، 2، وضح مدى قرب النتائج التي حللتها إلى الآن من قانون بنفورد.

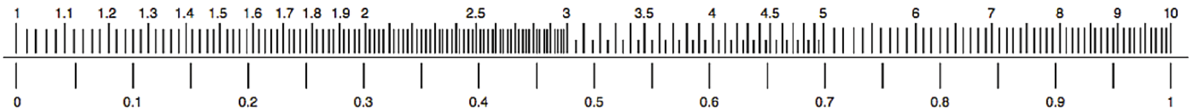
4. تحت ظروف معينة، بإمكان قانون بنفورد كشف بيانات مزورة. اتبع الخطوات التالية لترى كيف يمكن فعل ذلك.

a . سنقوم باختلاق مجموعة من البيانات الغير حقيقية بطريقة مشابهة للبيانات في المهمة الأولى لـِ 50 دولة.
قم بفتح ملف جداول الكترونية (Excel)جديد وأدخل الدالة (= RANDBETWEEN(0 ,15000.

b. انسخ هذه الدالة لـِ 50 سطر.

c.الآن قم بتحليل توزيع الرقم الأول في هذه المجموعة من البيانات المصطنعة. علق على نتائجك.

5. التجربة التالية تمكننا من اصطناع بيانات تتماشى مع قانون بنفورد. سوف تحتاج إلى مسطرة لوغاريتمية كما هو مبين في الشكل أدناه.



a. استخدم آلة حاسبة أو جدولاً إلكترونياً لإنتاج عدد عشوائي بين 0 و 1.

b. أوجد موقع العدد العشوائي الذي اخترته على الجزء السفلي من المسطرة.

c. اقرأ العدد المقابل على الجزء العلوي من المسطرة اللوغاريتمية. هذه هي القيمة الأولى من المجموعة.

d. أعد الخطوات a. إلى c. حتى تسجل 50 عدداً.

e. الآن قم بدراسة الرقم الأول في مجموعة البيانات التي أنتجتها. علق على النتائج التي تحصل عليها.

6. البينات التي تتبع قانون بنفورد تبين عدم الاعتماد على المقياس المستخدم. هذا يعني أنه إذا تغيرت وحدة القياس فإن توزيع الرقم الأول يبقى مشابهاً.

a. بين أن توزيع الرقم الأول للبيانات في المهمة 1 ستكون مشابهة في حال كانت العملة بالريال السعودي.

b. عدل الجدول الإلكتروني في المهمة 3 على النحو الآتي:

- أضف عموداً تضع فيه ضعف القيم العشوائية الأصلية.
- ادرس الرقم الأول في مجموعة الأعداد الجديدة.

علق على توزيع الأعداد في مجموعة البيانات الأصلية وبعد التعديل.

النشاط الرابع
المقاييس اللوغاريتمية

يستعمل مقياس مقدار الشدة (Moment Magnitude Scale) لقياس مقدار شدة الزلازل.
مقدار الشدة M_o لزلزال هو مقياس ليس متجهي يتم حسابه باستخدام الصيغة التالية:

$$M_w = \frac{2}{3}\log_{10} M_0 - 10.7$$

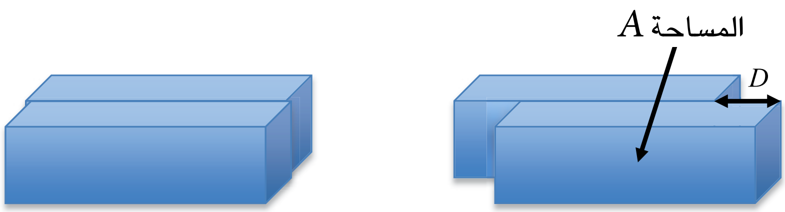
حيث M_o هو العزم الزلزالي مقيساً بوحدة الداين سنتيميتر (1 dyne-centimetre = 10^{-7} Newton millimiter.)
و تُحسب قيمة العزم الزلزالي نفسها باستخدام الصيغة:

$$M_o = \mu AD$$

حيث:

- μ تمثل معامل القص وهو مقياس لمقدار القوة اللازمة لصدع الصخور المتأثرة بالزلزال
  ووحدة قياسها هي $dynes/cm^2$. في هذا النشاط سنستخدم القيمة $\mu = 3\times10^{11}$.
- A هي مساحة الصدع الحقيقي في الصخور مقيسة بوحدة cm^2.
- D هي متوسط الإزاحة في الصخور على امتداد الصدع.

يبين الرسم أدناه هذه القياسات وعلاقتها بالصخور قبل وبعد الزلزال.



1. احسب M_w لزلزال بحيث:

$D = 2$ cm

$A = 10^{14}$ cm^2

2. انسخ وأكمل الجدول التالي لتبين قيم M_w باستخدام قيم مختلفة لـِ D مع $A = 10^{14}$ cm^2 .

D (cm)	10	20	30	40	50
M_w					

3. عندما نتعامل مع زلزال كبير فإنه من المناسب قياس العزم الزلزالي M_o بمضاعفات 10^{25} dyn–cm.

a. انسخ وأكمل الجدول الآتي لتبين قيم M_w باستخدام قيم مختلفة لـ M_o.

M_o (x 10^{25} dyn cm)	1	5	10	50	100	500	1000
M_w							

b. مثّل نتائجك بيانياً واضعاً M_o على المحور الأفقي و M_w على المحور الرأسي.

4. زلزال كبير جداً وقع في اليابان في مارس من عام 2011 م وكان قياسه 9.0 على مقياس مقدار الشدة. أوجد قيمة العزم الزلزالي لهذا الزلزال.

5. a. انسخ وأكمل الجدول التالي لتبين كيف تتغير قيم العزم الزلزالي لزلازل بمقادير شدة مختلفة. (أشد زلزال مسجل إلى الآن هو زلزال مقدار شدته 9.5 وقع في تشيلي عام 1960 م).

M_o (x 10^{25} dyn cm)										
M_w	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0

b. مثّل نتائجك بيانياً.

c. الآن أعد التمثيل البياني بمقياس لوغاريتمي لـ μ . وضح السبب في أن قراءة هذا التمثيل البياني أسهل.

6. "زلزال شدته 8.0 سيكون تدميره ضعف تدمير زلزال شدته 4.0". هل توافق على هذه الجملة؟ وضح إجابتك.

7. في البداية ، تم تقدير الزلزال الذي وقع في اليابان عام 2011 م بـِ 8.9 قبل تعديله ورفعه إلى 9.0. احسب النسبة المئوية للفرق في العزم الزلزالي.

8. يغطي مقياس لوغاريتمي مثل M_w مدىً واسعاً من قيم الشدة.

a. ما النسبة بين العزم الزلزالي μ لزلزالين شدتيهما 1 و 9؟

b. وضح لماذا من المهم أن يغطي المقياس مدىً واسعاً من قيم شدة الزلازل.

9. تُستخدم المقاييس اللوغاريتمية في عدد من الحالات. على سبيل المثال:

- مقياس ديسيبل (decibel scale) والذي يُستخدم لقياس علو الأصوات؛
- مقياس مقدار ستيلر (stellar magnitude scale) والذي يُستخدم لقياس لمعان النجوم؛
- مقياس الحموضة والقاعدية (pH scale).

ابحث في أحد هذه المقاييس ووضح المبادئ الرياضية المتضمَّنة فيه.

الوحدة الرابعة

المتطابقات والمعادلات المثلثية

حول هذه الوحدة

الأهدافُ التعلميّةُ للوَحدِة

- استكشاف المتطابقات المثلثية.
- تطوير فهم عميق لخصائص الدوال المثلثية.

في هذه الوحدة ستقوم باستكشاف الدوال المثلثية باستخدام طرق جبرية وبرمجيات حاسوبية وتمثيلات بيانية. الروابط بين التمثيل الهندسي واستخدامات الدوال المثلثية والقاعدة التي تقوم عليها تمثيلاتها الجبرية مهمة وقوية. والأنشطة في هذه الوحدة تمكنك من استكشاف بعض من تلك الروابط.

النشاط الأول
المتطابقات المثلّثيّة

تنّصّ نظريّة ديمواڤر على أنّ:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

وذلك لأنّه؛ إذا كان $z = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$،

فإنّ $z^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^n = (e^{i\theta})^n = e^{in\theta} = \cos n\theta + i\sin n\theta$

وباستعمال نظريّة ديمواڤر، وتطبيق نظرية ذات الحدّين لإيجاد المفكوك يمكننا إثبات المتطابقات المثلّثيّة المشهورة، وإعادة صياغة المتطابقات الأقلّ شهرة أو تكييفها.

1. ضع $n = 2$ في نظريّة ديمواڤر، ثمّ فكّ الأقواس باستعمال نظريّة ذات الحدّين. وأثبت بمساواة الجزء الحقيقيّ مع الجزء الحقيقيّ، والجزء التخيليّ مع الجزء التخيليّ أنّ:

$$\cos 2\theta = (\cos\theta)^2 - (\sin\theta)^2 \quad , \quad \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

2. a. ضع $n = 3$ في نظريّة ديمواڤر، ثمّ فكّ الأقواس باستعمال نظريّة ذات الحدّين. وأثبت بمساواة الجزء الحقيقيّ مع الجزء الحقيقيّ، والجزء التخيليّ مع الجزء التخيليّ أنّ:

$\cos 3\theta = 4(\cos\theta)^3 - 3\cos\theta$

b. اشتق عبارة مكافئة للنسبة $\sin 3\theta$ بدلالة $\sin\theta$ فقط.

3. a. استعمل نظريّة ديمواڤر، عندما $n = 4$ لإيجاد عبارة تكافئ $\cos 4\theta$، بدلالة $\cos\theta$ فقط.

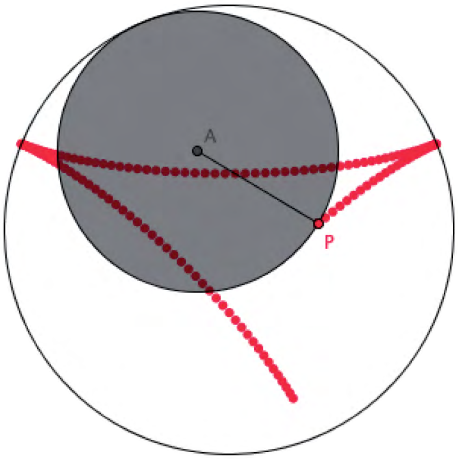
b. هل من الممكن إيجاد عبارة تكافئ $\sin 4\theta$ بدلالة $\sin\theta$ فقط؟

4. a. ابحث عن قيم أخرى صحيحة للعدد n، مثل القيم السابقة، لإجابة السؤال التالي:

– ما قيم n الصحيحة التّي يمكن استعمالها للحصول على عبارة تكافئ $\cos n\theta$، بدلالة $\cos\theta$ فقط؟

b. ما قيم n الصحيحة التّي يمكن استعمالها للحصول على عبارة تكافئ $\sin n\theta$، بدلالة $\sin\theta$ فقط؟

النشاط الثاني
الهيبوسيكلويد (Hypocycloids)



الهيبوسيكلويد هو منحنى ينشأ بتتبع نقطة على محيط دائرة تدور في داخل دائرة أكبر. في هذا النشاط سوف تبني هيبوسيكلويدات وتستكشف خصائصها. في الشكل المجاور، نصف قطر الدائرة الداخلية هو AP=5 ونصف قطر الدائرة الخارجية هو 8 وحدات. يتشكل الهيبوسيكلويد بتتبع حركة النقطة P عند دوران الدائرة الداخلية داخل الدائرة الكبيرة. بشكل عام فإن قطرا الدائرتين هما a و b بحيث أن a>b

إتبع هذه التعليمات لرسم هيبوسيكلويد باستخدام جيوجبرا.

1. إفتح صفحة جديدة في برنامج جيوجبرا. قياسات الزوايا لتكون بالتقدير الدائري (الراديان) من قائمة الخيارات.

- أضف محرك إنزلاق. احتفظ بالتسمية التلقائية a، ولكن غيّر المدى من 0 إلى 10 بمقدار تزايد 0.1.محرك الإنزلاق هذا سيتحكم في نصف قطر الدائرة الكبيرة.
- أضف محرك إنزلاق آخر. احتفظ بالتسمية b، ولكن غيّر المدى من 0 إلى 10 كما في السابق. سيتحكم محرك الإنزلاق هذا في نصف قطر الدائرة الداخلية.
- أضف محرك إنزلاق ثالث كي يتحكم في زاوية دوران الدائرة الداخلية. على الرغم من أننا سنستخدمه كزاوية، اضبط محرك الإنزلاق ليظهر الرقم من 0 إلى 60 بمقدار تزايد 0.01 وبسرعة 0.4 (في إعدادات الرسوم المتحركة). (تحتاج إلى تعديل هذه الإعدادات لاحقاً). سمي هذا المحرك α .

2. ارسم الآن الدائرة الخارجية. سوف نقوم بذلك باستخدام أمر موجود في منطقة الإدخال، عوضاً عن أدوات الرسم. أدخل الصيغة التالية: [(0,0), a]. تأكد من أن محرك الإنزلاق a يتحكم في مقاس الدائرة.

3. سوف نرسم الآن النقطة P ذات المعادلات الوسيطية :

$$x = (a - b)\cos\alpha + b\cos\left(\frac{a-b}{b}\alpha\right)$$
$$y = (a - b)\sin\alpha - b\sin\left(\frac{a-b}{b}\alpha\right)$$

- إدخل المعادلة $x\_t = (a\text{-}b)*\cos(\alpha)+b*\cos((a\text{-}b)/b*\alpha)$ في منطقة الإدخال.
- الآن أدخل المعادلة $y\_t =(a\text{-}b)*\sin(\alpha)\text{-}b*\sin((a\text{-}b)/b*\alpha)$
- أخيراً، أدخل الصيغة $P=(x\_t,y\_t)$

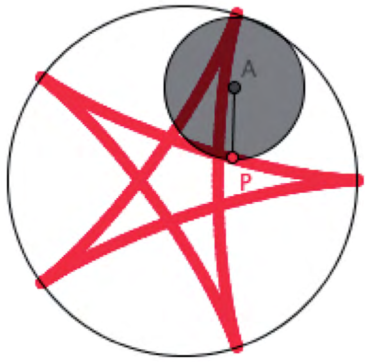
4. سوف نرسم الآن الدائرة الداخلية، اضغط على زر الخروج (Esc) للتأكد من أنك في صيغة الحركة (Move).

- اجعل قيمة محرك الإنزلاق a تساوي 5 وقيمة محرك الإنزلاق b تساوي 2.
- أدخل الصيغة: Circle[((a-b)*cos(a), (a-b)*sin(a)), b]
- أدخل الصيغة: Centre[c] (ربما ستحتاج إلى تغيير إسم الدائرة إذا كانت مسمّاة بإسم مختلف في رسمك البياني).
- اضغط بالزر الأيمن على الدائرة، ثم اضغط على خصائص الموضوع (Object Properties) اختر شريط النمط (Style) ثم اختر السمك 50 (Filling).
- اختر أداة القطعة المستقيمة، وارسم قطعة مستقيمة تصل بين مركز الدائرة والنقطة P (ثم اضغط زر الخروج).

5. إذا كان الإعداد جيداً فسيتشكل لديك الشكل المطلوب.

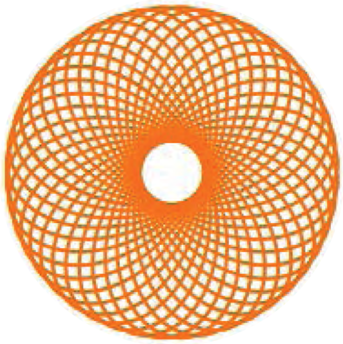
- أظهر منطقة التمثيلات البيانية (Graphic View) باستعمال قائمة الخيارات.
- اضغط بالزر الأيمن على النقطة P وفعّل إظهار الآثار (Trace on).
- اضغط بالزر الأيمن على محرك الإنزلاق α وفعّل **الرسوم المتحركة** (Animation).

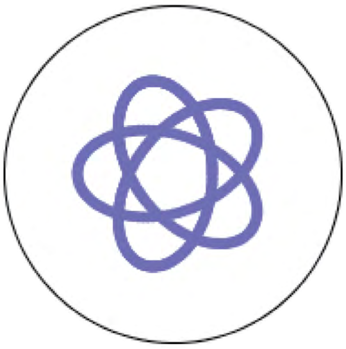
يجب أن يظهر الشكل الذي قمت بعمله وسيكون مشابهاً للشكل التالي:



6. تحقق من أن أنماط الهيبوسيكلويد التي تشكلت لقيم مختلفة من a و b. تحديداً، صف الأنماط المتشكلة من النسبة البسيطة a:b. المثال أعلاه يمثل النسبة $a:b = 5:2$. ماذا يمكن أن يحدث لنسب أخرى مختلفة؟
لاحظ أنك ربما ستحتاج إلى تعديل إعدادات محرك الانزلاق (Slider Object) للتأكد من تشكيل نمط كامل، وبسرعة مناسبة.

7. في كل الأمثلة التي رسمتها حتى الآن، فإن النقطة P على محيط الدائرة الصغيرة تم تتبعها لإنتاج هيبوسيكلويد. إذا تتبعنا بدلاً عن ذلك موقع نقطة أخرى، في مكان ما على نصف القطر AP، فإن نمط آخر يسمى هيبوتروكويد (Hypotrochoid) سوف يتشكل. (الهيبوسيكلويد هو حالة خاصة من الهيبوتروكويد). هذه الأنماط تنتج أشكالاً جميلة وهي أساس رياضي لألعاب معروفة:



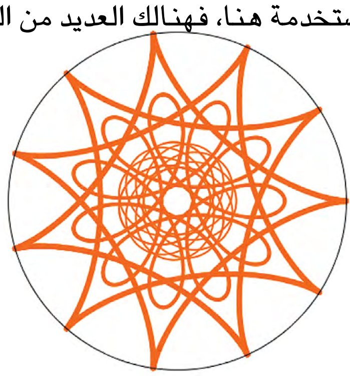


لرسم هيبوتروكويد:

- اخف الدائرة الداخلية عن طريق الضغط على الزر الأيمن واختيار **إظهار العنصر** (Show Object) (هذا سيسهل من اختيار القطعة المستقيمة AP في الخطوة التالية).
- استخدم أداة **النقطة** (Point) لإضافة نقطة على نصف القطر AP.
- اجعل الدائرة الداخلية ظاهرة مرة أخرى (اضغط بالزر الأيمن على معادلة الدائرة في قائمة الجبر ثم اختر **إظهار العنصر** (Show Object).
- قم بإلغاء اختيار **إظهار الآثار** (Trace on) للنقطة P ثم فعّله للنقطة الجديدة. الآن جرّب التعامل مع هيبوتروكويد.

تذّكر أنك ستحتاج إلى ضبط سرعة ومقدار زيادة محرك الإنزلاق للتأكد من حصولك على منحنى متصل وانسيابي.

8. عندما تتأكد أنك قد أتقنت الطرائق المستخدمة هنا، فهنالك العديد من التوسعات التي يمكن أن تستكشفها. ومنها على سبيل المثال :



هل يمكنك إنتاج نمط من هذا النوع؟

9. جميع الأنماط التي شكلت إلى الآن نتجت عن دوران دائرة صغيرة داخل دائرة كبيرة. إذا دورنا الدائرة الصغيرة حول الدائرة الكبيرة من الخارج فيمكننا رسم شكل يسمى ايبيسيكلويد (Epicycloid) (والذي هو نوع خاص من ايبيتروكويد (Epitrochoid).

اعمل إنشاءً جديداً لرسم ايبيسكلويد و ايبيتروكويد.

النشاط الثالث
متسلسلات القوى للدوال المثلثية

متسلسلة القوى هي متسلسلة لا نهائية من الحدود التي تحتوي على أسس متزايدة لمتغيّر.

إذا كان بالإمكان كتابة الدالة على شكل متسلسلة قوى، فإن:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \ldots \qquad [1]$$

لكتابة الدالة على شكل متسلسلة قوى، فإننا نحتاج إلى إيجاد القيم الصحيحة للمعاملات $a_0, a_1, a_2,$

سوف نقوم في هذا النشاط باستخدام طريقة تجريبية لإيجاد قيم تقريبية للمعاملات في متسلسلة القوى للدالتين $\sin x$ و $\cos x$.

سوف نبدأ بالدالة $\cos x$، ثم نجد تقريبات متتالية لمتسلسلة القوى. نستطيع إيجاد قيمة a_0 مباشرةً.

1. a. ما قيمة $\cos x$ عندما $x=0$؟
b. ما قيمة $a_1 x$ عندما $x=0$؟
c. ما قيمة a_0 ؟ برر إجابتك.

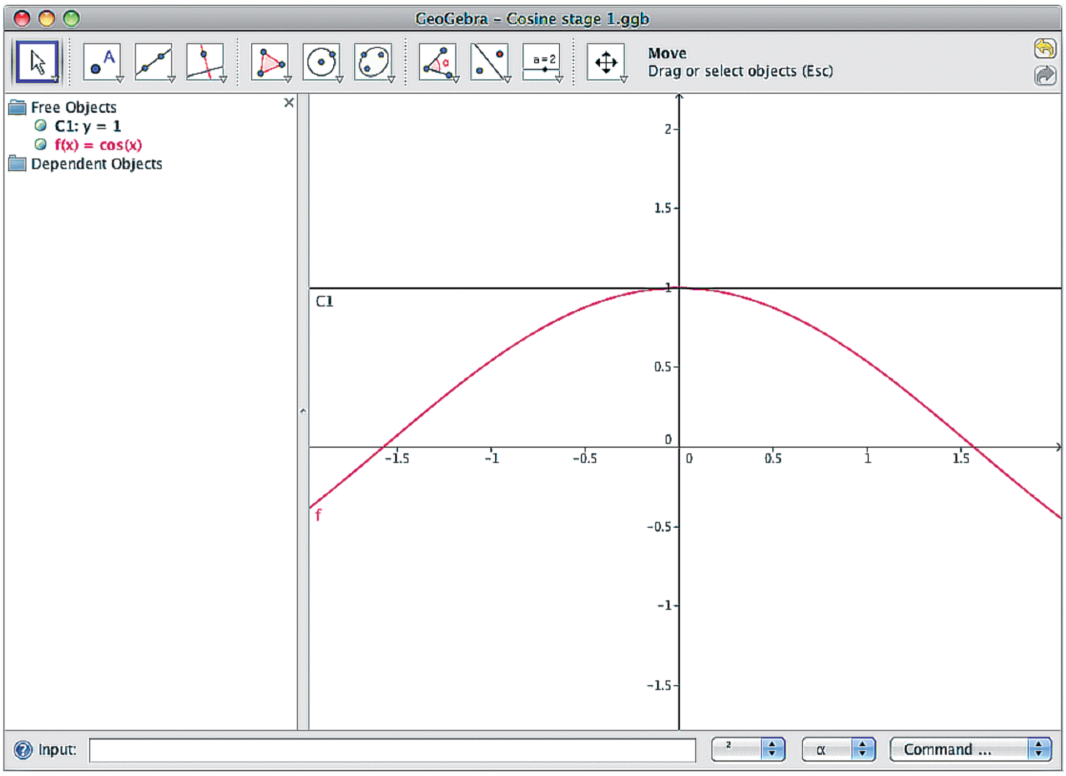
سوف نستخدم الرمز $C_1(x)$ للدلالة على أول تقريب أوجدناه لمتسلسلة القوى لـِ $\cos x$:

$$C1(x) = 1 \qquad [2]$$

سوف ننظر الآن في مدى دقة هذا التقريب.

2. a. إفتح ملفاً جديداً في جيوجبرا.
b. من قائمة **الخيارات** (Options) استخدم الخيار **متقدم** (Advanced) ، واختر منه **تغيير وحدة الزاوية** (Angle unit) لكي تكون بالتقدير الدائري.
c. اختر **منطقة التمثيلات البيانية** (Graphic View) من قائمة الخيارات، ثم اضبط القيم الصغرى والعظمى للمتغيرين x و y لتكون من -2 إلى 2.
d. أدخل المعادلة $y=\cos x$ في **منطقة الإدخال** (Input) والموجودة أسفل الشاشة.
e. اضغط بالزر الأيمن على منحنى $y=\cos x$ واختر **خصائص الموضوع** (Object Properties).
اختر الآن أمر **النمط** (Style)، ثم غيّر سماكة الخط إلى قيمة أكبر قليلاً من 3 نقاط.
اختر الآن أمر **اللون** (colour) وأعطِ الرسم لوناً مميزاً مثل اللون الأحمر مثلاً.
f. أدخل الآن أمر المعادلة $y=1$ في منطقة الإدخال. سوف يقوم جيوجبرا تلقائياً بتسمية هذا المستقيم .
اضغط بالزر الأيمن على المستقيم (أو على معادلته في **منطقة الجبر** (Algebra View) على يسار النافذة) واستخدم **إعادة التسمية** (Rename) لتغيير التسمية إلى C1.

وينبغي أن يبدو مستندك Geogebra الآن مثل هذا:



باستطاعتك مشاهدة أنه عند اختيار القيم الصغيرة قريبة من $x=0$، فإن التقريب C1 سوف يعطي إجابات منطقية سوف نحاول الآن توسيع هذا النطاق من القيم بإضافة حدود أخرى على المتسلسلة.

3 . a . أضف محرك انزلاق (Slider Object) إلى ملف جيوجبرا الذي أنشأته. اضبط القيم الصغرى والعظمى لتكون من -5 إلى 5 ، أعد تسميته a1.

b . أدخل المعادلة $y = 1 + a1{*}x$ في منطقة الإدخال وسمِّ هذه المعادلة الجديدة C2. (اضغط زر الخروج (Esc)).

c . استخدم الآن محرك الإنزلاق (Slider Object) لتعديل قيمة المعامل a1. هل تستطيع إيجاد قيمة a1 التي تجعل التقريب C2 صحيحاً على نطاق أوسع من القيم الناتجة عند التقريب C1؟ برر إجابتك.

4 . إن افضل قيمة للمقدار a1 هي الصفر. بصورة اخرى فإن إضافة حد خطي (غير صفري) إلى تقريب $\cos x$ لن يجعله أفضل. وهذا صحيح لكل القوى الفردية مثل x, x^3, x^5 وهكذا. وضح لماذا.

5. إجرِ الآن التغييرات التالية على ملفك:

a . امسح محرك الانزلاق a1 والمستقيم C2 (اضغط بالزر الأيمن على كل منهما، واختر مسح (Delete)).

b . أضف محرك انزلاق جديد وسمِّه a2، تاكد ان مجاله من -5 إلى 5.

c . أدخل المعادلة $y = 1 + a2{*}x{\hat{}}2$ في منطقة الإدخال.

d . أعد تسمية الرسم C2، وغيّر لونه إلى لون مميز.

e . عدّل الآن محرك الانزلاق a2، وأوجد أفضل قيمة توسع مجال قيم x والتي يكون التقريب صحيحاً عنده.

6.أضف محرك انزلاق جديد إلى ملفك، واستكشف أفضل قيمة لمعامل الحد x^4

إرشاد: معامل x^4 وجميع معاملات القوى الزوجية صغيرة. ستجد انه من الأسهل أن تستكشف سلوك التمثيل البياني إذا استخدمت محركات انزلاق تبين مقلوبات المعاملات.

- استخدم محرك انزلاق يمثل العدد r4 الذي مجاله من $50 -$ إلى 50.
- أدخل المعادلة $a4 = 1/r4$ في منطقة الإدخال.
- أدخل المعادلة $y = 1 + x\hat{}2*a2 + x\hat{}4*a4$ في منطقة الإدخال.

7.إن اول ثلاثة حدود في متسلسلة القوى للدالة $\cos x$ هي فعلياً:

$$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \qquad [3]$$

a . قارن بين قيم $\cos x$ والعبارة [3] لقيم مختارة في الفترة $-\pi \le x \le \pi$. ما مدى دقة التقريب في مجال القيم؟

b . تنبأ بقيمة معامل x^6 . إفحص للتأكد من تنبؤك.

8. كرر هذا التحليل الآن لإيجاد متسلسلة القوى للدالة $\sin x$

الوحدة الخامسة

القطوع المخروطية و المعادلات الوسيطية

مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع
King Abdulaziz & his Companions Foundation for Giftedness & Creativity

الأهدافُ التعلميّةُ للوَحدةِ

- تطوير فهم أوسع لخصائص القطوع المخروطية.
- فهم كيفية تقدير مساحة المنطقة المحصورة بمنحنى عن طريق عدد محدود من العمليات.
- فهم كيفية كتابة معادلات الدوال باستخدام معادلات وسيطية.

سوف تستكشف في هذه الوحدة خصائص كل من القطع المكافئ و الناقص والزائد وكذلك الدائرة. وستقوم بدراسة المساحات المحصورة ببعض من هذه المنحنيات وسوف ترى كيفية تمثيلها باستخدام معادلات وسيطية.

سوف تحتاج في هذه الوحدة إلى استخدام الجداول الإلكترونية وكذلك إحدى تقنيات التمثيل البياني مثل برنامج جيوجبرا.

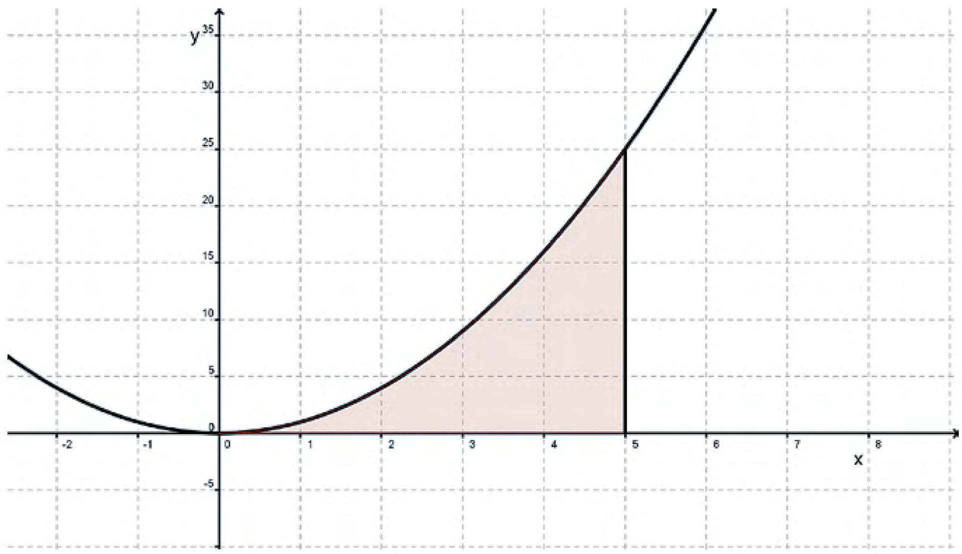
النشاط الأول
حساب المساحة تحت منحنى القطع المكافئ باستعمال التقريب

كيف يمكنك حساب المساحة المحصورة بين كل من المنحنى الذي معادلته $y = x^2$ والمستقيم $x = 5$ والمحور x؟

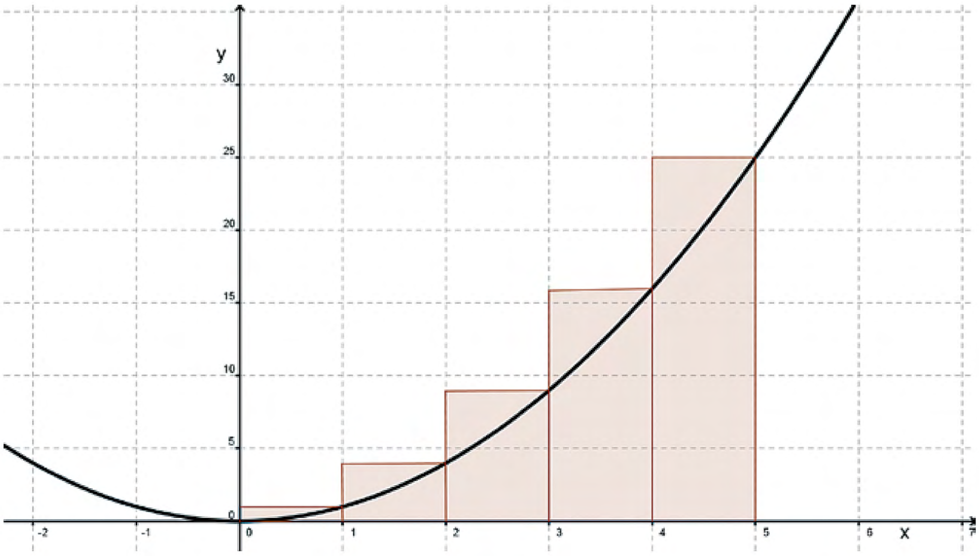
سيتم في هذا النشاط تقديم طريقتين لتقدير حساب هذه المساحة.

1. مجموع ريمان

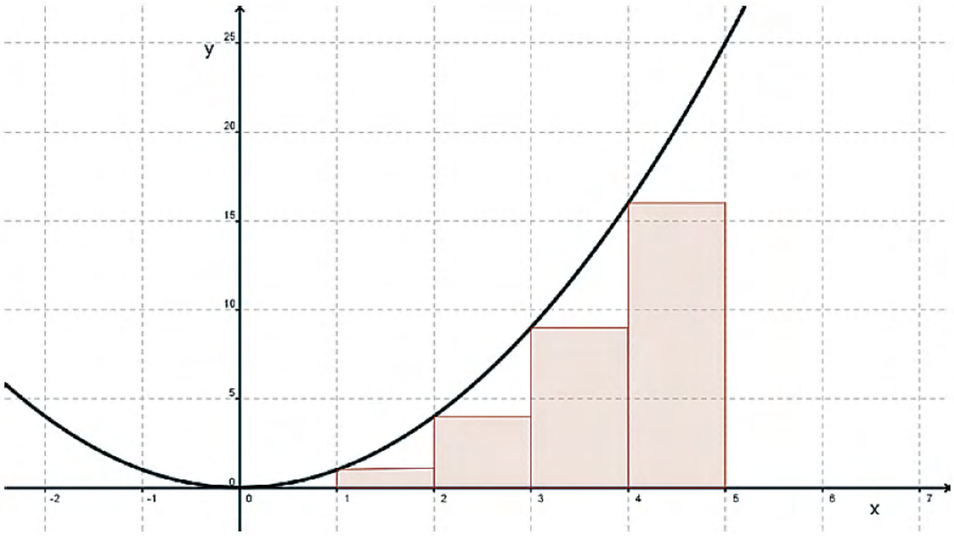
a. قم بعمل نسخة من التمثيل البياني للدالة $y = x^2$ كما هو موضح أدناه.



b. ارسم مستطيلات كما هو موضح أدناه على التمثيل البياني. لاحظ أن جزء من مساحة المستطيلات يقع فوق المنحنى وبالتالي فإن مجموع مساحات هذه المستطيلات سيكون أكبر من مساحة المنطقة المحصورة.



بدلاً من الأطراف اليمنى، استعمل الأطراف اليسرى للمستطيلات لتحديد ارتفاعاتها كما في الشكل أدناه.
لاحظ أن مجموع مساحات هذه المستطيلات أقل من مساحة المنطقة المحصورة.

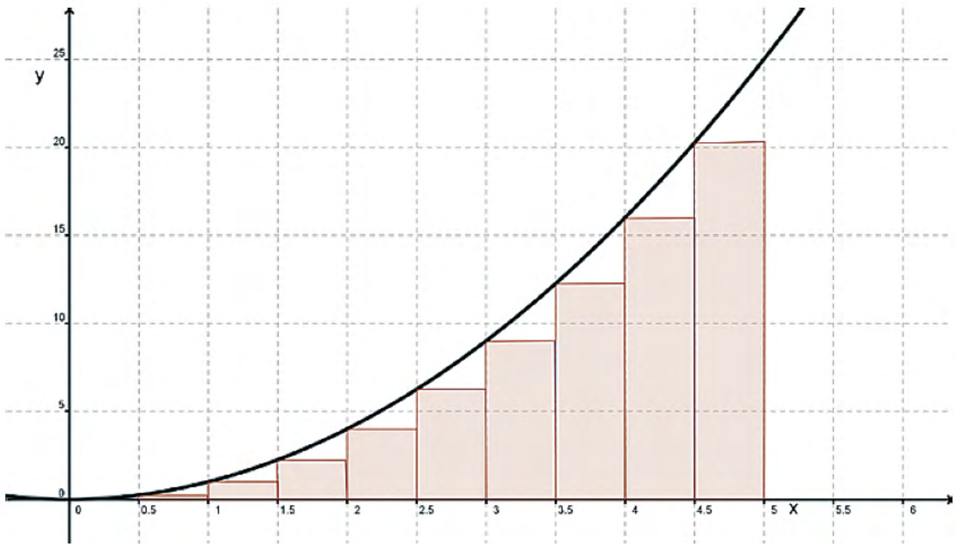


c. أوجد مجموع مساحات هذه المستطيلات في كل حالة لإيجاد حد أعلى وأسفل لمساحة المنطقة المحصورة تحت المنحنى $y = x^2$ وكل من المستقيم $x = 5$ والمحور x. قم بكتابة إجابتك على شكل متباينة :
الحد الأعلى > المساحة > الحد الأسفل.

لتقليل الفرق بين الحد الأعلى والحد الأسفل سنقوم بزيادة عدد المستطيلات داخل المنطقة المحصورة.

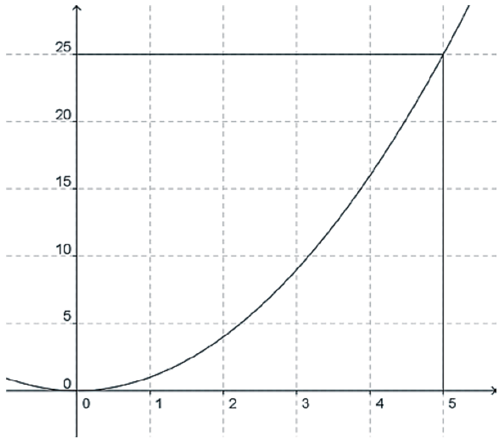
d. استخدم نسخة جديدة للتمثيل البياني للمنحنى $y = x^2$ ، وقم بتقسيم المنطقة المحصورة تحت المنحنى وكل من المستقيم $x = 5$ والمحور x إلى مستطيلات عرض كل منها 0.5 وحدة كما هو موضح أدناه.

e. من خلال إيجاد مجموع مساحات المستطيلات أوجد حد أعلى وأسفل للمساحة واكتب إجابتك على شكل متباينة: الحد الأعلى > المساحة > الحد الأسفل.



f. أعد خطوات الحل في الفقرتين d و e باستخدام مستطيلات عرض كل منها 0.25 وحدة وأوجد تقدير أدق لمساحة المنطقة المحصورة.

2.طريقة الأعداد العشوائية



تخيل وجود هدف للرماية ، وأنك ستحصل على المزيد من النقاط عند إصابة منطقة محددة واقعة في المركز. تخيل الآن أن السهام المنطلقة باتجاه الهدف لكل منها نفس احتمال إصابة أي مكان على الهدف. إذا تم إطلاق عدداً كبيراً من الأسهم باتجاه الهدف في منطقة محددة فإن نسبة الأسهم التي ستصيب هذه المنطقة ستعطينا تقدير أفضل لنسبة مساحتها إلى مساحة الهدف كاملاً. وكلما زاد عدد السهام المُنطلقة ، فإننا سنحصل على تقدير أفضل.

ولهذا فإذا أردنا تقدير مساحة منطقة خاصة مع علمنا لمساحة الهدف الذي سيستخدم، فأننا نقوم بإجراء تجربة اطلاق العديد من السهام عشوائياً باتجاه الهدف ومن ثم نقوم بحساب عدد الأسهم التي أصابت المنطقة الخاصة.

يمكننا استخدام هذه الطريقة لتقدير مساحة منطقة خاصة مطلوبة وتمثل هنا المساحة تحت المنحنى.

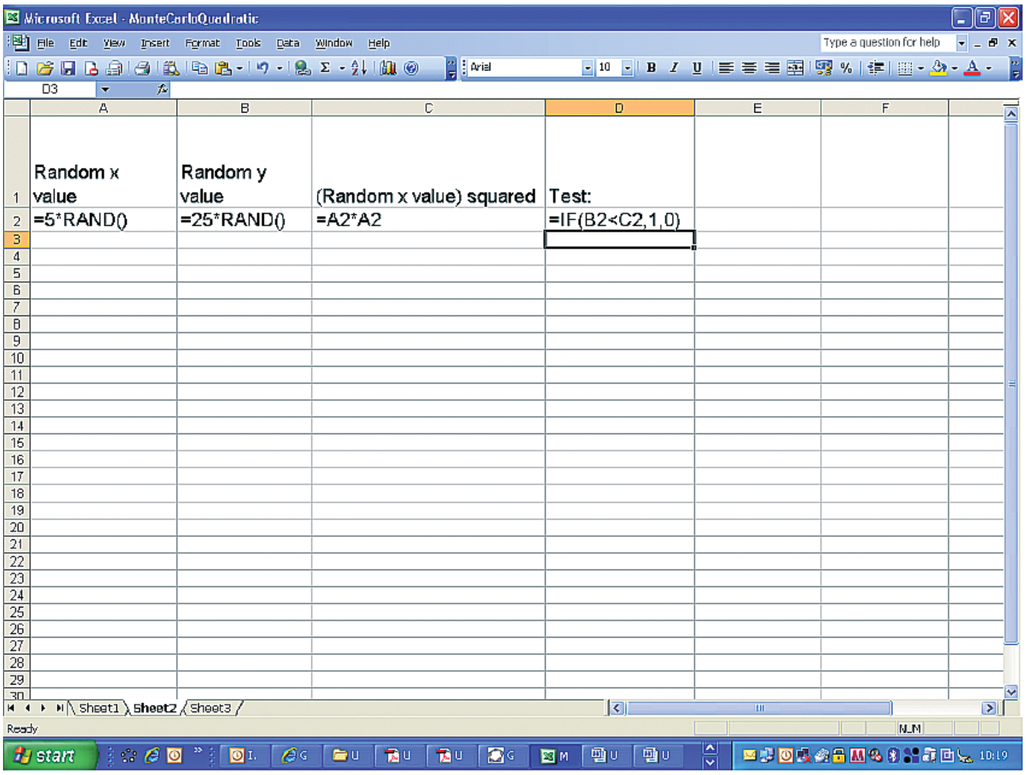
سوف نقوم بمحاكاة اصابة السهام للهدف باستخدام الجداول الإلكترونية.

a. أنشئ جدول إلكتروني ومن ثم أنشئ نقطة عشوائية داخل مستطيل. سوف تمثل هذه محاكاة لسهم منطلق.

استخدم الدالة $\text{RAND}\,()$ لتوليد الإحداثيات للنقطة العشوائية والواقعة داخل المستطيل. إذا قمت بتربيع الإحداثي x للنقطة فإن باستطاعتنا ملاحظة فيما إذا كانت النقطة واقعة تحت المنحنى بالإختبار لرؤية أن الإحداثي y للنقطة أقل من القيمة x^2

يوضح الشكل أدناه شاشة جدول إلكتروني تم فيها تنفيذ هذه المهمة. يمكنك تصميم نسخة مشابهة بنفسك باستعمال الصيغ الظاهرة في الشكل أدناه.

في الجدول الإلكتروني يقوم الاختبار بإرجاع القيمة 1 إذا كانت النقطة واقعة تحت المنحنى و 0 خلاف ذلك.

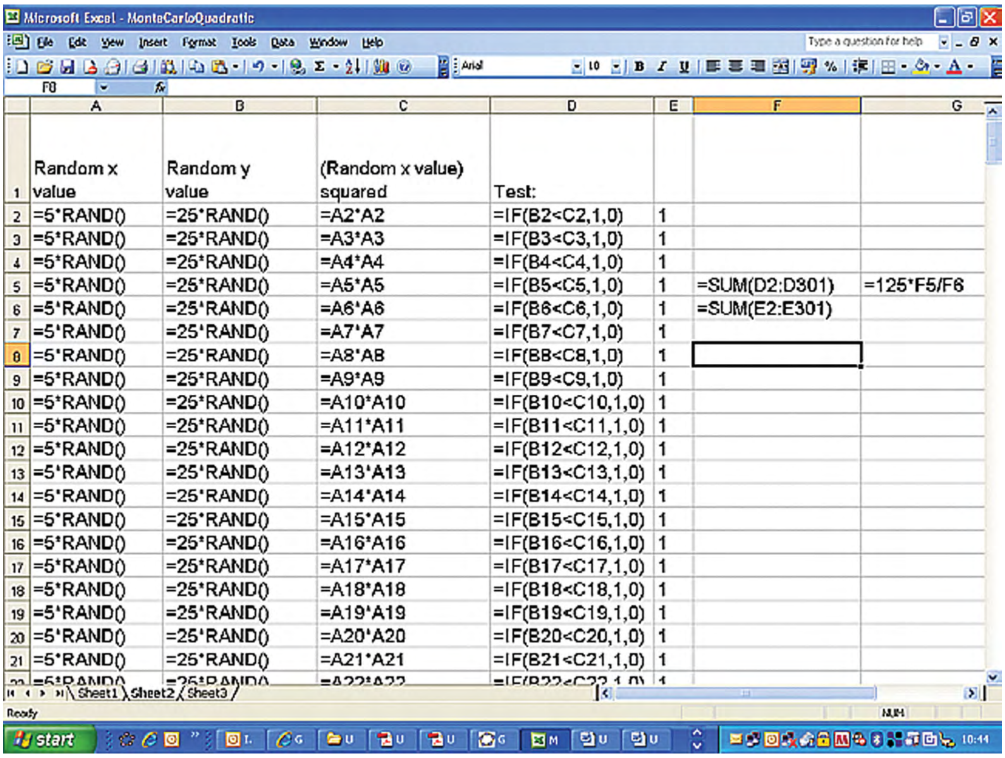


	A	B	C	D
1	Random x value	Random y value	(Random x value) squared	Test:
2	=5*RAND()	=25*RAND()	=A2*A2	=IF(B2<C2,1,0)

b. أوجد نسبة النقاط الواقعة تحت المنحنى وذلك عن طريق ايجاد ناتج جمع القيم الموجودة في العمود D ومن ثمّ تُقسم هذا الناتج على عدد التجارب ، وبعد ذلك ضرب ناتج القسمة بالمقدار 125 (ويمثل مساحة المستطيل) لتقدير المساحة تحت المنحنى.

يجب أن يحتوي الجدول الإلكتروني 300 قيمة عشوائية (قم بإضافة القيمة 1 في خلايا العمود E لجعل عملية عد القيم العشوائية أكثر سهولة).

تمثل الخلية F5عدد النقاط الواقعة أسفل المنحنى بينما تمثل الخلية F6 عدد النقاط العشوائية. نسبة عدد النقاط الواقعة أسفل المنحنى هي حاصل قسمة F5 على F6. وبالتالي فإن القيمة التقديرية لمساحة المنطقة الواقعة أسفل المنحنى هي عبارة عن حاصل ضرب هذه النسبة بمساحة المستطيل والذي مساحته 125 وحدة مربعة. تمثل الخلية G5 الصيغة المطلوبة لحساب هذه المساحة.



	A	B	C	D	E	F	G
1	Random x value	Random y value	(Random x value) squared	Test:			
2	=5*RAND()	=25*RAND()	=A2*A2	=IF(B2<C2,1,0)	1		
3	=5*RAND()	=25*RAND()	=A3*A3	=IF(B3<C3,1,0)	1		
4	=5*RAND()	=25*RAND()	=A4*A4	=IF(B4<C4,1,0)	1		
5	=5*RAND()	=25*RAND()	=A5*A5	=IF(B5<C5,1,0)	1	=SUM(D2:D301)	=125*F5/F6
6	=5*RAND()	=25*RAND()	=A6*A6	=IF(B6<C6,1,0)	1	=SUM(E2:E301)	
7	=5*RAND()	=25*RAND()	=A7*A7	=IF(B7<C7,1,0)	1		
8	=5*RAND()	=25*RAND()	=A8*A8	=IF(B8<C8,1,0)	1		
9	=5*RAND()	=25*RAND()	=A9*A9	=IF(B9<C9,1,0)	1		
10	=5*RAND()	=25*RAND()	=A10*A10	=IF(B10<C10,1,0)	1		
11	=5*RAND()	=25*RAND()	=A11*A11	=IF(B11<C11,1,0)	1		
12	=5*RAND()	=25*RAND()	=A12*A12	=IF(B12<C12,1,0)	1		
13	=5*RAND()	=25*RAND()	=A13*A13	=IF(B13<C13,1,0)	1		
14	=5*RAND()	=25*RAND()	=A14*A14	=IF(B14<C14,1,0)	1		
15	=5*RAND()	=25*RAND()	=A15*A15	=IF(B15<C15,1,0)	1		
16	=5*RAND()	=25*RAND()	=A16*A16	=IF(B16<C16,1,0)	1		
17	=5*RAND()	=25*RAND()	=A17*A17	=IF(B17<C17,1,0)	1		
18	=5*RAND()	=25*RAND()	=A18*A18	=IF(B18<C18,1,0)	1		
19	=5*RAND()	=25*RAND()	=A19*A19	=IF(B19<C19,1,0)	1		
20	=5*RAND()	=25*RAND()	=A20*A20	=IF(B20<C20,1,0)	1		
21	=5*RAND()	=25*RAND()	=A21*A21	=IF(B21<C21,1,0)	1		
22	=5*RAND()	=25*RAND()	=A22*A22	=IF(B22<C22,1,0)	1		

c. قم بتحسين القيمة التقديرية التي حصلت عليها من خلال زيادة عدد القيم العشوائية. يمكنك الحصول على تقديرات أكثر ثقة من خلال إيجاد المتوسط لعدة تقديرات.

d. قارن بين القيمة التقديرية التي حصلت عليها باستخدام هذا الأسلوب مع التقدير الذي تم الحصول عليه في الجزء الأول من هذا النشاط.

النشاط الثاني
أرخميدس وحساب مساحة الدائرة

أرخميدس هو عالم رياضيات ومهندس وعالم فلك يوناني عاش في الفترة (287 قبل الميلاد إلى عام 212 قبل الميلاد). ويُعرف بمقولته المشهورة عندما خرج من الحمام صارخاً "وجدتها" وذلك عندما أدرك أن حجم الجسم المغمور يساوي كمية المياه المزاحة نتيجة لذلك. فقد رأى أنه يمكن استخدام ذلك لإيجاد حجم أي جسم غير منتظم.

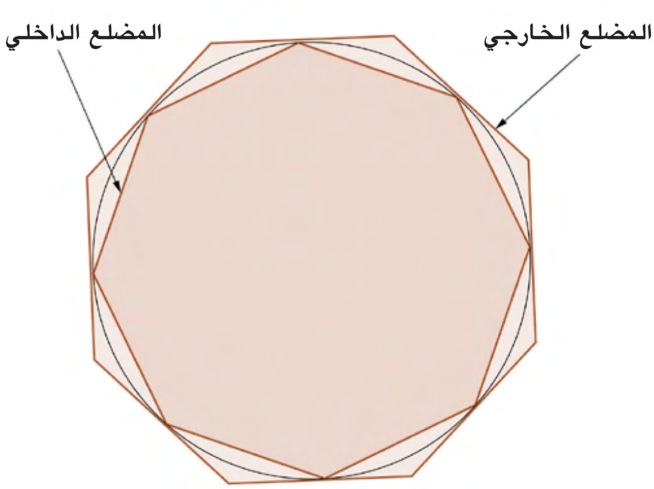
1. طريقة الاستنفاد

استخدم أرخميدس طريقة الاستنفاد لإيجاد قيمة تقريبية للنسبة الثابتة π.

وذلك من خلال رسم مضلع أكبر خارج دائرة ومضلعاً أصغر داخلها. كلما إزداد عدد أضلاع المضلع، فإن مساحته تصبح تقريباً أكثر دقة لمساحة الدائرة.

إذا قبلنا أن مساحة الدائرة تتناسب مع مربع نصف قطرها بثابت تناسب مقداره π ، فيمكننا استخدام المتباينة التالية:

مساحة المضلع الخارجي > πr^2 > مساحة المضلع الداخلي



(المضلع الداخلي والمضلع الواقع داخل الدائرة ورؤوسه واقعة على محيطها. والمضلع الخارجي هو المضلع الذي تكون أضلاعه مماسات للدائرة كما هو موضح في الشكل)

إن حساب مساحة المضلعين سوف تعطينا حد أعلى وأسفل للقيمة π وبالتالي فإن زيادة عدد الأضلاع لكل من المضلعين سوف يعطينا قيمة أدق للعدد π. لقد كانت نسبة الخطأ في استخدام طريقة أرخميدس أقل من 0.1%.

سوف تستخدم هذه الطريقة في هذا النشاط لإيجاد قيمة تقريبية خاصة بك للعدد π.

a. ارسم دائرة نصف قطرها 8 سم على ورقة مربعة الشكل وارسم قطرين متعامدين في الدائرة. قم بوصل أطراف القطرين لتحصل على مربع واقع داخل الدائرة. احسب مساحة المربع. مساحة المربع ستكون أقل من مساحة الدائرة وبالتالي ستعطينا أول حد أسفل لمساحة الدائرة.

b. ارسم مربعاً خارج الدائرة واحسب مساحته لتحصل على أول حد أعلى لمساحة الدائرة.

c. قم بتعويض القيمتين اللتين حصلت عليهما في المتباينة:

مساحة المضلع الخارجي > πr^2 > مساحة المضلع الداخلي

اقسم أطراف المتباينة على المقدار r^2 لتحصل على أول تقريب للعدد π.

d. ارسم مضلع ثُماني داخلي وآخر خارجي (للمساعدة: ارسم أولاً المضلع الثماني الداخلي وبعد ذلك ارسم المضلع الخارجي بحيث تكون أضلاعه مماسات للدائرة عند رؤوس المضلع الداخلي). قم بتقسيم كل مضلع إلى مثلثات وأوجد مساحة كل مثلث ومن ثم أوجد مساحة المضلعين الداخلي والخارجي لتحصل على المتباينة الجديدة وبعد ذلك اقسم أطراف المتباينة على المقدار r^2 لتحصل على تقريب أدق للعدد π.

e. هل تستطيع الان حساب المساحة لكل من المضلعين الداخلي والخارجي ذي الست عشرة ضلعاً؟

حيث أنه من الصعب الرسم بدقة لهذه الأشكال فقد ترغب في استخدام حساب المثلثات للعثور على المعلومات المطلوبة لحساب مساحة المثلثات وبالتالي مساحة هذه المضلعات. نكرر الان الخطوات الموجودة في الفقرة السابقة لنحصل على قيمة أدق للعدد π. القيمة التي ستحصل عليها للعدد π ستكون مقربة لمنزلتين عشريتين

قد لا تكون القيمة التي حصلت عليها بنفس الدقة التي حصل عليها أرخميدس، ولكن يمكنك تكرار العملية الحسابية باستخدام عدد أكبر من المضلعات (20 ضلعاً مثلاً) لتحصل على تقريب أدق من السابق. يُعتقد أن أرخميدس حصل على تقريب أدق للعددπ باستخدام مضلع ذو 96 ضلعاً. هل يمكنك تكرار حساباته؟

2. استخدام طريقة الأعداد العشوائية

لقد تم استخدام طريقة الأعداد العشوائية في النشاط الأول لحساب المساحة الواقعة تحت منحنى.

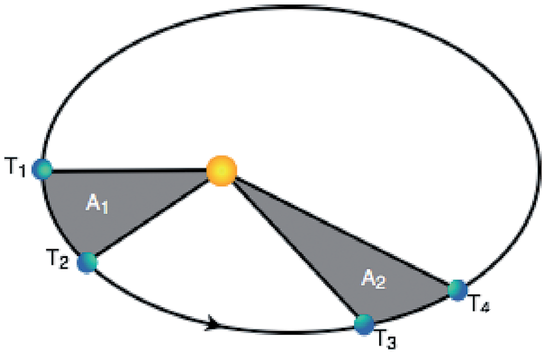
قم بإعداد جدول إلكتروني لتقدير مساحة دائرة نصف قطرها 8 سم. واستخدم ذلك لإيجاد قيمة تقريبية للعدد π.

قارن بين هذه القيمة التقريبية وتلك التي حصلت عليها في الجزء الأول من هذا النشاط.

النشاط الثالث
قوانين كبلر والمدارات الإهليجية

اشتهر العالم الفلكي الألماني يوهان كبلر (1571 م إلى 1630 م) بقوانينه المتعلقة بحركة الكواكب.

- قانون كبلر الأول: كل كوكب في النظام الشمسي يتحرك حول الشمس في مدار إهليلجي (قطع ناقص) بحيث تقع الشمس في إحدى بؤرتيه.
- قانون كبلر الثاني: الخط الوهمي الواصل بين كوكب والشمس يحصر مساحات متساوية خلال أزمنة متساوية.

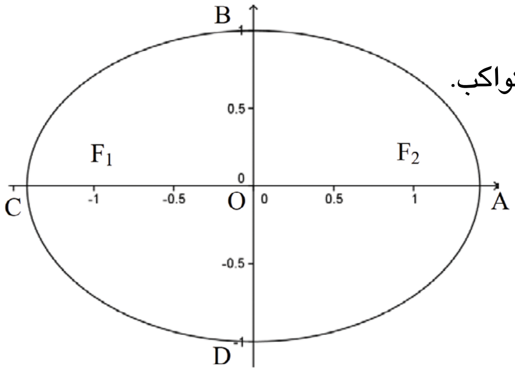


يوضح الشكل المجاور ما يعنيه كل من هذين القانونين.

تمثل الدائرة البرتقالية الشمس فيما تمثل الدوائر الزرقاء أربع مواقع للكوكب خلال دورانه حول الشمس في مدار قطع ناقص حيث تقع الشمس في أحد بؤرتي القطع الناقص.

لاحظ كبلر من خلال رصده للكواكب أن الكوكب يزيد من سرعته عندما يكون قريباً من الشمس ويبطئ من سرعته عند ابتعاده عنها.

في الفترة الزمنية من T_1 إلى T_2 المبينة في الشكل أعلاه، نجد أن الخط الوهمي الواصل بين الشمس والكوكب يحصر المساحة A_1. بعد ذلك عند ابتعاد الكوكب عن الشمس فإنه يتحرك بسرعة أقل. فإذا كانت الفترة الزمنية T_3 - T_4 مساوية للفترة الزمنية T_1 - T_2، فلابد أن تكون المسافة المقطوعة حول المدار أقل بحيث تكون المساحة A_2 مساوية للمساحة A_1 عند ازدياد طول الخط الوهمي الواصل بين الكوكب والشمس.



سوف نقوم الآن بدراسة كيفية تطبيق قوانين كبلر لحساب حركة الكواكب.

القطع الناقص

الصورة العامة لمعادلة القطع الناقص

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

حيث a و b تمثلان نصف طول المحور الأكبر (OA) والأصغر (OB) على التوالي، البؤرتان F_1 و F_2 هما نقطتان واقعتان على المحور الأكبر (CA) بحيث أن $OF_1=OF_2=\sqrt{a^2-b^2}$

معامل التباعد المركزي يساوي $\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}$.

معادلة القطع الناقص الموضحة صورته أعلاه هي $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{1} = 1$

$$OF_1=OF_2=\sqrt{\sqrt{2}^2-\sqrt{1}^2} = 1$$

معامل التباعد المركزي يساوي $\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{1}{2}$

للمزيد يمكنك الإطلاع على الرابط الإلكتروني http://en.wikipedia.org/wiki/Ellipse

1. مدار كوكب بلوتو

تم اكتشاف كوكب بلوتو عام 1930 م. وفيما يلي بعض المعلومات التي تم حسابها حول مدار هذا الكوكب:

نقطة الأوج: 49.31 وحدة فلكية

نقطة الحضيض: 29.66 وحدة فلكية (آخر نقطة حضيض كانت بتاريخ 5 سبتمبر 1989 م)

نصف طول المحور الأكبر: 39.48 وحدة فلكية

معامل التباعد المركزي: 0.249

حيث تمثل الوحدة الفلكية مقدار المسافة بين الأرض والشمس وتساوي 150 مليون كيلومتر تقريباً.

نقطة الحضيض هي أقرب مسافة بين الكوكب والشمس بينما نقطة الأوج هي أبعد مسافة بين الكوكب والشمس.

لاحظ أن الشمس لا تقع في مركز المدار بل تقع عند أحد بؤرتي القطع الناقص. وبالتالي لنفرض أن الشمس تقع عند البؤرة F_1 كما هو موضح في الشكل أعلاه.

هذا يعني أن الحضيض يساوي CF_1 بينما الأوج يساوي AF_1.

a. استخدم البيانات المعطاه لحساب طول نصف المحور الأصغر b لمدار الكوكب بلوتو

b.استخدم ورق رسم بياني ووحدة قياس مناسبة لرسم مدار بلوتو بشكل دقيق.

يجب التأكد مما يلي:

يقع مركز المدار في نقطة الأصل $(0, 0)$.

اجعل موقع الشمس في أحد بؤرتي القطع الناقص.

اجعل موقع بلوتو في نقطة الحضيض.

c. بعد خمس سنوات من وصول بلوتو إلى نقطة الحضيض (5 سبتمبر 1994م) تحرك الخط الوهمي الواصل بين بلوتو والشمس بزاوية مقدارها $14°$ بعكس اتجاه عقارب الساعة وبالتالي أصبح بلوتو على بعد 29.79 وحدة فلكية تقريباً من الشمس. أوجد موقع بلوتو الجديد على الرسم وقم بتسمية النقطة الجديدة 1994.

قدر المساحة التي تكونت خلال هذه السنوات الخمس من الخط الوهمي الذي يصل بين الشمس وبلوتو.

d. استخدم الآن المساحة التي قمت بحسابها وقانون كبلر الثاني لتقدير موقع بلوتو بعد مرور خمس سنوات أخرى (5 سبتمبر 1999م). ضع علامة واسم للموقع الجديد على الرسم.

e. استمر بنفس الطريقة على الرسم البياني للمدار وبتسمية النقطة الجديدة التي تحصل عليها ووضع علامة في كل مرة حتى تعود إلى نقطة الحضيض مرة أخرى.

f. اكتب الزمن الذي استغرقه بلوتو لإكمال دورة كاملة حول الشمس بالسنوات.

2. مذنب هالي

يُبيِّن الجدول التالي بعض البيانات المتعلقة بمدار مذنب هالي.

نقطة الأوج	35.1 وحدة فلكية
نقطة الحضيض	0.586 وحدة فلكية
تاريخ الوصول لنقطة الحضيض	9 فبراير 1986
نصف طول المحور الأكبر	17.8 وحدة فلكية
معامل التباعد المركزي	0.967

تحتاج كذلك إلى معرفة أنه بعد مرور سنة من الوصول إلى نقطة الحضيض تحرك الخط الوهمي الواصل بين كل من الشمس والمذنب بزاوية مقدارها $144°$ تقريباً.

a. قدّر المسافة بين الشمس والمذنب في تاريخ 9 فبراير 1987.

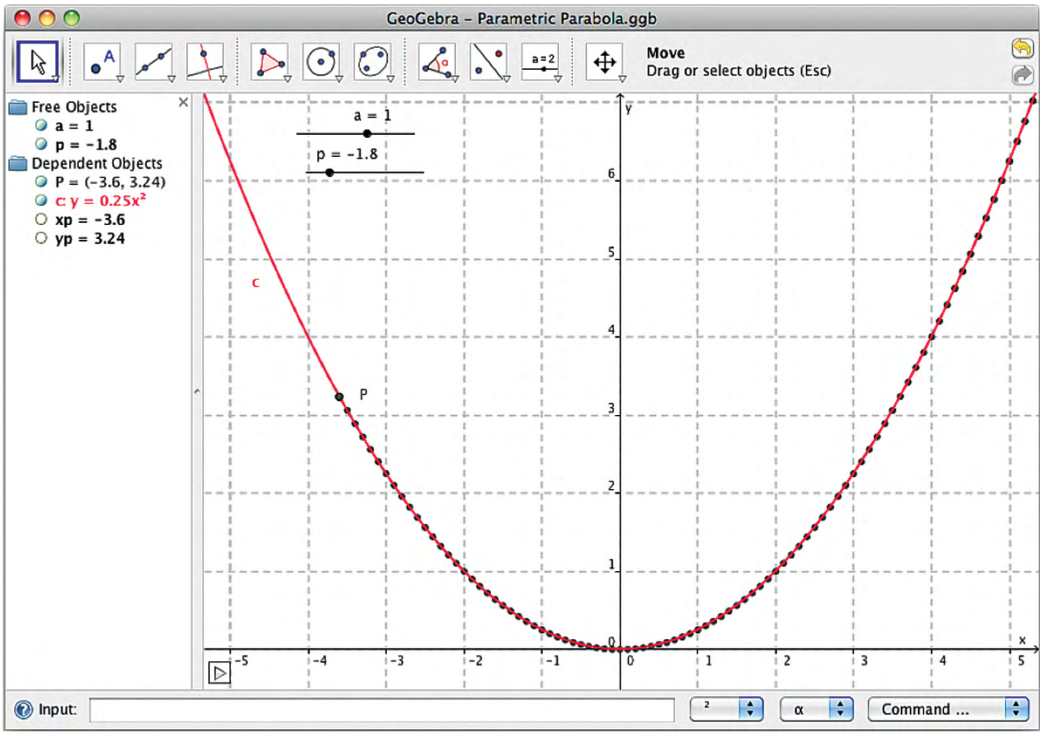
b. قدّر التاريخ الذي سيعود فيه المذنب إلى نقطة الحضيض مرة أخرى.

النشاط الرابع
المعادلات الوسيطية للقطوع المخروطية

1. المعادلات الوسيطية للقطع المكافئ هي:

$$x = 2a\,p$$
$$y = a\,p^2$$

نحتاج لإنشاء التمثيل البياني لهذه المعادلات إلى اختيار قيمة للمقدار a ومن ثم تعويض قيم مختلفة للمتغير p ومن ثم حساب القيم المقابلة لكل من المتغير x و y. قد يستغرق ذلك بعض الوقت نظراً لحاجتك إلى حساب قيمة متغيرين في نفس الوقت. ولحسن الحظ يمكنك استخدام أحد تقنيات التمثيل البياني لتسهيل عملك. يمكنك إتباع التعليمات التاليه لإنشاء التمثيل البياني الموضح في الشكل أدناه.



a. افتح صفحة جديدة في برنامج جيوجبرا وأضف **محرك انزلاق** (Slider Object). احتفظ بالتسمية التلقائية a وكذلك القيمة التلقائية للمجال من -5 إلى 5.

b. أضف محرك انزلاق آخر. وغيِّر تسميته إلى p.

c. أكتب المعادلة $xt = 2*a*p$ في منطقة الإدخال أسفل شاشة برنامج جيوجبرا (سنستخدم الرمزين xt و yt للدلالة على المتغيرين x و y على الترتيب والمقابلة لقيمة المتغير p) لقد قمنا حتى الآن بإعداد المتغير p فقط وبالتالي لن تلاحظ أي تغير.

d. أدخل المعادلة $yt = a*p$^2 . لم يتم إلى الآن إنشاء التمثيل البياني.

e. أدخل الصيغة P = (xt, yt) . سيؤدي هذا الإدخال إلى ظهور نقطة جديدة P تكون إحداثياتها معتمدة على القيمة الحالية للمتغير p والتي تم إعدادها مسبقاً. اضغط على المفتاح Esc وأختر **أداة التحريك** (Move Tool)

f. استخدم الآن محرك الإنزلاق لجعل قيمة المتغير a تساوي 1 ثم اسمح لقيم p بالتغيّر. لاحظ مسار حركة النقطة P. لرؤية موقع النقطة P اضغط عليها بالزر الأيمن، ثم اختر **إظهار الآثار** (Trace on) ومن ثم اضغط بالزر الأيمن على محرك الإنزلاق P وفعِّل **الرسوم المتحركة** (Animation) . ويمكنك كذلك استخدام **توقف التحكم** (Pause control) والموجود في زاوية شاشة عرض التمثيلات البيانية لوقف الرسوم المتحركة في حال اكتمال التمثيل البياني.

g. قم الآن بتغيير قيمة المتغير a واشرح أثر ذلك على التمثيل البياني للقطع المكافئ الناتج عن مسار النقطة P.

h. أعد كتابة المعادلة $x = 2ap$ بحيث يتم كتابه p بدلالة x و a وبعد ذلك عوض قيمة p في المعادلة $y = ap^2$ وأدخل المعادلة الناتجة في منطقة الإدخال أسفل شاشة برنامج جيوجبرا. صف ما تلاحظه.

2. يمكنك اتباع نفس الخطوات للحصول على معادلات وسيطية للقطع الناقص.

a. استخدم الطريقة التي اتبعتها في السؤال الأول للحصول على قطع ناقص باستخدام المعادلات الوسيطية التالية:

$$x = a\cos t$$
$$y = b\sin t$$

b. اشرح أثر تغيير قيم كل من a و b.

c. أثبت أن من الممكن اعادة ترتيب المعادلات المعطاه أعلاه للحصول على معادلة غير وسيطية لنفس القطع الناقص. أدخل هذه الصيغة في منطقة الإدخال والموجودة أسفل الشاشة في برنامج جيوجبرا. يجب أن يتطابق التمثيل البياني للصيغتين المختلفتين.

3. من الممكن كذلك صياغة القطع الزائد باستخدام المعادلات الوسيطية التالية:

$$x = a\sec t + h$$
$$y = b\tan t + k$$

a . استخدم هذه المعادلات لإيجاد صيغة مكافئة للقطع الزائد. (ستحتاج إلى استخدام محركات انزلاق لضبط قيم a و b و t، بالإضافة إلى المقدارين الثابتين h و k.)

b. اشرح أثر تغيير قيم كل من a و b و h و k.

c. أثبت أن من الممكن اعادة ترتيب المعادلات المعطاه أعلاه للحصول على معادلة غير وسيطية لنفس القطع الزائد. يجب أن يتطابق التمثيل البياني للصيغتين المختلفتين.

4. يمكن أيضاً استخدام المعادلات الوسيطية التالية للقطع الزائد:

$$x = a\cosh \mu$$
$$y = b\sinh \mu$$

a . ارسم القطع الزائد باستخدام المعادلات الوسيطية المُعطاه. (قد تحتاج إلى التجربة عند تحديد مدى معين لقيم المتغير μ.)

b . اشرح أثر تغيير قيم كل من a و b.

c . أعد ترتيب المعادلات الوسيطية لتحصل على معادلة غير وسيطية لنفس القطع.

الوحدة السادسة

المتّجهات

الـهدف التـعلميّ للـوحدة

- تطوير فهم أفضل للمتّجهات وتطبيقاتها.

النشاط الأول
القوارب

عند الساعة الثانية عشرة ظهرًا، كان موقع قارب للصيد عند النقطة (2 ,2)، حيث تقاس المسافة بالكيلومتر، ويسير بسرعة ثابتة مقدارها v كلم في الساعة، حيث $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$.

1. جدْ سرعة القارب.

2. إذا وصل قارب الصيد إلى النقطة F بعد t ساعة. فاكتب المتّجه $\overrightarrow{OF}$ الذي يحدّد موقع القارب عند الساعة t بعد الظهر.

3. جدْ موقع القارب عند الساعة الواحدة بعد الظهر.

عند الساعة الثانية عشرة ظهرًا أيضًا، وُجدَ يختٌ عند النقطة (4- ,3)، حيث تقاس المسافة بالكيلومتر، ويسير بسرعة ثابتة مقدارها w كلم في الساعة. حيث $w = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

4. ارسم نقطة الانطلاق، ومتّجه السرعة لكلّ من قارب الصيد واليخت على المستوى الإحداثيّ.

5. إذا كان اليخت بعد t ساعة عند النقطة G. اكتب المتّجه $\overrightarrow{OG}$ الذي يحدّد موقع اليخت عند الساعة t بعد الظهر.

6. جدْ المتّجه $\overrightarrow{FG}$ بدلالة t ، والذي يمثّل موقع قارب الصيد بالنسبة إلى اليخت.
   b) جدْ المسافة بين قارب الصيد واليخت بعد أربع ساعات.
   c) صف كيف تتغيّر المسافة بين قارب الصيد واليخت مع مرور الوقت.

7. عند الساعة السابعة مساءً من اليوم نفسه، شوهد قارب الصيد واليخت من البرج M عند النقطة $(36,60)$ حيث تقاس المسافة بالكيلومتر.

a. جِدْ المتّجه $\overrightarrow{MF}$ الذي يحدّد موقع قارب الصيد عند رؤيته من البرج على فرض أنّ القارب بقي يسير بالسرعة نفسها منذ الساعة الثانية عشرة ظهرًا.

b. جِدْ المتّجه $\overrightarrow{MG}$ الذي يحدّد موقع اليخت عند رؤيته من البرج على فرض أنّ اليخت بقي يسير بالسرعة نفسها منذ الساعة الثانية عشرة ظهرًا.

8. إذا أمكن رؤية ناقلة نفط كبيرة من البرج نفسه عند الساعة السابعة مساءً، عند النقطة $(25-,21-)$ u، وتسير بسرعة ثابتة $u = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$.

a. جِدْ المسافة بين الناقلة وقارب الصيد، والمسافة بين اليخت والناقلة عند الساعة السابعة مساءً.

b. ارسم شكلاً يبيّن حركة المراكب الثلاثة.

c. أيّ المركبين يتعيّن عليه أن يحذر الاصطدام بناقلة النفط ويستمرّ في مراقبتها؟ برّر إجابتك.

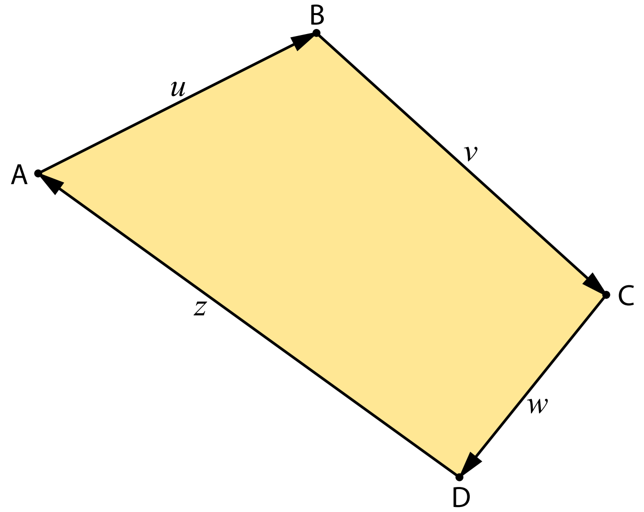
d. اكتب معادلة متّجه المسافة بين المركبين اللذين يقتربان من بعضهما بعضًا بعد T ساعة من السابعة مساءً.

e. ما معادلة المسافة بين القاربين؟

F. هل يلتقي المركبان معًا؟ إن كانت الإجابة "نعم"، متى سيلتقيان؟ وإن كانت الإجابة "لا"، متى سيكونان أقرب ما يمكن إلى بعضهما بعضًا؟ وكم ستكون المسافة بينهما حينئذٍ؟

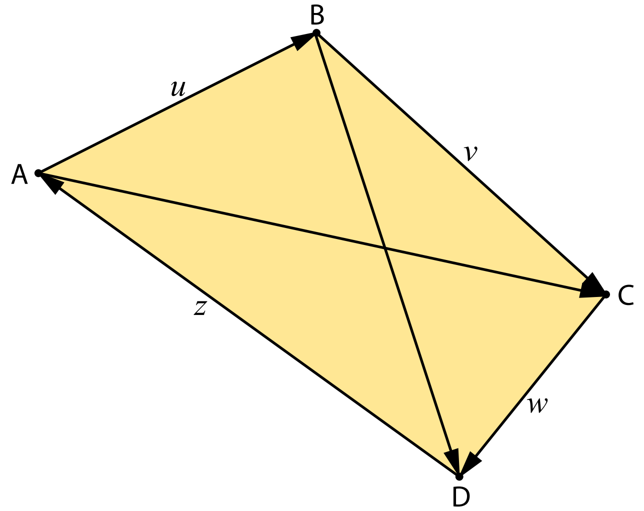
النشاط الثاني
الأشكال الرباعيّة

1. ABCD شكل رباعيّ أطوال أضلاعه ثابتة، ويُعبّر عنها بالمتّجهات u,v,w,z. و يمكن للشكل الدوران حول رؤوسه فتتغيّر هيئته، وتبقى أطوال أضلاعه ثابتة.



a. بيّن لماذا يساوي ناتج جمع المتّجهات الأربعة صفرًا.

b. رُسم المتّجهان $\overrightarrow{AC}$، $\overrightarrow{BD}$ كما في الشكل أدناه.

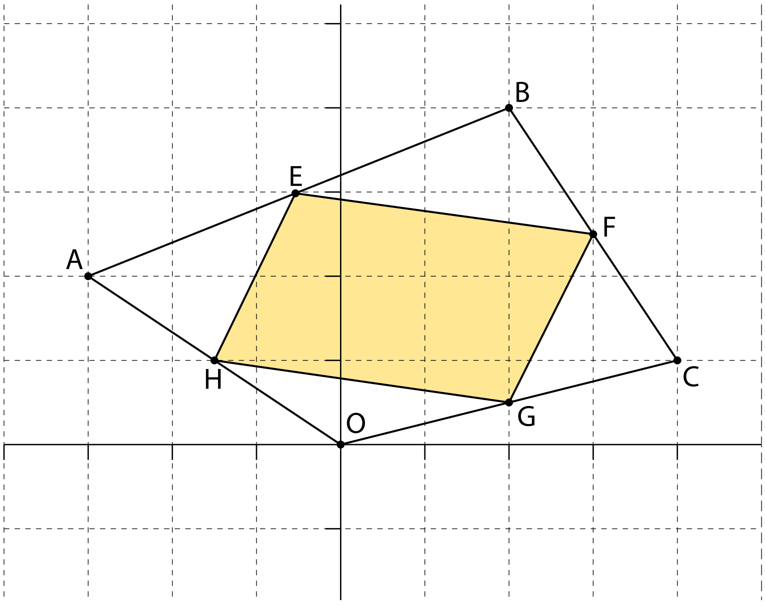


اكتب $\overrightarrow{AC}$، $\overrightarrow{BD}$ بدلالة u، v، w، z.

c. أثبت أنّ $v^2 + z^2 - (u^2 + w^2) = 2\overrightarrow{BD} \,.\, \overrightarrow{AC}$.

d. فسّر النتيجة التّي حصلت عليها في الفرع (c) بدلالة تغيّر الشكل الرباعيّ، وناتج الضرب الداخلي.

2. اختيرت ثلاث نقاط A، B، C على نحو عشوائيّ، بحيث يكون OABC شكلاً رباعيًّا، ثمّ وُصلت منتصفات أضلاعه E، F، G، H لتكوّن شكلاً رباعيًّا آخر.



إذا كان $\overrightarrow{OH} = a$، $\overrightarrow{OB} = 2b$، $\overrightarrow{OG} = c$ ، فاكتب كلاًّ من المتّجهات التالية:

a. $\overrightarrow{OA}$، $\overrightarrow{OC}$، $\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{CB}$

b. $\overrightarrow{OE}$ و $\overrightarrow{OF}$

c. أثبت أنّ الشكل EFGH متوازي أضلاع.

النشاط الثالث
الضرب الداخلي، والضرب الاتّجاهي للمتّجهات

إذا كانت $a = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ و $b = \begin{bmatrix} e \\ f \\ g \end{bmatrix}$

فإن الضرب الداخلي $a.b$ يعرف على النحو التالي:

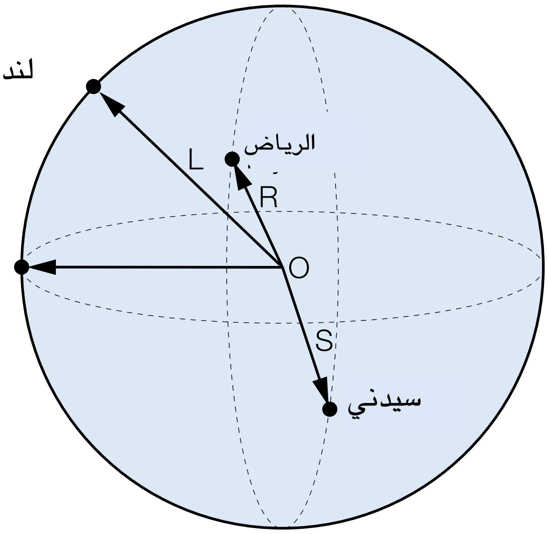
$a.b = a \times e + b \times f + c \times g$ ، ويكون الناتج عددًا.

ويعرّف الضرب الاتّجاهي $a \times b$ على النحو التالي:

$a \times b = \begin{bmatrix} bg - fc \\ -(ag - ec) \\ af - eb \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} bg - fc \\ ec - ag \\ af - eb \end{bmatrix}$، ويكون الناتج متّجهًا.

ستقارن في هذا النشاط بين الضرب الداخلي والضرب الاتّجاهي، وذلك بالتركيز على المدلول الهندسيّ لكلّ منهما.

1. إذا كانت $m = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ ، و $n = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$
   a. ارسم شكلاً يمثّل m و n، ثمّ صف الزاوية المحصورة بينهما.
   b. جدْ حاصل الضرب الداخلي $m.n$.
   c. اختر متّجهيْن آخرين متعامدين في المستوى xy. واحسب ناتج الضرب الداخلي لهما.
   d. كوّن استنتاجًا حول التفسير الهندسيّ المتعلّق بالضرب الداخلي للمتّجهات.
   (لاحظ أنّ استنتاجاتك تنطبق على المتّجهات في المستوى xy فقط).
2. ليكن $c = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ ، و $d = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$
   a. ارسم شكلاً يمثّل c ، d، ثمّ صف الزاوية المحصورة بينهما.
   b. كرّر المهمّة في السؤال الأوّل، وذلك بإيجاد متّجهين متعامدين ليس في المستوى xy فقط. ماذا تستنتج؟
3. عُد إلى السؤال الأوّل.
   احسب $|m|$ و $|n|$. ثمّ احسب الضرب الاتّجاهي $m \times n$.
   واكتب استنتاجًا حول الضرب الاتّجاهي عندما يكون المتّجهان متعامدين في المستوى xy
4. إذا أعطيتَ النتائج نفسها التّي وجدتها في السؤاليْن (2،1)، فاكتب تعميمًا يتعلّق بالمصفوفة:
   $m = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ شريطة أن تكون $m.b = 0$.
5. جدْ ناتج الضرب الاتّجاهي للمتّجهين.
   $c = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 11 \end{bmatrix}$ و $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$
6. على فرض أنّ ناتج الضرب الاتّجاهي $d = b \times c$ صحيح.
   a. جدْ ناتج الضرب الداخلي $d.b$
   b. فسّر النتيجة بدلالة إجابتك للسؤال الخامس.



سوف تجدْ في هذا النشاط المسافات بين لندن (المملكة المتّحدة)، والرياض، وسدني (أستراليا)، باستعمال المتّجهات. وفيما يلي خطوط الطول ودوائر العرض (مقرّبة إلى أقرب درجة) التي تتقاطع عند كل مدينة.

جدول (1)

المدينة	خط الطول (درجة)	دائرة العرض (درجة)
لندن (المملكة المتحدة)	0^o	52^o شمالاً
الرياض	47^o	25^o شمالاً
سيدني (أستراليا)	151^o	34^o جنوبًا

1- فسّر استعمال المصطلحين "شمالاً، جنوبًا" لدائرة العرض التي تمر في مدينة الرياض (25^o شمالاً)، ومدينة سيدني (34^o جنوبًا).

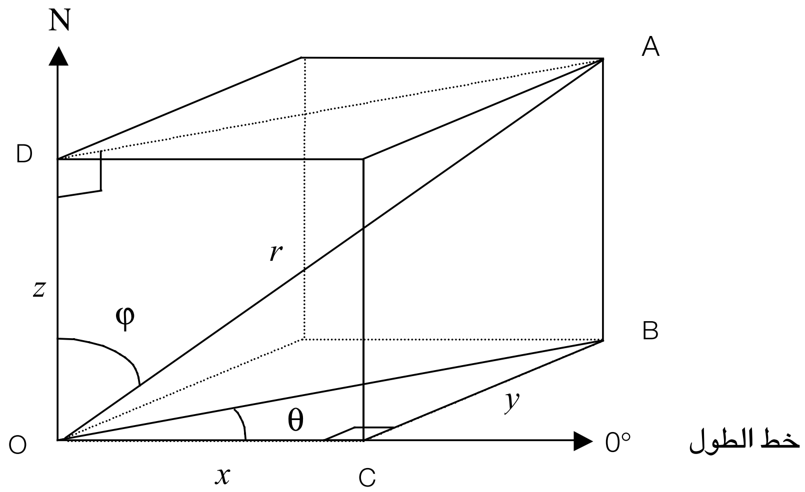
طول متّجه الموقع من مركز الأرض إلى أي مدينة يساوي 6380 كلم تقريبًا (نصف قطر الكرة الأرضيّة). واستعمال هذه القيمة في حسابات المتّجهات جميعها يجعلها مربكة وغير ضروريّة. وبناءً عليه، فإنّنا سوف نستعمل متجهات وحدة لها نفس اتجاه متجهات الموقع كما يلي:

L= $\overrightarrow{\text{(لندن)}}$ O   R= $\overrightarrow{\text{(الرياض)}}$ O   S= $\overrightarrow{\text{(سيدني)}}$ O

حوّل دوائر العرض في هذا السؤال إلى زوايا قطبيّة، حيث يُمثّل القطب الشمالي (0^o)، وخطّ الاستواء (90^o) .
وبناءً عليه، فإنّ الجدْول (1) يصبح على الصورة التالية:

المدينة	خط الطول (درجة)	الزاوية القطبية
لندن (المملكة المتحدة)	0^o	$90^o - 52^o = 38^o$
الرياض	47^o	$90^o - 25^o = 65^o$
سيدني (أستراليا)	151^o	$90^o + 34^o = 124^o$

سنستعمل المتّجهات في حساب المسافات على سطح الكرة الأرضيّة. بدايةً سنكتب مواقع المدن على صورة متّجهات، ومن ثمّ سيمكننا تحويل مواقع المدن إلى الصورة الديكارتيّة باستعمال الزاوية القطبيّة وخطوط الطول.



نجدْ من الشكل أنّ:
الصيغة الإحداثيّة العامّة لمتّجه نهايته A على كرة هي: $\overrightarrow{OA} = xi + yj + zk$، حيث z، y، x محاور الفضاء.
وتمثّل θ خطوط الطول، φ الزاوية القطبيّة. و $r = 1$ لأننا نجد متّجه الوحدة.

نجدْ من الشكل أنّ:

$$\overrightarrow{OD} = z = r.\cos\varphi$$

$$\overrightarrow{AD} = r.\sin\varphi = \overrightarrow{OB}$$

ويكون:

$$\overrightarrow{OC} = x = r.\sin\varphi.\cos\theta$$

$$\overrightarrow{CB} = y = r.\ \sin\varphi.\sin\theta$$

وبصورة مختصرة:

$$x = \cos\theta\sin\varphi$$

$$y = \sin\theta\sin\varphi$$

$$z = \cos\varphi$$

2. بيّن أنّه يمكن كتابة المتّجه L على الصورة: $L = 0.616\,i + 0.788\,k$.

3. جدْ كلاً من المتّجهين R، S.

4. استعمل الضرب الداخلي لإيجاد الزاوية α بين المتّجهين L، R.

5. استعمل الزاوية α التّي وجدتها في السؤال الرابع لإيجاد المسافة بين لندن والرياض على سطح الكرة الأرضيّة، على فرض أنّ نصف قطر الأرض 6380 كلم.

6. استعمل الضرب الداخلي لإيجاد الزاوية β بين المتّجهين L، S.

7. استعمل الزاوية β التّي وجدتها في السؤال السادس لإيجاد المسافة بين لندن وسدني.

8. احسب المسافة بين الرياض وسيدني.

9. استعمل خارطة العالم لإيجاد خطّ الطول ودائرة العرض لمدينة بعيدة عن لندن، ثمّ جدْ المسافة بينها وبين لندن على سطح الكرة الأرضيّة.

الوحدة السابعة

الإحداثيات القطبية والأعداد المركبة

مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع
King Abdulaziz & his Companions Foundation for Giftedness & Creativity
موهبة

الأهدافُ التعلميّةُ للوَحدةِ

- فهم أن الإختيار الأمثل لنظام الإحداثيات يعتمد على ظروف الأشياء المراد دراستها.
- فهم مبدأ الأعداد المركبة كإمتداد لنظام الأعداد.
- ملاحظة الروابط بين الأعداد المركبة والمجالات الأخرى المألوفة في علم الرياضيات.

سوف تشاهد في هذه الوحدة كيفية توسيع نظام الأعداد ليحتوي على الأعداد المركبة. كما سوف تتعلم كيف يمكن تمثيلها جبرياً وبيانياً. واكتشاف العلاقة بين الأعداد المركبة ومجالات الرياضيات التي كنت تتعامل معها سابقاً.

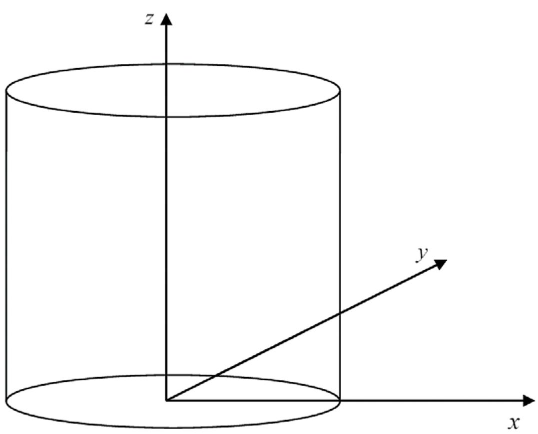
النشاط الأول
البحث في النظم الإحداثية

سوف تكتشف في هذا النشاط نُظم إحداثيات غير تقليدية. وسوف ترى لماذا تكون هذه النظم غير التقليدية أكثر ملاءمة من النظم التقليدية في بعض المواقف، وكيفية التحويل من نظام إلى آخر.

جميع الزوايا في هذا النشاط تُقاس بالدرجات ، لذا يجب ضبط الآلة الحاسبة على نظام الدرجات.

1. شركة مصنعة لمصابيح الزينة تشتري أنابيب أسطوانية، وتستخدم ليزر في النقش على الأنابيب لتصنع منها مصابيح تتيح للضوء النفاذ. ولبرمجة قاطع الليزر الذي يعمل وفق برنامج حاسوبي، ينبغي أن يكون الجهاز قادراً على التعرف على كل نقطة على الأنبوب.

تخيل وجود أنبوب أسطواني نصف قطره 6cm وارتفاعه 10cm متمركزاً في فضاء ثلاثي الأبعاد (x, y, z) بحيث يكون مركز قاعدته عند النقطة التي إحداثياتها $(0, 0, 0)$، كما هو موضح في الشكل التالي:



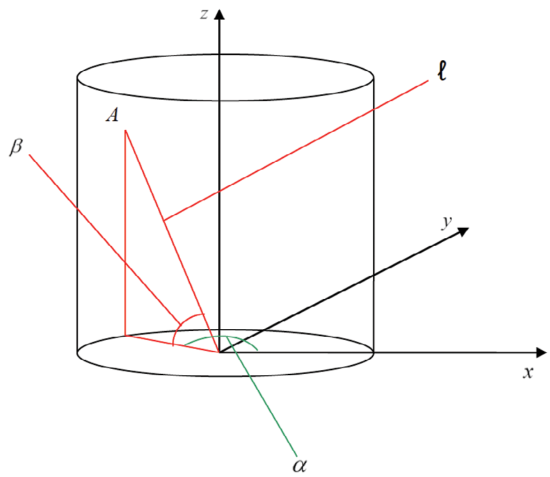
a. اذكر إحداثيات النقاط التالية:

(i) نقطة واقعة على حافة القاعدة السفلية للأسطوانة.

(ii) نقطة واقعة على حافة القاعدة العلوية للأسطوانة.

(iii) نقطة واقعة في منتصف المسافة بين القاعدتين وعلى السطح المنحني للأسطوانة.

b. لتعميم النتيجة الآن: إذا كانت النقطة ذات الإحداثيات (x, y, z) تقع على السطح المُنحني للاسطوانة، ماذا يمكن أن نقول عن القيم: x ، y ، z؟ لبرمجة قاطع الليزر، يجب أن تحدد النقطة المستهدفة بإعطاء زاويتين وطول. فعلى سبيل المثال، لاستهداف النقطة A في الشكل أدناه، يجب إدخال التعليمات في برنامج الحاسوب على الشكل (α, β, ℓ) حيث α هي الزاوية في المستوى الأفقي ، والمقاسة بعكس اتجاه عقارب الساعة مع المحور x ، و β هي الزاوية في المستوى العمودي، والمقاسة من المستوى الذي يحتوي المحورين y و x وتمثل ℓ أقصر مسافة بين نقطة الأصل والنقطة A والتي تقع على السطح المنحني للاسطوانة. إن إعطاء التعليمات بهذه الطريقة لهو بديل عن الطريقة التقليدية في تحديد النقاط في الأبعاد الثلاثية. وسوف نشير إلى الطريقة التقليدية بالطريقة الديكارتية والطريقة المطلوبة لقاطع الليزر بِطريقة "زاوية – طول".



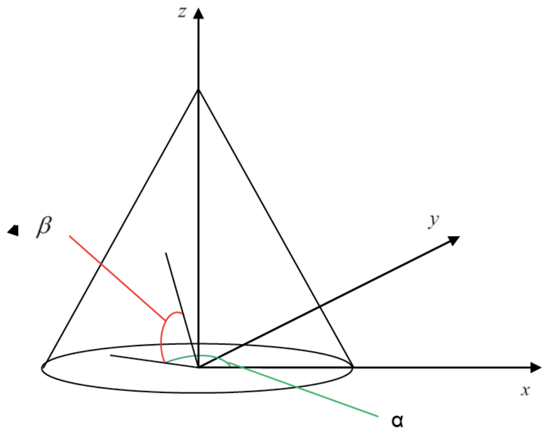
c. حدد النقاط الثلاث في الفقرة (a) باستخدام طريقة "زاوية – طول".

d. تأكد من أن النقطة في الإحداثيات الديكارتية $(2, \sqrt{32}, 10)$ تقع على حافة القاعدة العلوية للأسطوانة.

e. اكتب إحداثيات ثلاث نقاط واقعة على مسافات متساوية على السطح المنحني للأسطوانةوعلى ارتفاع 8cm من القاعدة باستعمال الطريقة الديكارتية وطريقة "زاوية – طول".

f. لتعميم النتيجة الآن: إذا كانت النقطة ذات الإحداثيات (α, β, ℓ) تقع على السطح المُنحني للاسطوانة، ما الذي يمكن قوله عن القيم α و β و ℓ ؟

2. استُعمِلَ قاطع الليزر للنقش على مخروط مركز قاعدته يقع عند النقطة ذات الإحداثيات $(0, 0, 0)$. ونصف قطر قاعدته 7cm وارتفاعه الرأسي 9cm.

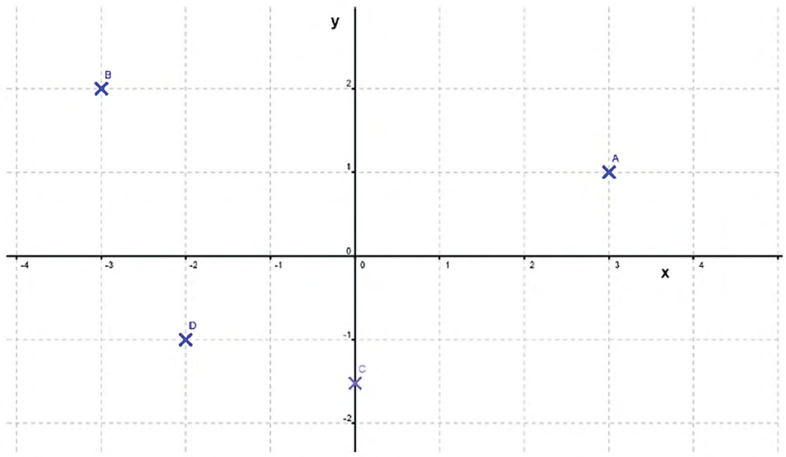


a. إذا كانت النقطة (x, y, z) تقع على السطح المنحني للمخروط ، فما الذي يمكن قوله عن القيم: x ، y ،z؟

b. إذا كانت النقطة التي إحداثياتها وفق طريقة "زاوية – طول" هي (α, β, ℓ) تقع على السطح المنحني للمخروط فماذا يمكن أن نقول عن القيم ℓ, β, α؟

c. ناقش مدى ملاءمة نظام طريقة "زاوية – طول". لهذه المهمة وكذلك لمهمة السؤال 1. وهل يمكنك استنباط نظام إحداثيات أكثر فعالية لأي من هذه المهام أو كليهما؟

3. يستخدم رادار على متن سفينة لتحديد مواقع الأجسام القريبة من السفينة. وقد تبدو شاشة الرادار على الشكل التالي:



وحدة قياس المحاور هي بالكيلومترات.

يجب على قبطان السفينة أن يكون قادراً على الإبلاغ عن المسافة والاتجاه لأي جسم يظهر على شاشة الرادار.

a. ناقش مجموعة من الطرائق التي يمكن أن تُرسل هذه المعلومات من خلالها.

لقد تم الاتفاق على أن موقع كل جسم قريب من السفينة سيتم الإبلاغ عنه بإعطاء المسافة بينه وبين السفينة وقياس الزاوية المقاسة عكس اتجاه عقارب الساعة من المحور x. يمكن كتابه ذلك على الشكل (r, θ) ، حيث r هي المسافة بالكيلومترات و θ هي الزاوية المقاسة بالدرجات بعكس اتجاه عقارب الساعة ابتداءاً من المحور x.

b. حدد مواقع كل جسم على الشاشة المبينة في الصفحة السابقة باستخدام (r, θ) .

ينبغي إتخاذ إجراءات طارئة إذا تم رصد جسم يبعد أقل من 1.5km عن السفينة حيث θ تقع بين 450 و 1350.

c. أوجد الإحداثيين (x, y) لنقطتين ضمن هذا المجال. يمكنك سؤال زميل لك حول كيفية تحويل الإحداثيين (x, y) للنقطتين إلى الإحداثيين (r, θ) للتأكد من إجابتك.

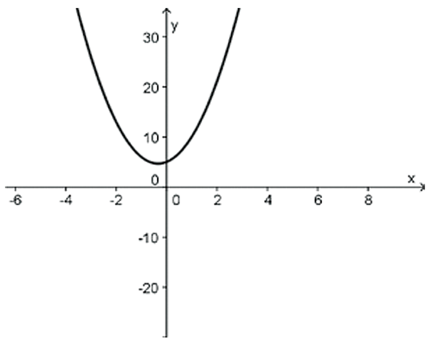
d. حدد مدى لقيم x و y التي ينبغي اتخاذ تدابير طارئة عندها.

يُستخدم نظام الإحداثيات (r, θ) في أوضاع مختلفة من الحالات في الرياضيات ويُسمى نظام الإحداثيات القطبية ، وسوف تكون هناك فرص لإعادة النظر في نظام الإحداثيات هذا في المستقبل.

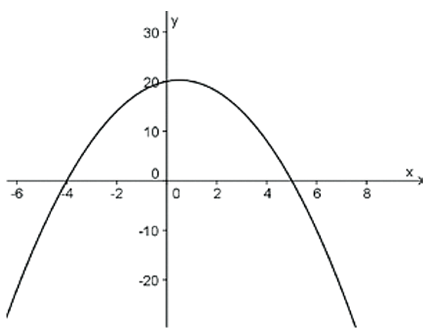
النشاط الثاني
الحلول المركبة للمعادلات التربيعية

يوضح هذا النشاط الأساس الرياضي المنطقي والتاريخي للأعداد المركبة، وذلك بالنظر في جذور المعادلات التربيعية. كما سيبين هذا النشاط مساهمة العلماء المسلمين وغيرهم، وكيفية التدرج في إدخال الأعداد المركبة في نظام الأعداد.

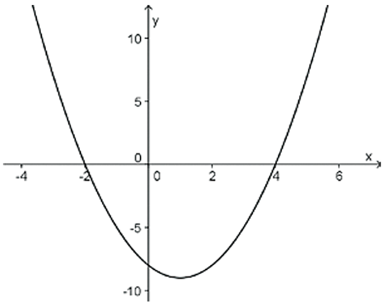
انظر في التمثيلات البيانية التالية لمعادلات تربيعية:



$y = 3x^2 + 2x + 5$



$y = -x^2 + x + 20$



$y = x^2 - 2x - 8$

توضح كل معادلة العلاقة بين الإحداثي x و الإحداثي y لكل نقطة في التمثيل البياني. وعند النقاط التي يتقاطع فيها التمثيل البياني مع المحور x تكون قيمة الإحداثي y تساوي صفر. لذا ولإيجاد إحداثيات لهذه النقاط ، يمكننا أن نعوض عن $y = 0$ في المعادلة المرافقة للتمثيل البياني.

1. عوض $y = 0$ في كل من المعادلات الثلاث أعلاه. وإذا كان بالإمكان أوجد حل المعادلة التربيعية لإيجاد إحداثي x لجميع النقاط التي يقطع عندها المنحنى محور x ثم تأكد من صحة الإجابات وتطابقها مع التمثيلات البيانية.

أثناء الحل ستكتشف أن المعادلة التربيعية جذرين لعددين سالبين، حيث: $3x^2 + 2x + 5 = 0$ لا يمكن أن تحل ؛ لأنه سينتج عن استخدام القانون العام لحل المعادلة التربيعية جذرين لعددين سالبين، حيث:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

وفي الحقيقة نقول في مثل هذه الحالات أنه لا يوجد حل "حقيقي" لهذه المعادلة.

وهذا لا يعني أنه لا يوجد حل، ولكن للبدء في فهم كيف يمكن أن نجد حلولا لمعادلات ليس لها جذورحقيقية، نحتاج إلى توسيع تفكيرنا ونظامنا العددي.

إن الشروط الضرورية لوجود حلول حقيقية لمعادلات تربيعية كانت مستعملة من قبل علماء الرياضيات المسلمين في القرن التاسع ، مثل الخوارزمي، وعبد الحميد بن ترك.

الخوارزمي هو أحد علماء الرياضيات والفلك وهو باحث في "بيت الحكمة" في بغداد. وتتجلى أهمية إسهاماته في الرياضيات في بعض المصطلحات التي يستخدمها علماء الرياضيات في الوقت الحاضر مثل علم الجبر ، وهي أحد العمليات المستخدمة في التعامل مع المعادلات وهي الكلمة التي بدأ بها عنوان كتاب له في هذا الموضوع سنة

813 م، والذي قدم فيه أول حل منهجي منظم لمعادلات خطية وتربيعية باللغة العربية. كلمة ´خوارزمية´ مشتقة من اسمه. لقد اعتبرت أوروبا أن الخوارزمي هو المخترع الأصلي لعلم الجبر، رغم أنه يعتقد الآن أن العمل الذي قام به يستند إلى مصادر هندية أو يونانية قديمة.

في نفس الفترة تقريباً التي كتب فيها الخوارزمي كتاب الجبر، كتب عبد الحميد بن ترك مخطوطة بعنوان "الضروريات المنطقية في المعادلات المختلطة"، والتي تشبه جبر الخوارزمي ولكنه تجاوز الجبر بإعطاء إثبات هندسي يشير إلى أنه إذا كان المميز سالباً فإن المعادلة التربيعية لا يوجد لها حلا حقيقيا.

لقد شاهدنا في السؤال الأول كيف أن التمثيل البياني للمعادلة $y = 3x^2 + 2x + 5$ لا يقطع المحور x، لعدم وجود حلول حقيقية للمعادلة $3x^2 + 2x + 5 = 0$. ولكن يوجد لها حلاً مركباً؛ فماذا يعني هذا؟

العدد المركب هو عدد يتألف من جزأين، الجزء الأول يسمى بالجزء الحقيقي وهو عدد من النوع الذي كنت معتاداً التعامل معه سابقاً. أما الجزء الثاني فهو تخيلي، وهو عبارة عن الجذر التربيعي لعدد سالب. سنستخدم الرمز i

لتمثيل الجذر التربيعي للعدد -1 ، أي $i=\sqrt{-1}$. ومن الآن فصاعداً فإن الجذر التربيعي لأي عدد سالب يمكن كتابته كمضاعف للرمز i فعلى سبيل المثال:

$$\begin{aligned}\sqrt{-16} &= \sqrt{-1\times 16}\\ &= \sqrt{-1}\times\sqrt{16}\\ &= 4i\end{aligned}$$

2. احسب $i, i^2, i^3, i^4, i^5, i^6$ ثم ناقش النتائج .

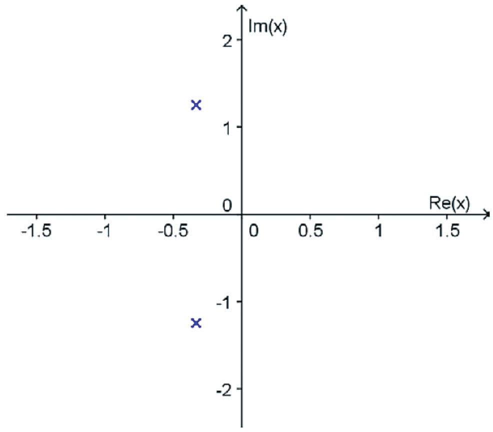
عمّم النتيجة التالية: ما هي قيمة i^n ؟

يتكون العدد المركب من جزئين؛ أحدهما حقيقي و الآخر تخيلي، وبما أن العدد الحقيقي أحادي البعد، فإنه يمكن تمثيل الجزء الحقيقي للعدد المركب على المحور x. ولتمثيل العدد المركب نحتاج إلى مستوى ذو بعدين. و يسمى هذا المستوى ذو البعدين **مستوى أرجاند** (Argand diagram) ، وعادة يُمثَل على المحور الأفقي الجزء الحقيقي من العدد المركب ويرمز له بالرمز $\mathrm{Re}(x)$ يُمثَل على المحور الرأسي الجزء التخيلي من العدد المركب ويرمز له بالرمز $\mathrm{Im}(x)$.

في السؤال الأول وجدنا أن حلاً المعادلة $3x^2 + 2x + 5 = 0$ هما $x=-\frac{1}{3}\pm i\frac{\sqrt{14}}{3}$

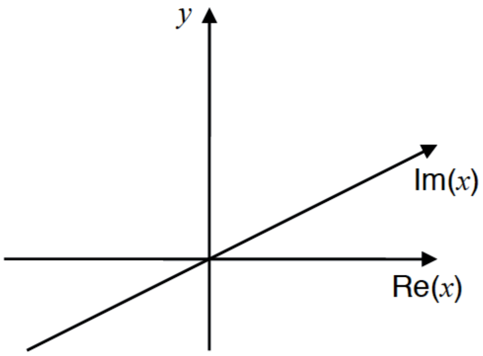
وهما اختصار للعددين المركبين $-\frac{1}{3}+i\frac{\sqrt{14}}{3}=-\frac{1}{3}+1.25i$ و $-\frac{1}{3}-i\frac{\sqrt{14}}{3}=-\frac{1}{3}-1.25i$.

وبعد تمثيل هذين العددين كنقطتين على مستوى آرجاند، سنحصل على:



3. ما هي قيم y التي سوف نحصل عليها عند تعويض الحلّين السابقين في المعادلة $y = 3x^2 + 2x + 5$ ؟

ولتمثيل الحلين $x = -\frac{1}{3} + i\frac{\sqrt{14}}{3}$ و $x = -\frac{1}{3} - i\frac{\sqrt{14}}{3}$ بيانياً نحتاج لتصور مخطط ثلاثي الأبعاد يكون فيه مستوى آرجاند أفقياً، ومحور y عمودي عليه.



إن التمثيل البياني للمعادلة $y = 3x^2 + 2x + 5$ هو عبارة عن سطح وليس منحنى.
لقد وجدنا احداثيات نقطتين على السطح هما: $(-\frac{1}{3}, -\frac{\sqrt{14}}{3}, 0)$ و $(-\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{14}}{3}, 0)$.

4. أوجد إحداثيات نقطتين أو أكثر تقع على السطح، وذلك بتحديد قيمة للمتغير $y = 1$ ثم حل المعادلة الناتجة $1 = 3x^2 + 2x + 5$.

يمكننا الاستمرار بهذه الطريقة لبناء صورة للسطح الناتج عن التمثيل البياني للمعادلة $y = 3x^2 + 2x + 5$ وبطريقة مشابهة للحصول على صورة ذات بعدين للتمثيل البياني وذلك باستبدال القيم الحقيقية للمتغير x في المعادلة لإيجاد القيم المناظرة للمتغير y. ولسوء الحظ فإنه من الصعوبة تمثيل هذا باستخدام رسومات يدوية. ومع ذلك فإن محاولة تخيل السطح تُعتبر ممارسة مفيدة.

5. كيف يمكن لهذا التمثيل أن يفسر السبب في أن المعادلة $3x^2 + 2x + 5 = 0$ ليس لها جذور حقيقية؟ وكيف يمكن للتمثيل البياني للمعادلة $y = x^2 - 2x - 8$ أن يختلف علما أننا وجدنا في السؤال الأول أن المعادلة $y = x^2 - 2x - 8$ لها جذور حقيقية؟

النشاط الثالث
نظرية ديموافر

سيتم توسيع معرفتك في هذا النشاط بالأعداد المركبة من خلال تطوير نتيجتين مهمّتين وهما صيغة أويلر ونظرية ديموافر. فقد كان الفرنسي أبراهام ديموافر والمولود عام 1667م عالم الرياضيات. انتقل إلى إنكلترا وتعاون مع إسحاق نيوتن وادموند هالي. ولقد كان لنظريتة أهمية خاصة حيث ربطت الأعداد المركبة بعلم المثلثات. ولد العالم ليونارد أويلر في سويسرا عام 1707م، وكان له الفضل في تقديم الكثير من الرموز والمصطلحات الرياضية الحديثة، بما في ذلك فكرة الدالة الرياضية.

جميع الزوايا في هذا النشاط ستقاس باستخدام التقدير الدائري (الراديان)، لذا يمكنك ضبط الآلة الحاسبة في وضع التقدير الدائري.

سوف تحتاج للتعرف على $x!$(مضروب العدد) ، حيث $x! = (x - 1)(x - 2)(x - 3) \times ... \times 2 \times 1$ ، فعلى سبيل المثال، $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$.

صيغة أويلر

من الممكن تمثيل بعض الدوال باستخدام متسلسلة قوى.

فعلى سبيل المثال:

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + ...$$

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + ...$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ...$$

1. a. اختر قيم للزاوية θ (بالتقدير الدائري) وقيم للمتغير x وقم بتعويضها في متسلسلات القوى السابقة لترى كيف أنها تتقارب بسرعة.

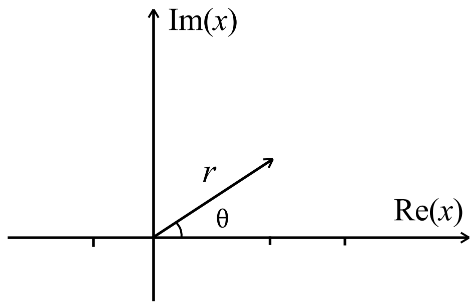
سنرى الآن ماذا سيحدث إذا استخدمنا متسلسلة القوى للدالة e^x عندما يكون x عدد تخيلي.

b. استخدام متسلسلة القوى للدالة e^x عندما $x = i\theta$ لإظهار أن $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

تُسمى الصيغة $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ بصيغة أويلر.

نظرية ديموافر

إليك العدد المركب $z = (r, \theta)$ الممثل بيانياً على مستوى آرجاند أدناه، حيث r هومقياس العدد المركب z، ويكتب على الصورة $|z|$ ، والزاوية θ هي سعة العدد المركب z، ويرمز لها بالرمز $\arg(z)$. ويسمى الشكل (r, θ) بالصيغة القطبية للعدد المركب، لأنها تشبه الإحداثيات القطبية.



a. لاحظ أن $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ثم طبق صيغة أويلر لإثبات أن $z = re^{i\theta}$.

لقد اقتربنا الان من إثبات نظرية ديموافر. وسوف نبدأ البرهان باستكشاف ما سيحدث عند ضرب أعداد مركبة.

لنفرض أن لدينا عددين مركبين $z = a + ib$ و $w = x + iy$

b. أوجد حاصل ضرب العددين z و w للحصول على zw

c. استخدم نظرية فيثاغورس لإيجاد كلا من $|z|$ و $|w|$.

ولإثبات نظرية ديموافر نحتاج أولاً إلى إثبات أن $zw = zw$ وأن $\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w)$.

d. استخدم إجاباتك في الفقرتين (a) و (b) لإثبات أن $|zw|^2 = |z|^2|w|^2$ ومن ثم $|zw| = |z||w|$.

وباستخدام صيغة أويلر نستطيع كتابة $w = r_2e^{i\phi}$ و $z = r_1e^{i\theta}$ حيث r_1 و r_2 مقياس Z و W على التوالي و θ و ϕ سعة z و w على التوالي.

e. بين أن $\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w)$

نعلم أنه لضرب عددين مركبين فإننا نضرب مقياسيهما ونجمع سعتيهما وهذه نتيجة هامة جداً.

f. إذا كانت $z = (r, \theta)$ فما هي قيمة z^2 ؟

g. وبنفس الطريقة احسب $z^3, z^4, z^5, z^6, \ldots$ حتى تلاحظ نمطاً. أكتب تعميماً لإيجاد قيمة z^n .

في الفقرة (g) ينبغي أنك وجدت $z^n = (r^n, n\theta)$. وهذا يعني أنه إذا كان r هو مقياس z و θ هي سعته فإن z^n لها المقياس r^n والسعة $n\theta$. تذكر الآن من الفقرة (a) الطريقة البديلة لكتابة z وهي $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ حيث r هو المقياس و θ هي السعة. بوضع هذه الحقائق معاً سنحصل على $z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$ و إذا كان $r = 1$ ، فإن $z^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

وهذه هي نظرية ديموافر.

h. بكتابة $(1+i)$ على الشكل (r, θ) ثم تطبيق نظرية ديموافر، احسب قيمة $(1+i)^8$ وتأكد من نتائجك بتمثيل $(1+i), (1+i)^2, (1+i)^3, \ldots, (1+i)^8$ بيانياً على مستوى آرجاند.

النشاط الرابع
الجذور المركبة للوحدة

1. تشمل كثيرة الحدود $z^3 = -1$ ثلاثة جذور، إحداها حقيقي والآخرين مُركّبين، استخدم التحليل ومن ثم القانون العام لإيجاد الجذور الثلاثة.
2. a. مثِّل الجذور بيانياً على مستوى آرجاند.
b. صِف بالتفصيل مواقع الجذور الثلاثة.

يمكن كتابة العدد المركب $z = -1$ على الصورة $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ أو على الصورة $z = re^{i\theta}$ وإليك الطريقة:

فكر بأن العدد -1 يقع على دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 1. وفي كل مرة ندور حول الدائرة التي محيطها 2π راديان علينا أن نعود إلى نفس النقطة -1. ولذلك هناك العديد من الطرائق لتمثيل العدد -1:

$$
\begin{aligned}
z = -1 &= 1 \times (\cos\theta + i\sin\theta) = e^{i\theta} \\
&= e^{i(\pi + 2\pi)} \\
&= e^{i(\pi + 4\pi)} \\
&= e^{i(\pi + 6\pi)} \\
&= e^{i(\pi + 8\pi)} \\
&= e^{i(\pi + 2k\pi)}
\end{aligned}
$$

في التعبير الأخير، k (الموجودة في الأس لـ e) تعني عدد مرات الدوران حول الدائرة ، حيث $k = 0, 1, 2, 3, 4 \ldots$ وبما أن لدينا الآن العديد من طرائق كتابة العدد -1 ، فإنه يمكننا حل المعادلة $z^3 = -1$ بطريقة مختلفة.

وإذا أخذنا الجذور التكعيبية لـِ z^3 وجميع الصيغ المكافئة سيكون لدينا:

$$z = e^{i\pi/3}$$
$$z = e^{i(\pi+2\pi)/3} = e^{i\pi}$$
$$z = e^{i(\pi+4\pi)/3} = e^{i5\pi/3}$$
$$z = e^{i(\pi+6\pi)/3} = e^{i(\pi/3+2\pi)} = e^{i\pi/3}$$
$$z = e^{i(\pi+8\pi)/3} = e^{i(\pi+2\pi)} = e^{i\pi}$$

يمكننا أن نرى أنه بعد التعويض بالأعداد $k = 0, 1, 2$ سنحصل على الإجابات نفسها مرة أخرى. يتم تكرار الأجوبة الأصلية الثلاثة في كل دورة.

لذلك لدينا ثلاثة إجابات وهي:

$$z = e^{i\pi/3} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$z = e^{i(\pi+2\pi)/3} = e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$$
$$z = e^{i(\pi+4\pi)/3} = e^{5\pi/3} = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

وهذه هي الإجابات نفسها التي حصلنا عليها في السؤال الأول

3. حل المعادلة $z^3 = 1$
   a. بالتحليل ومن ثم باستخدام القانون العام.
   b. بالطريقة المبينة أعلاه.
4. حل المعادلات التالية ، ومثّل جذور كل منها بيانياً على مستوى آرجاند ثم صف مواقعها هندسياً.
   a. $z^4 = 1$
   b. $z^4 = -1$
   c. $z^4 = i$
   d. $z^6 = 1$
   e. $z^6 = -1$

5. حل المعادلة $z^3 = 8i$.

الوحدة الثامنة

الإحصاء والاحتمالات

الأهداف التعلميّة للوحدة

- تطوير بعض أساليب تحليل البيانات باستعمال الإحصاء والاحتمالات.
- استعمال بعض النماذج الاحتمالية والاحصائية المعقدة للتوصل إلى استنتاجات حول البيانات.

في هذه الوحدة سوف تقوم بتطبيق بعض طرق الإحصاء والاحتمالات في مواقف مختلفة. النشاط الأول هو حول الاحتمال وهنا سوف تقوم بحساب الاحتمالات في بعض المواقف المعقدة. النشاط الثاني يتيح لك الفرصة لتطبيق مجموعة كاملة من المقاييس الاحصائية التي تعلمتها في مواقف تحتوي مجموعات من البيانات ذات متغير أو متغيرين. وسوف تقوم في النشاطين الأخيرين بإيجاد نماذج تمثل مجموعات مختلفة من البيانات، وهذه النماذج هي توزيعات احتمالية وهي مصنفة بحسب البيانات فإما أن تكون منفصلة أو

النشاط الأول
حساب الاحتمالات

عائلات لديها ثلاثة أطفال

1. a. أُجريت دراسة على عيّنة من العائلات لدى كل منها ثلاثة أطفال. استعمل جدولاً إلكترونيًّا (أو حاسبة) لحساب احتمالات جميع التراتيب الممكنة لوجود أولاد وبنات في العائلة ذات الثلاثة أطفال، ثمّ اكتبها وحدّد بوضوح أيّ افتراضات تريد وضعها.

b. إذا كان %40من عيّنة الدراسة مكوّنة من عائلات لديها أطفال من جنس واحد، فما الذي يمكنك استنتاجه؟

c. يظنّ بعض الباحثين أنّ احتمال أن يكون الطفل ولدًا أو بنتًا في بعض المجتمعات غير متساوٍ. لذا؛ عدّل المَعلَمة في (الجدْول الإلكترونيّ/الحاسبة) لإيجاد احتمال تقريبيّ لأن يكون المولود ولدًا يفسّر على نحوٍ أفضل المعطيات المتعلّقة بالعيّنة الواردة في الفرع b.

مسألة تاريخ الميلاد

2. a. أثبت ما يلي: إذا اختير شخصان على نحو عشوائيّ، فإنّ احتمال أن يكون لهما تاريخ الميلاد نفسه هو:

$1 - \frac{365}{365} \times \frac{364}{365}$. ما الافتراضات التّي وضعتها؟

b. **أثبت ما يلي:** احتمال أن يكون لشخصين على الأقلّ من بين ثلاثة أشخاص تاريخ الميلاد نفسه هو:

$1 - \frac{365}{365} \times \frac{364}{365} \times \frac{363}{365}$.

c. وسّع الصيغة في الجدول الإلكترونيّ لإكمال الجدول التالي:

عدد الأشخاص في العيّنة	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
احتمال أن يكون لشخصين منهم على الأقلّ تاريخ الميلاد نفسه										

d. جدْ حجم العيّنة التّي يكون فيها الاحتمال (مثلما حُسب في الفرع c) أكبر من أو يساوي 0.5.

e. يبلغ عدد أيّام سنة المريخ 686 يومًا. جدْ حجم العيّنة على المريخ التّي تجعل احتمال أن يكون لشخصين على الأقلّ من أفرادها تاريخ الميلاد نفسه أكبر من 0.50.

الأعداد العشوائيّة

3. a. إذا اختير عددان من بين الأعداد الصحيحة من 1 إلى 10 عشوائياً، وبصورة مستقلّة. جدْ احتمال أن يكون:

- متوسطهما 10
- مجموعهما أكبر من 10
- الفرق بينهما 1

b. إذا اختير عددان من بين الأعداد الصحيحة من 1 إلى 100 عشوائياً، وبصورة مستقلّة. جدْ احتمال أن يكون:

- متوسطهما 100
- مجموعهما أكبر من 100
- الفرق بينهما 1

c. إذا اختير عددان من بين الأعداد الصحيحة من 1 إلى n، جدْ عبارة بدلالة n لاحتمال أن يكون:

- متوسطهما n
- مجموعهما أكبر من n
- الفرق بينهما 1

d. ما الذي يحدث للاحتمالات الثلاثة في الفرع (c) عندما تزداد قيمة n كثيرًا؛ (أيْ عندما تؤول n إلى ما لا نهاية)؟

النشاط الثاني
تحليل البيانات الإحصائية لمتغير واحد أو متغيرين

تحليل البيانات

في هذا النشاط ستكتب تقريراً عن تحليلك للبيانات. بإمكانك اختيار بيانات بمتغير واحد وفي هذه الحالة ستقارن نفس نوع البيانات على حالتين (أو أكثر). فمثلاً بإمكانك الحصول على بيانات أطوال الطلاب (هذا هو المتغير) ثم مقارنة أطوال الطلاب في مدرسة ما مع أطوال الطلاب في مدرسة أخرى (الحالتين). عوضاً عن ذلك بإمكانك اختيار بيانات بمتغيرين وفي هذه الحالة ستبحث عن علاقة بين المتغيرين. على سبيل المثال يمكنك الحصول على بيانات أطوال الطلاب وقياسات أحذيتهم (المتغيرين).

على هذا المستوى من التحليل سنستخدم المقاييس الإحصائية التالية:

المقارنة بين مجموعات من البيانات بمتغير واحد: مقاييس النزعة المركزية (المتوسط الحسابي، الوسيط، المئين)، الرتبة المئينية (الدرجة المئينية) ومقاييس التشتت (وتسمى أيضاً مقاييس الانتشار) مثل (المدى، نصف المدى الربيعي، الانحراف المعياري، التباين).

المقارنة بين مجموعات من البيانات بمتغيرين: مقاييس الانحدار (الانحدار الخطي بطريقة المربعات الصغرى) ومقاييس الارتباط (معامل ارتباط سبيرمان، معامل ارتباط بيرسون).

لقد درست مسبقاً هذه المقاييس الإحصائية وإجراءات حسابها ومفاهيمها. سوف لن نبين كل الإجراءات الحسابية هنا ولمزيد من الشرح والمراجعة يمكنك الاطلاع على الموقع الإلكتروني www.wikipedia.org بشكلٍ دقيقٍ وكافٍ.

نحن نشجعك بشدة أن تستخدم الجداول الإلكترونية لحساب المقاييس الإحصائية التي تحتاجها. يجدر بك أن تستكشف برنامج الإكسل (Excel) لمعرفة الدوال المطلوبة للحسابات الإحصائية. اضغط على قائمة الصيغ (Formulas)، ومن ثم اضغط على ادخال دالة (Insert Function) واستخدم السهم للأسفل لاختيار الصنف الإحصائي (Statistical category). يمكنك الآن استكشاف جميع المصطلحات الإحصائية والدوال التي تحتاجها لذلك. أهم قضية عند إدخال هذه الصيغ هي أن بعض المقاييس الإحصائية التي تتعامل مع متغيرين تتطلب صيغة مصفوفية للمتغير أو المتغيرات(Array formula). وعلى وجه الخصوص فإن دالة الانحدار (LINEST) تعطي أكثر من قيمة (قيمة كل من a و b في معادلة خط الانحدار $y = ax + b$).

وتكون الطريقة هنا هي:

- ظلل خليتين تريد إظهار النتائج فيهما.
- اكتب)linest =
- ظلل مجموعتي البيانات تِباعاً
- اكتب القوس الأيمن) لإكمال الصيغة
- اضغط على المفاتيح Ctrl+Shift+Enter

الموقع الإحصائي Gapminder

ألقِ نظرة على موقع Gapminder الإلكتروني: www.gapminder.org وذلك لمعرفة المزيد عن الموقع وما يحتويه. ادرس واحداً أو اثنين من الرسوم البيانية التي تثير اهتمامك في هذا الموقع. شغِّل خاصية الرسوم المتحركة لكي تشاهد حركة البيانات وتحس بمعناها.

الآن اذهب إلي خيار DATA وتصفح مجموعة البيانات الموجودة. هناك مجموعات كبيرة من البيانات مرتبة ترتيباً هجائياً. عندما تختار مجموعة من البيانات انقر عليها. في الموجز (summary) انقر على الربط مع مرجع كامل (Link to complete reference). ظلل وانسخ (copy) البيانات المطلوبة. افتح جدولاً إلكترونياً جديداً والصق (paste) البيانات في الجدول.

مهمتك الآن هي استخراج معلومات من هذه البيانات والتوصل إلى استنتاجات. على سبيل المثال قمنا باختيار جدول الكتروني يحتوي على العمر المتوقع في مجموعة من البلدان. يمكننا مقارنة العمر المتوقع عام 1950م مع العمر المتوقع عام 2009م. بدايةً رتبنا البيانات بإزالة الصفوف التي تحتوي قيم مفقودة. ثم أزلنا أي أسطر أو أعمدة لا نحتاج إليها. بعد ذلك نحسب المتوسط والانحراف المعياري في هاتين السنتين. أخيراً استخدمنا دالة الرتبة المئينية لمعرفة ترتيب المملكة العربية السعودية.

النتائج التي حصلنا عليها موضحة في الشكل التالي:

	A	B	C
1	**Life expectancy at brith**	**1950**	**2009**
188	Uruguay	65.977	76.499
189	Uzbekistan	54.959	67.974
190	Vanuatu	40.8	70.495
191	Venezuela, RB	54.056	74.031
192	West Bank and Gaza	42.118	73.741
193	Western Sahara	34.748	66.53
194	Vietnam	39.422	74.701
195	Virgin Islands (U.S.)	57.404	79.172
196	Yemen, Rep.	31.912	63.394
197	Zambia	41.222	46.402
198	Zimbabwe	47.649	45.721
199			
200	Mean	49.5209	69.2336
201	Standard Deviation	11.4706	10.0807
202	Saudi Arabia Percentile Rank	0.217	0.545

الصورة التالية توضح الصيغ المستخدمة:

	A	B	C
1	**Life expectancy at brith**	**1950**	**2009**
188	Uruguay	65.977	76.499
189	Uzbekistan	54.959	67.974
190	Vanuatu	40.8	70.495
191	Venezuela, RB	54.056	74.031
192	West Bank and Gaza	42.118	73.741
193	Western Sahara	34.748	66.53
194	Vietnam	39.422	74.701
195	Virgin Islands (U.S.)	57.404	79.172
196	Yemen, Rep.	31.912	63.394
197	Zambia	41.222	46.402
198	Zimbabwe	47.649	45.721
199			
200	Mean	=AVERAGE(B2:B198)	=AVERAGE(C2:C198)
201	Standard Deviation	=STDEVA(B2:B198)	=STDEVA(C2:C198)
202	Saudi Arabia Percentile Rank	=PERCENTRANK.EXC(B2:B198,B152)	=PERCENTRANK.EXC(C2:C198,C152)

بعد ذلك سنتمكن من التوصل إلى أن متوسط العمر المتوقع ازداد من 49.5 إلى 69.2 سنة مع نقصان بسيط في الانحراف المعياري من 11.5 سنة إلى 10.1 سنة خلال السنوات من 1950 إلى 2009. هذا يقترح وجود تطور كبير في الرعاية الصحية في العالم خلال هذه الفترة مع تقارب الفروق بين الدول. موقع المملكة العربية السعودية يبين تغيُّراً كبيراً جداً، وذلك من الرتبة المئينية 22 في عام 1950 إلى الرتبة المئينية 55 في عام 2009.

مهمتك الآن هي اختيار واحدة أو أكثر من مجموعات البيانات وأن تستنتج معلومات من هذه البيانات. يجب أن تقدم تقريراً بالتحليل الذي ستقوم به مستخدماً مدىً واسعاً إن أمكن من الإحصائيات. يجب أن يتضمن التقرير تحليلاً لبيانات بمتغير واحد وبمتغيرين.

لإكمال بقية الأنشطة في هذه الوحدة ستحتاج إلى معرفة ما يلي:

جداول الاحتمالات

على سبيل المثال:

y	0	0	0	0
$P(Y=y)$	0.2	0.21	0.49	0.1

- $E(X)=\sum xp(X=x)$
- $E(X^2)=\sum x^2 p(X=x)$
- $VAR(X)=E(X^2)-\left(E(X)\right)^2$

توزيع ذات الحدين

إذا كان p هو احتمال نجاح تجربة ما وكان n هو عدد التجارب فإن احتمال تحقيق عدد x من النجاحات هو:

$$P(X=x)=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$$
$$E(X)=np$$
$$VAR(X)=npq$$

حيث $q=1-p$

لاحظ أن $\binom{n}{x}={}^nC_x=\dfrac{n!}{x!(n-x)!}$

يجب أيضاً أن تتذكر أنُّ الدوال الموجودة في الجداول الإلكترونية تمكنك من حساب الاحتمالات التراكمية ، حيث:

$$P(X\le r)=\sum_{x=0}^{r}\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$$

توزيع بويسون

$$P(X=x)=e^{-x}\frac{\lambda^x}{x!}$$
$$E(X)=VAR(X)=\lambda$$

تذكر أنَّ الصيغ الموجودة في الجداول الإلكترونية تمكنك من حساب الاحتمالات التراكمية ، حيث:

$$P(X \le r) = \sum_{x=0}^{r} e^{-x} \frac{\lambda^x}{x!}$$

فترات الثقة

$$= \bar{x} \pm \frac{Z_c \sigma}{\sqrt{n}}$$ حيث $\bar{x}$ هو المتوسط الحسابي للعينة.

$$p = \theta \pm Z_c \frac{\sqrt{\theta(1-\theta)}}{n}$$ حيث θ هي نسبة النجاحات في العينة.

وفيات حوادث المرور

استُخدم توزيع بويسون بدايةً من مخترعه سايمون دِنِس بويسون لتحليل إدانات المجرمين. يُستخدم توزيع بويسون عادةً لتحليل القضايا المتعلقة بحوادث المرور لأنها تقاس بحدود معينة مثل عدد الإصابات في السنة، عدد الحوادث لكل كيلومتر.

على سبيل المثال سيكون استخدام توزيع بويسون مناسباً لتحليل البيانات الآتية:

- عدد الحوادث لكل يوم على امتداد طريق عام. (هذه البيانات ممكن استخدامها لتحليل مدى أمان طريق ما).
- عدد السيارات التي تسلك طريقاً رئيساً وسط المدينة في الدقيقة.
- عدد الوفيات لكل يوم أو أسبوع أو شهر.

هذه بعض البيانات المأخوذة من قوات شرطة كانوا ناجحين في تطوير سلامة الطرق في منطقتهم خلال السنوات الثلاث الماضية. من الممكن رؤية هذه البيانات على الرابط الإلكتروني:

http://www.psni.police.uk/daily_fatal.pdf

السنة	J	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
2009	6	6	14	13	10	10	9	14	9	7	6	11
2010	5	0	7	4	3	9	4	4	5	4	6	4

1. قارن بين التوزيع الحقيقي وتوزيع بويسون لكل عام وقرر فيما إذا كان توزيع بويسون يمثل البيانات بشكل جيد. (يجب أن تأخذ بعين الاعتبار المتوسط الحسابي والتباين وكذلك شكل التوزيع).
2. توزيع بويسون يعتمد على كون حوادث المرور موزعة بشكل عشوائي وبنفس الاحتمال لكل شهر. ما هي العوامل الأخرى التي يمكن أن تؤثر في معدل وقوع حوادث المرور في شهر ما؟
3. قارن بين العامين. ما مدى نجاح الشرطة؟
4. على افتراض أن النموذج المستخدم صحيح لعام 2010:
   a. لم يكن هناك حوادث في شهر فبراير. ماذا كان احتمال حصول ذلك؟
   b. استخدم نموذج عام 2010 لحساب احتمال وقوع أقل من 5 حوادث في يناير 2011.
   c. استخدم النموذج لحساب احتمال وقوع أكثر من 6 حوادث في يناير 2011.
5. أوجد البيانات المرورية للمملكة العربية السعودية وابحث فيما إذا كان عدد الوفيات يتناقص أم يتزايد.

تُعد محطة تلفزيون محلية برنامج مسابقات يعتمد بشكل كبير على الحظ. يجب على المشاركين أن يجيبوا على أسئلة ثم يجمعوا نقاط عن طريق سحب ثلاث كرات ملونة من كيس معين. يحتوي الكيس على 4 كرات ذهبية وثلاث كرات حمراء. إذا حصلوا على كرة ذهبية يحصلوا على 5 نقاط، وإذا حصلوا على كرتين ذهبيتين يحصلوا على 10 نقاط، وإذا حصلوا على 3 كرات ذهبية يحصلوا على 20 نقطة.

1. احسب عدد النقاط المتوقع لأحد المتسابقين.
2. احسب التباين للتوزيع

بعد عرض تجريبي للبرنامج، يقول المخرج أن المتسابقين بالمتوسط لم يحصلوا على عدد كافٍ من النقاط وأنه لم يكن هناك فروق كافية بين المتسابقين. أيضاً أنه من السهل الحصول على القيمة القصوى وأنه لايوجد فروق كافية بين النتائج.

3. قم بوضع قوانين أخرى للمسابقة.

بإمكانك تغيير عدد الكرات واللون وعدد النقاط الممكن الحصول عليها. العدد المتوقع للنقاط يجب أن يكون 5 ± 100والتباين يجب أن يكون 10 ± 50

عند تصميم لعبتك يجب أن تأخذ بعين الاعتبار ما يلي:

- هل يكون البرنامج التلفزيوني جيداً إذا كان من السهل جداً الحصول على الحد الأقصى من النقاط؟
- كيف يمكنك التحكم في ذلك باستخدام الكرات الموجودة في الكيس؟
- يجب أن تكون القوانين سهلة الفهم على المشاهدين الجدد.
- يجب أن يكون بإمكان كل متسابق الحصول على نقاط، وإلا سيفقد اهتمامه.

تعداد الحيوانات

عد الحيوانات البرية أمر صعب جداً ولكنه أصبح مهماً بشكل متزايد حيث أن الإنسان يحاول إدارة بيئة الأصناف المعرضة للانقراض. لقد أصبحت بعض طرق العد أكثر تطوراً من خلال استخدام الطائرات وأجهزة الاستقبال التي تعمل بالأشعة تحت الحمراء. لكن هناك طريقة اخرى لعد الحيوانات استُخدمت قديماً وهي سهلة التطبيق وأرخص بكثير من استعمال الطائرات.

الخطوات التالية توضح كيفية عمل هذه الطريقة عند عد الغزلان في الغابة:

- يقوم الشخص الجوال ومعاونيه بإمساك عشرين غزال في اليوم ويقوموا بوضع صبغة لونية عليها بحيث يمكن تمييزها في المستقبل.
- بعد ذلك يتم إطلاق هذه الغزلان إلى البرية.
- بعد شهر (يجب أن تتأكد أن لا تفعل ذلك في فصل الربيع حيث يولد الكثير من الغزلان) تقوم بإمساك عشرين من الغزلان وتحسب عدد الغزلان التي تم وضع علامة الصبغ عليها.

أسئلة:

1. كيف يمكن لذلك أن يساعد الجوالة على تقدير عدد الغزلان في الغابة ؟
2. ما هي حدود فترة ثقة 90% لعدد الغزلان في الغابة؟
3. ما هي الافتراضات التي وضعتها في حساباتك؟ هل افتراضاتك معقولة؟

النشاط الرابع
المتغيرات العشوائية المتصلة

ستحتاج في هذا النشاط إلى أن تكون قادراً على استخدام الصيغ التالية:

دالة كثافة الاحتمال

يمكن نمذجة توزيع لمتغير متصل لمجموعة من البيانات بالدالة $f(x)$ حيث أقل قيمة دنيا a وأعلى قيمة b.
(أو بتعريف مجال الدالة على $[a, b]$).
يجب أن تحقق الدالة الشرط التالي: $\int_a^b f(x)\,dx = 1$

وفق هذا النموذج فإن الاحتمالات تعطى بِالعلاقة $P(p \leq x \leq q) = \int_p^q f(x)\,dx$

التوزيع الطبيعي

يعطى التوزيع الطبيعي بِدالة كثافة الاحتمال:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

حيث μ ترمز إلى المتوسط الحسابي و σ إلى الانحراف المعياري للدالة.

فترات الثقة

$= \bar{x} \pm \frac{Z_c \sigma}{\sqrt{n}}$ حيث $\bar{x}$ هو الوسط الحسابي للعينة.

نظرية النهاية المركزية

عندما يكون الانحراف المعياري غير معلوم والتوزيع الأصلي للبيانات معلوم لدينا أنه توزيع طبيعي يمكننا استخدام التقدير غير المتحيز s للانحراف المعياري في إيجاد فترة الثقة للوسط الحسابي:

$$= \bar{x} \pm \frac{Z_c s}{\sqrt{n}}$$

حيث أن: $s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x-\bar{x})^2}$

بيانات الطالب

قم بزيارة الموقع الإلكتروني/http://www.censusatschool.org.uk (التعداد في المدارس)، وهو موقع غني ببيانات شخصية لطلاب مدارس جُمعت من انجلترا وويلز في المملكة المتحدة. إذا كان بإمكانك إيجاد أو جمع معلومات مشابهة عن منطقتك، فإن ذلك سيكون جيداً للمقارنة.

1. افحص متغيرات مثل الطول، وقت النوم، طول القدم ... إلخ

أي من هذه المتغيرات من المحتمل أن يكون تمثيلها بالتوزيع الطبيعي ناجحاً؟ وضح لماذا.

حلل بالتفصيل البيانات الخاصة لأحد هذه المتغيرات.

استخدم جدولاً إلكترونياً لعمل جدول تكراري.

قارن توزيع البيانات التي اخترتها بالتوزيع الطبيعي الذي له نفس الوسط الحسابي والتباين لتوزيع بياناتك.

2. استخدم البيانات لحساب احتمال أن يكون طفل عمره 16 سنة أطول من 1.8 متراً في إنجلترا وقارنه بحسابات مماثلة لطفل في ويلز.

ما تفسيرك للفرق بين الإجابتين؟

بإمكانك استخدام حاسبة المنحنى الطبيعي الإلكترونية على الرابط التالي (أو استخدم جهازك الخاص كالحاسب الآلي أو المحمول أو الجداول):

http://www.math.csusb.edu/faculty/stanton/m262/normal_distribution/normal_distribution.html

3. قم بقياس طول جميع طلاب صفك.

استخدم هذه العينة لتقدير متوسط أطوال الطلاب من عمرك في بلدك.

احسب فترة الثقة 90% لتقديرك.

بيّن الافتراضات التي استخدمتها في حساباتك.

كيف يقارن طولك بأطوال هؤلاء في إنجلترا؟

الإحتباس الحراري

يعتبر الإحتباس الحراري من الظواهر التي تهمنا جميعاً ولكن العلماء لم يوافقوا على أنها تحدث أصلاً حتى وقت قريب. أما الآن فمعظم العلماء متفقون على حدوثه ولكنهم لم يتفقوا على أن سبب حدوث هذه الظاهرة هو الإنسان. بعضهم يقول إن السبب هو القوى الطبيعية مثل النشاط المتغير في الشمس ولكن الكثيرين يقولون أنها بسبب إطلاق ثاني أكسيد الكربون في الجو.

أحد أكبر مجموعات بيانات درجات الحرارة موجودة في المكتب البريطاني للأرصاد الجوية وهي أقدم مجموعة بيانات متصلة لدرجات الحرارة في العالم. بإمكانك تحميل مجموعة بيانية من خلال الرابط:

http://www.metoffice.gov.uk/hadobs/hadcet/ssn_HadCET_mean.txt

انسخ مجموعة البيانات من عام 1660 حتى عام 2010 والتي تجدها على الرابط أعلاه، ثم ألصقها صفحة جداول إلكترونية .

1. أوجد الوسط الحسابي والتباين لعينة من عام 1660م إلى 1980م في كل من الفصول الأربعة. عليك أن تفعل هذا باستعمال صيغ مناسبة في الجدول الإلكتروني.

2. a. أوجد توزيع المعاينة (التوزيع العيني) لعينة حجمها 30 لأحد الفصول من عام 1981م إلى 2010م.
   b. ما احتمال أن يكون متوسط درجة الحرارة في السنوات العشر الأخيرة حصل صدفةً وأن الاحتباس الحراري لم يحدث؟
   c. فسر نتائجك وناقش قضية أن الإنحباس الحراري يحدث أو لا يحدث.

الوحدة التاسعة

النهايات والاشتقاق

مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع
King Abdulaziz & his Companions Foundation for Giftedness & Creativity

الأهدافُ التعلميّةُ للوَحدةِ

- تطوير فهم لخصائص الدوال الأسيّة والمثلثيّة.
- تقدير أهمية الاشتقاق في حل مسائل تطبيقية على القيم القصوى.

تشتمل هذه الوحدة على أنشطة تتعلق بعملية الاشتقاق، حيث سيتم دراسة خصائص الدالة الأسيّة e^x من منظورحساب التفاضل كما سيتم دراسة بعض خصائص الدالتين المثلثيتين $\sin x$ و $\cos x$. سوف تقوم بالعمل على العديد من المسائل التي يمكن حلها باستخدام التفاضل.

النشاط الأول
الدوال التي هي نفس مشتقتها

سوف ندرس في هذا النشاط سلوك دالتين لهما خاصية أن مشتقة كل منهما هي نفس الدالة. المثال الأول هو دالة الصفر $f(x) = 0$.

1. انسخ وأكمل الجدول التالي والذي يمثل الدالة $f(x) = 0$ (سوف تستخدم الصف الأخير من الجدول فيما بعد).

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$									

2. انشئ التمثيل البياني للدالة في الفترة $-4 \le x \le 4$.
3. ما هي قيمة ميل منحنى الدالة في الحالات التالية :

a. $x = -2$

b. $x = 3$

4. الآن أكمل الصف الأخير من الجدول بأن تضع فيه قيم مشتقة الدالة عند قيم x المعطاة.

على الرغم من أن دالة الصفر تعد بسيطة إلا أنه يجب ملاحظة أنها تحقق الخاصية التي ذُكرت سابقاً، وهي أنها تساوي مشتقتها. وهذا يعني أن تكامل الدالة هو نفس الدالة، كما هو مبين أدناه

$$f(x) = f'(x) \Rightarrow \int f(x)\,dx = \int f'(x)\,dx = f(x) + C$$ [1]

ما قمنا به هنا هو ببساطة إجراء التكامل لطرفي المعادلة الأولى ، واستخدمنا حقيقة أن تكامل المشتقة يعطي دائما نفس الدالة (مضافاً إليه مقدار ثابت).

وهذا يعني أننا يجب أن نحصل على النتيجة التالية عند إجراء التكامل المحدد:

$$\int_{x=a}^{b} f(x)\,dx = [f(x) + C]_a^b = f(b) - f(a) = 0 - 0 = 0$$ [2]

5. اشرح أسباب توافق المنحنى مع المعادلة [2]

الآن من خلال ملاحظة بعض التفاصيل لخصائص دالة تكون هي نفس مشتقتها، سوف يتبادر إلى الذهن السؤال التالي:

هل يوجد دوال اخرى تحقق هذه الخاصية؟

يجب أولاً اعتبار الجملة التالية:

إذا كانت الدالة مساوية لمشتقها فإن الدالة ومشتقتها لهما نفس الإشارة.

6. يمكن أن نستنتج من الجملة السابقة أن قيمة الدالة تكون دائماً إما موجبة او دائماً سالبة. أذكر السبب؟

7. أنشئ تمثيلاً بيانياً يوضح كل حالة في السؤال السابق. اكتب بعض الملاحظات التي توضح الخصائص الرئيسة للتمثيل البياني.

سنحاول الآن إيجاد شكل محدد للدوال التي قمت بتمثيلها بيانياً. في البداية سنقوم بتعريف عدد مميز سوف نرمز له بالرمز e وهو على الشكل:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \ldots$$ [3]

8. انسخ وأكمل الجدول التالي ووضح كيف تتقارب المتسلسلة عند اعتبار عدد أكبر من الحدود

n	1	2	3	4	5	6
مجموع أول n من الحدود	1	2				

9. سنقوم الآن بإيجاد مربع المتسلسلة التي تمثل المقدار e وذلك لإيجاد المتسلسلة التي تمثل e^2

$$e^2 = 1 + 2 + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!} \ldots \qquad [4]$$

a. اشرح كيفية الحصول على هذه النتيجة من خلال ضرب كل حد بالآخر.

b. تأكد من أن المتسلسلة سوف تعطي القيمة الصحيحة (e=2.718 مقرباً إلى ثلاث منازل عشرية).

10. تعطينا المعادلتين [3] و [4] متسلسلة تمثل المقدار e^x وهي

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots \qquad [5]$$

أثبت أن المتسلسلة سوف تعطينا القيمة الصحيحة في الحالات التالية:

a. $x = 3$

b. $x = 0.5$.

c. $x = -1$

11. من خلال اشتقاق كل حد في المتسلسلة في [5]، أثبت أن مشتقة الدالة e^x هي e^x نفسها.

12. الاختباران التاليان تم تطبيقهما على الدالة $f(x) = 0$

a. الدالة تساوي ميلها عند جميع قيم x.

b. الدالة تساوي معكوس دالتها الاصلية: $\int_{x=a}^{b} f(x)\,dx = [f(x) + C]_a^b = f(b) - f(a)$ لجميع قيم a و b.

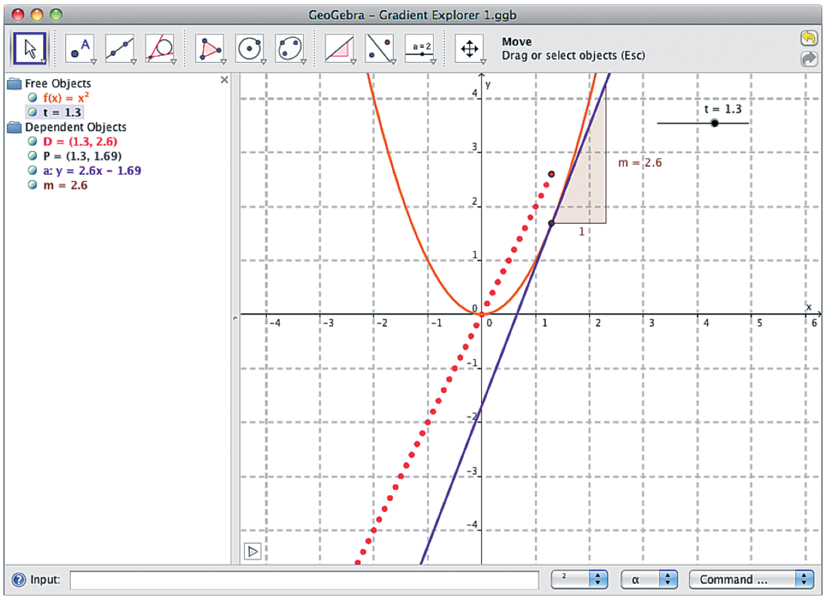
أثبت أن الدالة $y=e^x$ تحقق الاختبارين السابقين كذلك.

13. أنشئ جدول للدالة $y=e^x$ بحيث أن $-3 \le x \le 2$ ومن ثم أوجد التمثيل البياني لهذه الدالة.

قارن هذا التمثيل البياني مع التمثيل البياني في السؤال 7.

14. لقد اقترحنا في السؤال 7 وجود دالة تكون قيمتها سالبة دائماً وتساوي مشتقتها. ما هي هذه الدالة؟

سوف نستخدم في هذا النشاط أحد برامج التمثيل البياني لاستكشاف الميل لدوال مختلفة.



يوضح الشكل التالي تمثيل بياني متكامل للدالة $f(x) = x^2$ باستخدام برنامج جيوجبرا، حيث يقوم البرنامج برسم قيمة لميل الدالة لمدى معين من قيم x.

المستقيم ذي اللون البنفسجي يمثل مماساً للمنحنى عند نقطة واقعة عليه والمستقيم ذي اللون الأحمر المنقط يسجل قيم الميل للمماس في حال تحرك النقطة على المنحنى.

اتبع الخطوات التالية لتقوم بعمل التمثيل البياني الخاص بك.

1. قم بفتح ملف جديد باستخدام برنامج جيوجبرا.
   a. اختر **عرض الرسم** (Graphic View) من قائمة **الخيارات** (Options)، ثم أظهر الشبكة من خلال خيار **شبكة** (Grid).
   b. أدخل الصيغة $f(x) = x^\wedge 2$ في منطقة الإدخال الموجودة في أسفل الشاشة.
   c. أضف **محرك انزلاق** (Slider) وقم بتسميته t. أبق جميع خصائص محرك الإنزلاق كما هي.
   d. ادخل الصيغة $P = (t, f(t))$. هذه الصيغة ستعطي نقطة واقعة على المنحنى.
   e. اختر أمر **المماس** (Tangent Tool) وقم بالضغط على النقطة p وبعد ذلك على المنحنى.
   f. اختر أمر **الميل** (Slope) ومن ثم اضغط على المماس الذي قمت باختياره في الخطوة السابقة.
   g. ادخل الصيغة $D = (t, m)$. هذا سيعطينا تسجيل لنقطة تمثل قيمة الميل عند قيم معينة للمتغير x. (m تمثل ميل المماس). وفي النهاية اضغط على خيار **التتبع** (Trace) للنقطة D (من خلال الضغط بالزر الأيمن على محرك الإنزلاق). سوف تعطي هذه الخطوة الرسم الموضح أعلاه.

يمكنك تغيير اللون ونمط الخطوط والنقاط لجعل الشكل أكثر وضوحاً.

سوف تقوم الآن باستخدام التمثيل البياني الذي انشأته لاستكشاف خصائص الميل لبعض الدوال الشائعة إبتداءاً من الدالة $f(x) = x^2$.

2. a. إن تتبع النقاط الناتجة من حركة النقطة D سوف يعطينا قيم الميل للدالة $f(x) = x^2$ لقيم مختلفة من x جميع هذه النقاط تقع على مستقيم يمثل دالة الميل للدالة $f(x) = x^2$ ما هي معادلة هذا المستقيم؟

b. أدخل معادلة المستقيم التي حصلت عليها في الفقرة (a) في منطقة الإدخال وقارن مطابقة المستقيم مع النقطة D.

إرشاد: للإعداد للرسوم المتحركة التالية ، يجب حذف المعادلة التي قمت بإدخالها من خلال الضغط عليها بالزر الأيمن وحذفها. وبعد ذلك قم بإعادة تتبع النقطة D من خلال الضغط بالزر الأيمن على النقطة D واختيار إغلاق التتبع ثم إعادة تشغيل التتبع للعودة مرة أخرى.

3.a. قم بالضغط مرتين على قائمة الدالة $f(x)$ في قائمة عرض الجبر (Algebra View) وقم بتغيير صيغتها من $f(x) = x^2$ إلى الصيغة $f(x) = x^2 - 5$ اضغط زر التشغيل لإعادة تشغيل الرسوم المتحركة.

b. أوجد دالة الميل للدالة الجديدة. اشرح اجابتك.

4.a. الآن غير صيغة الدالة $f(x)$ إلى الصيغة $f(x) = x^3$

b. أوجد دالة الميل للدالة $f(x) = x^3$. اشرح اجابتك.

5. أوجد دالة الميل للدوال التالية. وفي كل حالة استخدم التمثيل البياني لتتبع قيمة الميل ومن ثم أوجد المعادلة وتأكد من ذلك من خلال المقارنة مع التمثيل البياني.

a. $f(x) = 3x$

b. $f(x) = 4x + 9$

c. $f(x) = \frac{x^2}{2} + 5x$

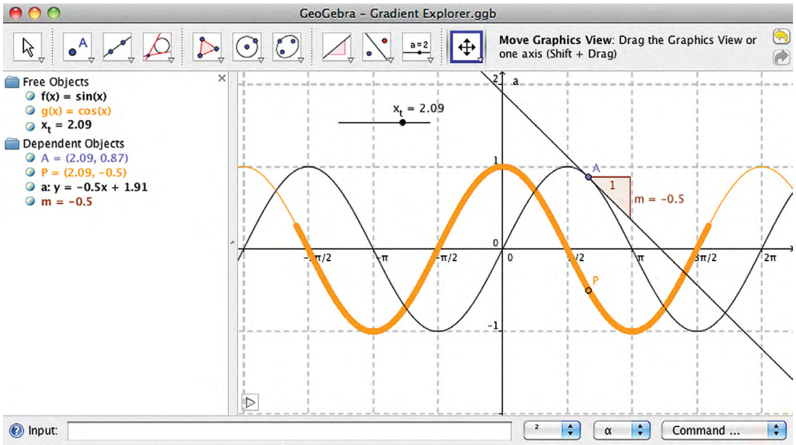
d. $f(x) = e^x$

e. $f(x) = \frac{1}{x}$

f. $f(x) = ln\, x$

6. سوف تقوم الان باستخدام التمثيل البياني لدراسة دوال الميل لبعض الدوال المثلثية. لعمل ذلك قم باتباع نفس خطوات السؤال الأول، لكنك ستحتاج إلى إجراء التعديلات التالية:

- قم بتغيير وحدة قياس الزاوية إلى التقدير الدائري (من خلال قائمة خيارات)
- قم بتغيير المحاور الإحداثية بحيث تكون وحدة قياس المحور x هي $\frac{\pi}{2}$. (من خلال قائمة خيارات ومن ثم اختر **عرض الرسم** (Graphic View) ثم استخدم القائمة المنسدلة لضبط وحدة القياس لتكون $\frac{\pi}{2}$)



- وبعد ذلك أدخل كلاً من الدوال التالية وقم بدراسة دالة الميل كما فعلنا من قبل.

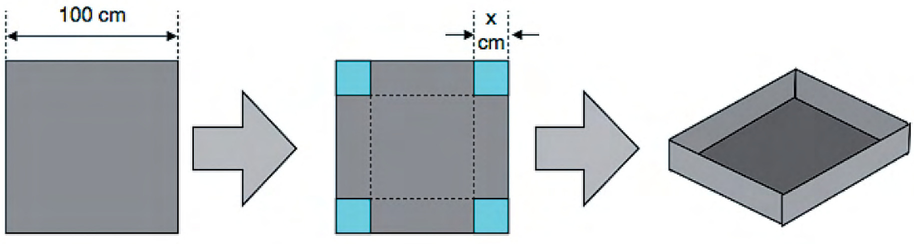
a. $f(x) = \sin x$

b. $f(x) = \cos x$

c. $f(x) = \tan x$

النشاط الثالث
القيم العظمى والصغرى

لنفترض أن لدينا ورقة مربعة الشكل طول كل من أضلاعها 1m. لكي ننشئ صندوقاً مفتوحاً من الأعلى سوف نقوم بقص أربعة مربعات متطابقة عند الزوايا الاربع للورقة وبعد ذلك نقوم بثني الورقة كما هو موضح في الشكل:



أوجد أبعاد المربعات المقصوصة لكي نحصل على صندوق حجمه أكبر ما يمكن.

سوف نقوم بدراسة هذه المسألة بطريقة عددية من خلال استخدام جداول الكترونية حيث سنستخدم السنتيمتر كوحدة قياس في هذه المسألة.

1. إذا كان طول كل من المربعات المقصوصة هو $x\text{cm}$ ، فأوجد المعادلة التي تمثل حجم الصندوق الناتج.

2. من خلال المعادلة التي حصلت عليها في السؤال 1، ما المدى الممكن لقيم x؟

3. استخدم المعادلة التي حصلت عليها لعمل نموذج لجداول إلكترونية وكذلك عمل تمثيل بياني يوضح كيفية تغير حجم الصندوق مع تغير قيمة x.
4. استخدم الجداول الإلكترونية لتقدير قيمة x والتي تعطينا القيمة العظمى لحجم الصندوق.

سوف نستخدم الان طريقة حساب التفاضل لإيجاد القيمة الدقيقة للحل.

5. لنفرض أن $V(x)$ هي دالة تمثل حجم الصندوق. اشتق هذه الدالة لتحصل على المشتقة $\frac{dV}{dx}$ بدلالة x.

6. حل المعادلة $\frac{dV}{dx}=0$ بدلالة x. أي حلول هذه المعادلة يعطيك أكبر حجم ممكن للصندوق؟

7. أثبت أن الحل الذي حصلت عليه من خلال الإشتقاق يتوافق مع الحل العددي الذي حصلت عليه مسبقاً باستعمال الجداول الإلكترونية.

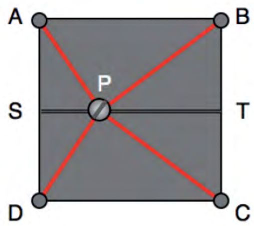
نقدم الآن بعض المسائل المرتبطة بالقيم القصوى لكي تقوم بإيجاد حلول لها. في كل حالة انشئ نموذج لجداول إلكترونية لإيجاد الحل العددي ومن ثم أوجد الحل الدقيق.

8. قام مزارع ببناء حظيرة للأغنام مستطيلة الشكل باستخدام 100 من الألواح طول كل منها 1m وذلك لعمل سياج حول الحظيرة.

ما هي أكبر مساحة ممكنة للحظيرة يمكن احاطتها بالسياج؟

9. مزارع آخر لديه 100 من الألواح طول كل منها 1m وذلك لعمل سياج لحظيرة أغنام. أحد جوانبها على هو جدار طويل ، كما هو مبين في الشكل التالي:

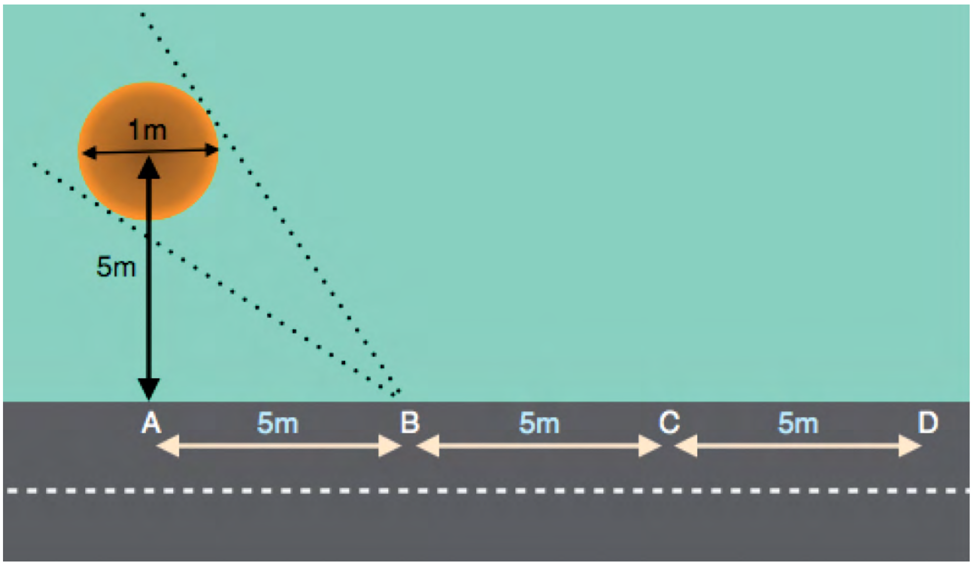
ما هي أكبر مساحة ممكنة لهذه الحظيرة؟



10. يوضح الشكل التالي قطعة معدنية مربعة الشكل ABCD طول كل من أضلاعها 10cm.
تم وضع مسمار P يتحرك في الاتجاهين على طول المستقيم ST ليكون أشبة بآلة نحت تتحرك بالتوازي مع الحافتين AB و DC ويقع في منتصف المسافة بينهما.

يوجد أربع أسلاك حمراء اللون مربوطة برؤوس المربع A و B و C و D وموصلة مع المسمار P.
a. أثبت أن مجموع أطوال الأسلاك الأربعة يكون أقل ما يمكن عندما يكون المسمار P واقع في مركز المربع.
b. إذا كان المستقيم المنحوت ST واقع على مسافة 2cm عوضاً عن المسافة 5cm فما هو أفضل موقع للمسمار P والذي يجعل مجموع أطوال الأسلاك أقل مايمكن؟

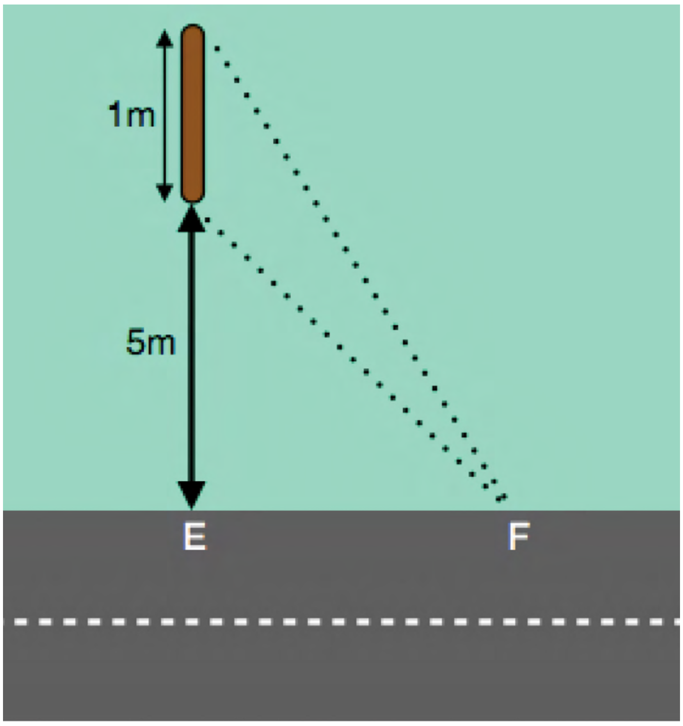
يوضح الشكل التالي مخطط لجزء من طريق يمر بمحاذاة البحر. الدائرة ذات اللون البني تمثل برميلا أسطوانيّ الشكل موجود في المياه كهدف للرماية. قطر البرميل يساوي 1m ومركزه يبعد مسافة 5m عن النقطة A والتي تمثل أقرب نقطة للبرميل بالنسبة إلى الطريق.



يقف رامي القوس عند النقطة B والتي تبعد 5m عن النقطة A ويقوم برمي السهام باتجاه البرميل. يحصر الخطان المنقطان زاوية الهدف وتقاس ابتداءاً من النقطة B.

1. a. احسب قياس زاوية الهدف (بالدرجات) عندما يقف الرامي عند النقطة B.
   b. احسب قياس الزاوية عندما يقف الرامي عند النقاط A و C و D.
   c. اذا كان بإمكان الرامي أن يقف في أي مكان على الطريق بحيث لا يدخل في المياه ، فما هو أفضل موقع للرامي للحصول على أفضل فرصة لإصابة الهدف ؟ اشرح إجابتك.

2. تم تحديد هدف آخر داخل المياه بمحاذاة الطريق نفسه كما هو موضح في الشكل التالي:



تم تحديد الهدف هنا ليكون على شكل مسطح والمطلوب من الرامي إصابة هذا الهدف المسطّح.

- يوضح الشكل قياس زاوية الهدف عند مشاهدتها من النقطة F.
- لن يستطيع الرامي مشاهدة الهدف من النقطة E وبالتالي فمن المستحيل إصابته من هذه النقطة.

أوجد أفضل موقع للرامي ليقف فيه لإصابة الهدف مع الأخذ بعين الاعتبار (كما في السؤال السابق) أن الرامي يستطيع الوقوف في أي مكان على الطريق ولكن دون الدخول في المياه.

الوحدة العاشرة

حل مسائل متقدمة

الهدف التعلميّ للوَحدةِ

- معالجة نطاق واسع من المسائل الرياضية ذات محتوى مألوف وغير مألوف.

تحتوي هذه الوحدة على مختارات من التحديات الرياضية والتي ستقوم باستكشافها. تغطي النشاطات نطاق واسع من المواضيع التي تحتوي على الأعداد والحساب، والهندسة، والجبر والتمثيل البياني لأنظمة رياضية. ستكون هناك بعض المواضيع غير المألوفة لديك. ينبغي أن تستغل الفرص المتاحة لاستكشاف الأفكار المثيرة لإهتمامك وكيفية التعامل مع الأسئلة في النشاطات كنقطة انطلاق وليس كنهاية للموضوع.

النشاط الأول
متتابعات فيري و دوائر فورد

1. اكتب جميع الكسور المألوفة التي يمكنك كتابتها باستخدام العددين 1 ، 0 في البسط أو المقام.
2. إن المتتابعة التي تمثلها الكسور في السؤال السابق هي متتابعة فيري الأولى F_1 أوجد متتابعات فيري الثلاث التالية: F_2 و F_3 و F_4
3. يعرف وسيط الكسرين $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ على الشكل التالي: $\frac{a+c}{b+d}$
بين ان كل المتتابعات التي أنشأتها لها الخاصية التالية:

أي كسر في المتتابعة (عدا الكسرين الأول والأخير) يساوي وسيط الكسرين المجاورين له.

إن خاصية وسيط الكسور في متتابعة فيري توفر طريقة بسيطة لإيجاد المتتابعة F_n

إذا عُلمت المتتابعة F_{n-1} استخدم على سبيل المثال الخطوات التالية لإيجاد F_5 من F_4

- اكتب F_4 مع ترك فراغات بين الحدود.
- أوجد الوسيط لكل حدين متجاورين واكتبه بينهما.
- إحذف الوسيطات التي مقامها لا يساوي 5.

تأكد أن ما ستحصل عليه هو:

$$F_5 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1} \right\}$$

4. جد متتابعتي فيري التاليتين F6 و F7 مستخدماً طريقة الوسيط.

5. سننظر الآن إلى المتتابعات الكسرية التي كتبناها من وجهة نظر هندسية.

أرسم المحورين الإحداثيين على ورقة رسم بياني، ستحتاج إلى الربع الأول (قيم x و y موجبة) وكذلك ستحتاج إلى أن يكون طول كل محور 20 سم. سمِّ المحاور مستخدماً مقياس رسم مقداره 20 سم لكل وحدة على كلا الإتجاهين، واجعل تدريج الفترات بطول 0.1 على طول كلٍ من المحورين.

سنرسم الآن دائرة فورد (Ford Circle) المرتبطة بالكسر $\frac{1}{2}$ ، باستخدام التعريفات التالية:

- قطر دائرة فورد الرتبطة بالكسر $\frac{a}{b}$ هو $\frac{1}{b^2}$
- كل دائرة من دوائر فورد تقع فوق الكسر المرتبطة به، بمعنى أن قاعدة الدائرة (أخفض نقطة في منحنى الدائرة) المرتبطة بالكسر $\frac{a}{b}$ هي عند النقطة
  أو بصورة مكافئة: $\left(\frac{a}{b}, 0\right)$
- مركز دائرة فورد المرتبطة بالكسر $\frac{a}{b}$ هي النقطة $\left(\frac{a}{b}, \frac{1}{2b^2}\right)$ ، ونصف قطرها هو $\frac{1}{2b^2}$
  بالنسبة للكسر $\frac{1}{2}$ ، أرسم دائرة قطرها 5 سم، بحيث تكون أخفض نقطة فيها هي النقطة .(0.5, 0)
  (بصورة أخرى، يكون نصف قطر الدائرة 2.5 سم ومركزها في النقطة (0.5, 0.125).

6. ارسم الآن جميع دوائر فورد في المجموعة F_5 ، وعلى نفس المستوى الإحداثي.

7. لا تتقاطع أي من الدوائر التي رسمتها إلى الآن.

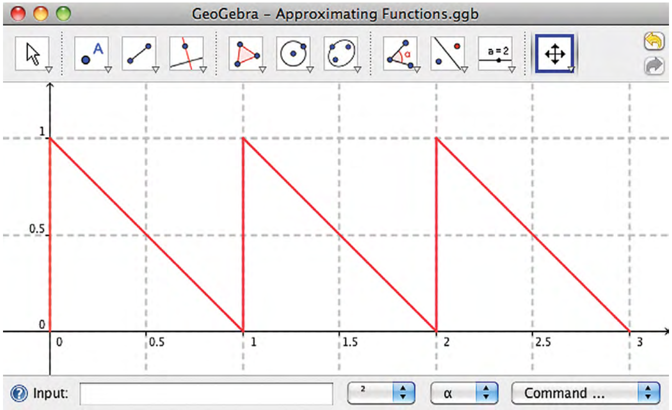
a. بيّن حسابياً أن دائرتي فورد للكسرين $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{3}$ تتلامسان ولكنهما لا تتقاطعان.

b. تعد $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{3}$ كسور وحدة؛ وهي كسور بسطها هو العدد 1. بيّن أن دائرتي فورد لأي كسرين متتاليين من كسور الوحدة تتلامسان ولكنهما لا تتقاطعان..

8. إن أكبر دائرة فورد رسمتها هي الدائرة المرتبطة بالكسر $\frac{0}{1}$ ، وهي ملامسة لجميع دوائر كسور الوحدة على الرسم البياني. هل يمكنك إثبات ذلك جبرياً؟

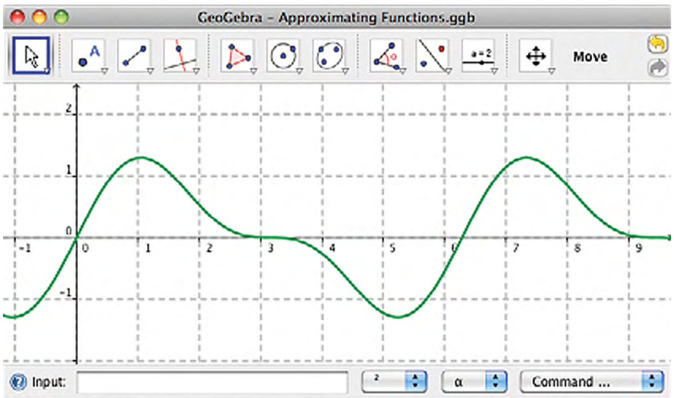
النشاط الثاني
استكشاف الموجات

يتمثل التحدي في هذا النشاط بمحاولة تقريب دالة دورية بسيطة باستخدام متسلسلة من دوال الجيب (Sine). الخطوات أدناه توضح كيف تفعل ذلك عن طريق العمل على مثال واحد على أن تقوم بحل المثالين الآخر بنفسك.



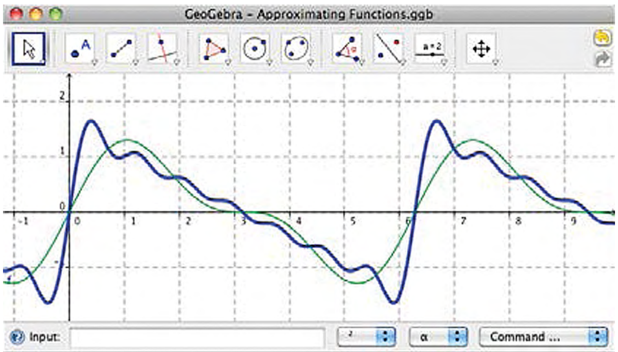
1. يوضح الشكل جزءاً من الدالة الدورية التي سوف نقربها وتسمى دالة "سن المنشار" (Sawtooth)
   - افتح ملف جيوجبرا جديد.
   - اضبط "مقياس الرسم" و "عرض الشبكة" بشكل مناسب ثم استخدم أداة "قطعة مستقيم" (Line Segment) لرسم الدالة. غيّر لون وعرض القطع المستقيمة وتأكد من إخفاء التسمية.

2. سوف نستخدم الآن سلسلة من دوال الجيب (Sine) لتقريب دالة "سن المنشار". لكننا في البداية سوف ننتج دالة لها نفس الشكل العام الصحيح، ومن ثم نحولها قدر الإمكان حتى يتوافق مع "دالة سن المنشار".
   - قم أولاً بإخفاء القطع المستقيمة الحمراء التي تشكل "دالة سن المنشار".
   سوف تقوم بإظهارها لاحقاً، وذلك عندما تكون جاهزاً لمقارنته مع الدالة التقريبية التي تجدها.
   - كتقريب أولي، أدخل الدالة $y = \sin x$



3. غيّر الآن الصيغة $y = \sin(x)$. إلى $y = \sin(x) + \frac{1}{2}\sin(2x)$ يمكنك كتابة $y = \sin(x) + \frac{1}{2}\sin(2x)$ في منطقة الإدخال (Input).
يجب أن يكون الشكل الناتج كما هو موضح جانباً.

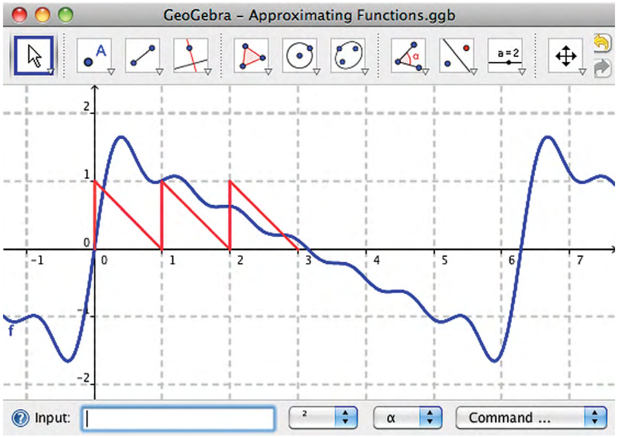
4. قم الآن بزيادة عدد الحدود المستخدمة في التقريب.



ربما ستتوقع الآن النمط الذي ستتبعه. الحد التالي هو: $\frac{1}{3}\sin(3x)$ ، وهكذا. إذا استمرت الحدود حتى تشتمل الحد الذي فيه x^7 ، فإن التقريب سيكون كما هو موضَح:

يبين الشكل التقريبين الثاني والسابع للمقارنة. لاحظ أن التقريب السابع هو أكثر قرباً للشكل الأصلي لدالة "سن المنشار"، فهو يرتفع بحدة ثم ينحدر على شكل مستقيم تقريباً. على الرغم أن زيادة حدود أخرى سوف يحسن من التقريب فإن ما قمنا به إلى الآن يكفي لتحقيق الغرض. نحتاج الآن إلى تحويل هذا التقريب حتى يشبه دالة "سن المنشار" قدر الإمكان.

5. اجعل القطع المستقيمة لدالة "سن المنشار" الآن ظاهرة. يجب أن يكون الشكل على النحو المجاور



اجعل المنحنى الآن ينطبق على دالة "سن المنشار"

a. افترض أن الدالة التقريبية تسمى$f(x)$ ،

أدخل الصيغة: $y=f(x*2*\pi)$.

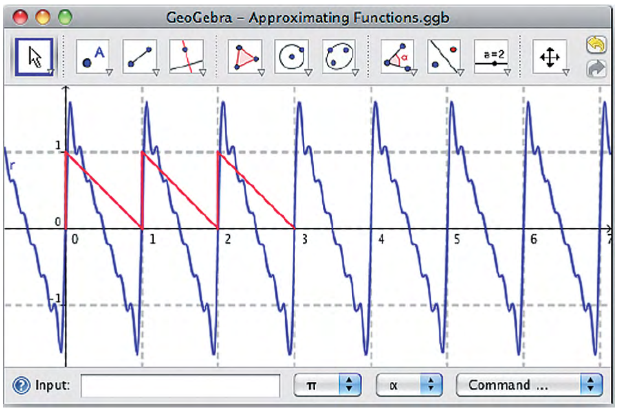
b. أخفِ التقريب السابق.

كما يظهر في الشكل التالي، فإن هذا له نفس تأثير مطابقة تردد التقريب لدالة "سن المنشار".

6. الخطوات التالية هي ضبط قيمة السعة"amplitude" للتقريب .

- استخدم جيوجبرا لقياس قيمة السعة للتقريب؛ يجب ان تجد أن قيمته تقترب من π .
- افترض أن آخر تقريب هو $h(x)$ ، وأدخل الصيغة: $y=\frac{g(x)}{\pi}$

7. الخطوة الأخيرة هي ضبط الوضع العمودي للتقريب.



- افترض أن آخر تقريب هو $h(x)$ وأدخل الصيغة:

$$y=h(x)+\frac{1}{2}$$

التقريب الكامل يجب أن يكون كما في الشكل المجاور.

إذا كنت قد اكملت بنجاح بناء تقريب موجة "سن المنشار" (Sawtooth wave)،

فإنه عليك الآن أن تحاول إجراء نفس التحليل على الأشكال الموجية المعروضة في السؤالين 8 و 9.

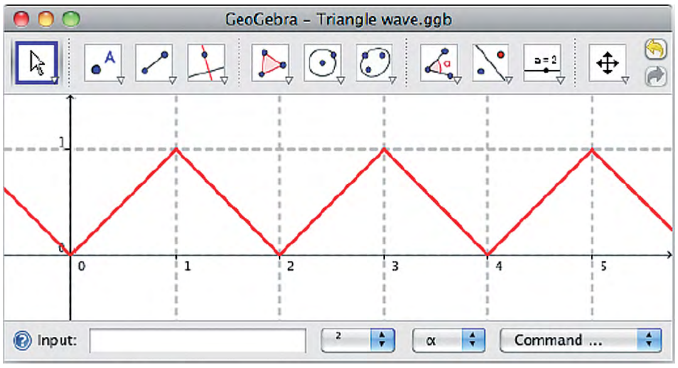
8. الموجة المثلثية

إرشاد: المتسلسلة التي تنتج الشكل العام لهذه الموجة تكون على الشكل التالي:

$$y = \sin x - \frac{1}{9}\sin 3x$$

لاحظ أن الحد الذي يحتوي $\sin 2x$ غير موجود.

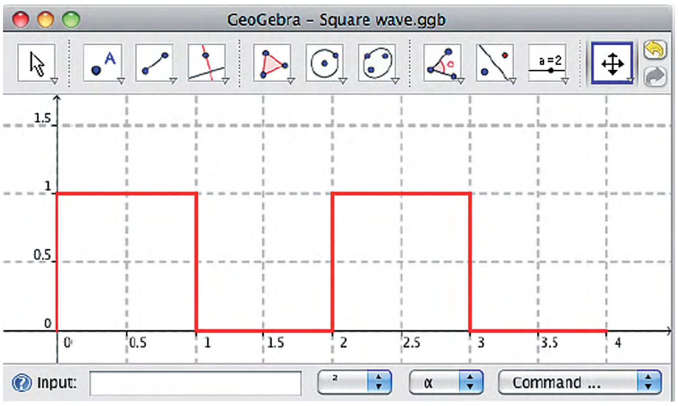
كيف ستستمر هذه المتسلسلة؟



9. الموجة المربعة

إرشاد: يمكن الحصول على الشكل العام لهذه الموجة من المتسلسلة التي تبدأ بهذا الشكل:

$$y = \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x$$



النشاط الثالث
الكسور المتواصلة والتقارب

الكسر المتواصل هو كسر اعتيادي بحيث أن المقام يحتوي على كسر آخر.

فعلى سبيل المثال: $\frac{2}{3} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}}$

1. اكتب الكسور المتواصلة التالية على صورة كسور اعتيادية.

a. $\frac{1}{2+\frac{1}{2}}$

b. $3+\frac{1}{1+\frac{1}{9}}$

c. $2+\frac{1}{3+\frac{1}{1+\frac{1}{4}}}$

يمكن تحويل كسر اعتيادي (مثل $\frac{89}{28}$) إلى كسر متواصل باتباع الخطوات التالية:

أولاً، استخرج العدد الكلي من الكسر:

$$\frac{89}{28} = 3 + \frac{5}{89}$$

تأكد من ان الكسر الباقي $\frac{5}{89}$ لا يختصر. اذا كان يختصر فاننا نقسم البسط والمقام على القاسم المشترك الأكبر لهما قبل الانتقال إلى الخطوه التاليه :

$$3+\frac{5}{89} = 3+\frac{1}{\frac{89}{5}}$$

نلاحظ في هذه الحاله أن الكسر لا يختصر لأن 5 هو عدد أولي و 89 ليست من مضاعفات العدد 5.

اكتب الآن الجزء الكسري على شكل " مقلوب المقلوب "، كالتالي:

$$3+\frac{5}{89} = 3+\frac{1}{\frac{89}{5}}$$

بعد ذلك، استخرج العدد الكلي من الكسر السفلي:

$$3+\frac{1}{\frac{89}{5}} = 3+\frac{1}{17+\frac{4}{5}}$$

ثم استمر بنفس الطريقه :

$$3+\frac{1}{17+\frac{4}{5}}=3+\frac{1}{17+\frac{1}{\frac{5}{4}}}=3+\frac{1}{17+\frac{1}{1+\frac{1}{4}}}$$

إن أي عدد نسبي يمكن كتابته على صورة كسر متواصل بهذه الطريقة. إن الكسر المتواصل سيتلاشى دائماً بعد عدد معين من الخطوات.

2. اكتب الأعداد النسبية التالية على صورة كسور متواصلة:

a. $\frac{5}{3}$

b. $\frac{26}{17}$

c. $\frac{79}{115}$

3. يمكننا استخدام الشيفرة التالية لكتابة الكسور المتواصلة بشكل مختصر:

$$2+\frac{1}{3+\frac{1}{1+\frac{1}{4}}}=[2;3,1,4]$$

الكسر المتواصل الأقل من 1 يُكتب بالصورة التالية: [0,3,5,2]

أوجد الكسور المتواصلة للأعداد النسبية التالية، أعط إجابتك مستخدماً الشيفرة:

a. $\frac{12}{7}$

b. $\frac{29}{3}$

c. $\frac{85}{19}$

4. نستطيع تقريب قيمة كسر متواصل باستخدام سلسلة من المتقاربات، فعلى سبيل المثال خذ الكسر المتواصل: [3;4,6,7,2]

المتقاربة الأولى: $3+\frac{1}{4}=3.25$

المتقاربة الثانية : $3+\frac{1}{4+\frac{1}{6}}=3+\frac{1}{\frac{25}{6}}=3+\frac{6}{25}=3.24$

المتقاربة الثالثة : $3+\frac{1}{4+\frac{1}{6+\frac{1}{7}}}=3+\frac{1}{4+\frac{1}{\frac{43}{7}}}=3+\frac{1}{\frac{179}{43}}=3+\frac{43}{179}=3.2402$

المتقاربة الرابعة : $\frac{3}{1}=3$

a. إحسب خامس (وآخر) متقاربة لهذا الكسر المتواصل.

b. مثّل المتقاربات بيانياً (الأعداد من 1 إلى 5، مكتوبة على محور x وقِيَم المتقاربات على المحور y) ، لبيان كيف أن هذه المتسلسلة تتقارب.

5. أوجد المتقاربات للكسور المتواصلة التالية:

a. [1;3,5]

b. [2;4,5,3]

c. [3;5,7,19,21]

6. يمكن كتابة الأعداد غير النسبية على شكل كسور متواصلة لا نهائية. أوجد أول خمس متقاربات للكسر المتواصل التالي: [1;1,1,1,1...]

7. بعض الأعداد النسبية الأخرى لها شيفرة ذات نمط متكرر من الأرقام.

a. أوجد أول خمس متقاربات للكسر المتقارب التالي: [1;1,2,1,2,1,2,1...]

b. أوجد مربع جميع إجاباتك في الفقرة (a). ماذا تلاحظ؟

8. بعض الأعداد غير النسبية لها نمط غير متكرر.

إبحث في تقارب الكسر المتواصل: [3;7,15,1,292,1,1...]

9. أوجد عبارة الكسر المتواصل التي تمثّل العدد $\sqrt{2}$.

(إرشاد: $\sqrt{2}= 1.414$ لأقرب ثلاث منازل عشرية. حوّل هذا التقريب إلى كسر اعتيادي، وابحث عن نمط في الكسر المتواصل الناتج).

مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع
King Abdulaziz & his Companions Foundation for Giftedness & Creativity

بوابة موهبة الإلكترونية

شاركنا التجربة واكتشف عالم بوابة موهبة
المرجع الرئيسي للموهبة والإبداع والابتكار في العالم العربي

بوابة موهبة الإلكترونية بوابةٌ علمية متخصصة في إرساء أسس تربية الموهوبين والمبدعين في المملكة العربية السعودية والعالم العربي. تقدّم خدمات متنوعة للموهوبين والقائمين على رعايتهم، وتعتبر مصدرًا معرفيًا متجددًا ومجالاً تفاعليًا للمشاركة المجتمعية.

Info@mawhiba.org.sa
الرقم المجاني: 8006123333

"موهبة .. حيث تنتمي"