الصفّ الثالث الثانويّ

منهج موهبة الإضافيّ المتقدّم

الرياضيات
دليل المعلم

مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع
King Abdulaziz & his Companions Foundation for Giftedness & Creativity

تم تطوير مادة منهاج موهبة الإضافي المتقدم لتستعمل في المدارس المنضوية في مبادرة موهبة للشراكة مع المدارس.

شارع تركي بن عبدالعزيز الأول
صندوق بريد 300820 الرياض 11372، المملكة العربية السعودية – www.mawhiba.org.sa

بِسْمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحْمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

المحتويات

مدارس شراكة موهبة

أُنتجَت موادّ تدريس المناهج الإضافيّة المتقدّمة بغرض استعمالها في مدارس موهبة دعمًا لجهود تحقيق المخرجات التعليميّة المرجوّة لبرنامج موهبة، والتّي تتلخّص في تنمية القادات الشابّة، والمتعلّمين الناجحين، وروّاد قطاع الأعمال المتميّزين في الإبداع والابتكار.

ومدارس موهبة هي إحدى المبادرات المهمّة في التخطيط الاستراتيجيّ برعاية مؤسّسة جلالة الملك عبد العزيز لرعاية الموهبة والإبداع والابتكار. تهدف إلى خلق مناخ تعليميّ يعزّز الموهبة والإبداع، إذ توّفر بعثات دراسيّة للطلاّب المتميّزين بالالتحاق في مدارس متميّزة في المملكة. ويوفّر البرنامج نشاطات تعليميّة متقدّمة، ومدرّسين مؤهّلين؛ الأمر الذي يحسّن من استعدادات الطلاّب، ويطوّر مواهبهم، كما تسهم في تحسين فرص التعليم لطلاّب المدارس الأخرى بصورة عامّة.

موضوعات المنهاج الإضافيّ المتقدّم

تعتمد موضوعات المنهاج الإضافيّ المتقدّم على الأسلوب الاستقصائيّ، حيث صممّت لاستعمالها إلى جانب المناهج المدرسيّة، بصفتها داعمة لها.

وتشتمل الموارد الخاصّة بالمناهج الدراسيّة أنشطة متنوّعة تهدف إلى إيجاد المتعلّم المستقلّ والمتمكّن، وذلك من خلال دعم المتعلّمين في استعمال القدرات فوق المعرفيّة، واستعمال استراتيجيّات التعلّم المرنة، والتخطيط الاستراتيجيّ، واستعمال الفرضيّات الأساسيّة، إضافة إلى الربط بين خيوط المعرفة التّي تشمل الحقائق الموضوعيّة والعمليّات الإجرائيّة.

يضاف إلى ما تقدّم فإنّ طلاّب مدارس شراكة موهبة يتدرّبون كي يصبحوا خبراء في الموضوعات المستهدفة في الرياضيّات والعلوم، وتكنولوجيا المعلومات ICT، واللغة الإنجليزيّة. في حين يتميّز الخبراء بالمعرفة المتقدّمة، والأهمّ من ذلك فإنّهم يعملون على مستويات فكريّة عليا، ممّا ينعكس على أساليب تدريسهم وتقويمهم. فلا تكفي القدرة على تذكّر المعلومات للذين يرغبون في أن يصبحوا خبراء، وإنّما لا بدّ من تكامل منظومة المعارف وتطبيقها في مواقف حياتيّة. وتؤكّد أنشطة كتاب الطالب على هذا النمط من التفكير، وعلى تركيز التعليم على المحاور الثلاثة الآتية: الطلاّب، والموهوبين، والمبدعين.

- **القيم والاتّجاهات والسمات المتقدّمة**: مثل الاستقصاء، والمرونة، ونقص اليقين، والإبداع، والاستقلاليّة في الدراسة، والانفتاح على البدائل، وتبنّي منهجيّة منظّمة، والمثابرة.
- **المعرفة والفهم المتقدّمان**: مثل وضوح المفاهيم، والربط بين مختلف مجالات الرياضيّات، وتفهّم البنية الأساسيّة للرياضيّات، والتبصّر في البنية الرياضيّة والأفكار الكبيرة، والمعرفة الأساسيّة، والخبرة في مجال الموضوع.
- **المهارات المتقدّمة**: مثل التفكير المنطقيّ والاستدلال، وتكوين الصور المجرّدة، والربط بين المهارات المكتسبة من ناحية وسياق الحياة اليوميّة وحلّ المسائل من ناحية أخرى، والطلاقة في مهارات الموضوع، واستعمال الأدوات المتوافرة، والدقّة في استعمال مهارات الموضوع وأدواته، والقدرات فوق المعرفيّة، والتعميم أو النمذجة.

القيم والاتّجاهات والسمات

يبنى المنهاج الإضافيّ المتقدّم على قيم واتّجاهات وخصائص ستّ تميّز مشروع شراكة مدارس موهبة، وتقدّم وصفًا واضحًا للسمات والخصائص التّي يتميّز بها الطلاّب الذين صمّم هذا المنهاج خصيصًا لرعايتهم وتنميتهم.

الاستقصاء

سوف ينمّي طلاّب مدارس شراكة موهبة روحَ الاستقصاء، وسيرغبون في التعلّم الذاتيّ، وينشطون فيه، ويتوقون إليه. وستظهر عليهم سمات المبادرة والتفكير المستقلّ، وتحدّي الافتراضات، وطلب البرهان على المسلّمات والتوكيدات. وسينظّمون مسيرة تعلّمهم بفعاليّة، منتقلين من استيعاب المعارف وإتقان الخطوات العمليّة، إلى تطوير وجهات النظر الشخصيّة والحلول الفرديّة.

المجازفة

سوف ينمّي طلاّب مدارس شراكة موهبة روحَ المجازفة، وسيظهرون الثقة بأنفسهم، ويتناولون الأفكار والظواهر الجديدة عليهم بالتجربة والنقد، ويُقدِمون على التخمين، وتوقّع الفرضيّات، ولن يزعجهم العمل في ظلّ ظروف جديدة عليهم. وسوف يرجئون التوصّل إلى الاستنتاجات قبل نضوجها في أذهانهم، ويتحمّلون نقص اليقين المؤقّت.

الإبداع

سوف ينمّي طلاّب مدارس شراكة موهبة روحَ الإبداع والابتكار، وسيصبحوا متفتّحي العقول، ومرنين في طريقة تفكيرهم. إلى جانب إبداء استعدادهم للابتكار، وإيجاد حلول متعدّدة للمشاكل والمواقف، مظهرين قدرة على تكييف أساليب عملهم لتتلاءم مع الظروف. وسيغدو عملهم مثيرًا للدهشة، ودليلاً على الأصالة، ومتميّزًا بأسلوبهم الشخصيّ الخاصّ.

المثابرة

سوف ينمّي طلاّب مدارس شراكة موهبة روحَ المثابرة، ولن تثبّط العقبات والصعوبات من عزائمهم، بل سيصرّون على مواصلة بذل الجهود. وسوف يبرهنون على تميّزهم بالتأنّي في العمل، والالتزام بأسلوبهم المنهجيّ المنظّم، ولن يكلّوا من المثابرة على تحقيق النتائج المرجوّة بأعلى مستويات الجودة والدقّة الممكنة.

التعاون

سوف ينمّي طلاّب مدارس شراكة موهبة روحَ التعاون والعمل الجماعيّ، وسيسعون إلى الحصول على الملاحظات والتعليقات على أعمالهم، وسيُدلون بآرائهم وأفكارهم بوضوح واختصار، مصغين إلى وجهات نظر الآخرين وأفكارهم. وسيتمتّعون بالقدرة على العمل الجماعيّ والاستعداد له، ويؤدّون أدوار متنوّعة ضمن فرق العمل، ويتمكّنون من تقويم أفكارهم ومساهماتهم.

الاهتمام بالمجتمع

سوف ينمّي طلاّب مدارس شراكة موهبة روحَ الاهتمام بالمجتمع. ففي الوقت الذي سيكونون فيه مدفوعين بالطموح الشخصيّ والرغبة في تحقيق النجاح، فإنّهم سيمتلكون أيضًا إحساسًا قويًّا بأهميّة المساهمات التّي يقدّمونها للمجتمع تحقيقًا لمصلحة الوطن، ومنفعة أولئك الذين هم أقلّ منهم حظًّا. وسيكونون مثالاً للمواطن الصالح المتعاطف مع المصلحة الجماعيّة لمحيطه الاجتماعيّ، المدرك لأوجه التباين والتشابه بين الأفراد والشعوب، والواعي بتراثه الثقافيّ، والتراث الثقافيّ للآخرين، كما سيكون الطلاّب متجاوبين مع القضايا الأخلاقيّة التّي تثار في سياق دراساتهم.

فئات الأداء المعرفيّ المتقدّم

تهتّم موادّ المناهج الإضافيّة المتقدّمة باكتساب وتنمية خصائص محدّدة للأداء تتركّز عليها جهود التعلّم والتقويم على حدّ سواء. يضاف إلى ذلك فإنّ عمليّات التدريس والتعلّم في ظلّ هذه البرامج تضع بين أيدي المعلّمين الأدوات اللازمة لرصد وتقويم قدرات الطلّاب على تطوير المهارات المعرفيّة المتقدّمة المرتبطة بالمهارات المعرفية الآتية:

القيم والاتجاهات والسمات المتقدّمة

1) التعميم: القدرة على الحكم على إمكانيّة استعمال نتائج موقف معيّن لتوقّع ما يمكن أن يحدث في مواقف أخرى مماثلة.

2) التجريد: القدرة على الانتقال السريع من المحسوس إلى المجرّد.

3) إيجاد الروابط: استعمال الخبرات السابقة لصياغة تعميمات جديدة.

4) التخيّل: القدرة على عرض المشكلة وتصنيفها في سياق ما يمتلكه الطالب من معارف سابقة واسعة مرتبطة بها.

5) التفكير الشامل: القدرة على التعامل مع الأفكار الكبيرة والمفاهيم الشاملة.

6) الثقة الفكريّة: القدرة على توضيح وجهة النظر الشخصيّة الخاصّة المعتمدة على الأدّلة، وتقديمها للآخرين ، والدفاع عنها.

7) التصاوغ الفكريّ: القدرة على معرفة القواعد السارية وتطويعها لإيجاد صيغ صحيحة جديدة.

8) الأتمتة: القدرة على استعمال بعض المهارات بيسرٍ وسهولة؛ لأنّها لا تتطلّب تفكيرًا فعّالاً.

9) القدرة على رؤية وجهات النظر البديلة: استيعاب آراء الآخرين في التعامل مع الأمور المبهمة والمعقّدة.

10) القدرات فوق المعرفيّة: القدرة على استعمال أنماط تفكير مختلفة ونقل المعرفة من موقف إلى آخر.

11) القدرة على التعامل مع مسائل معقّدة، ومتعدّدة الخطوات: يستطيع تجزئة المهمّة، واختيار الأسلوب المناسب للحلّ، وتنفيذ النشاط.

12) تخطيط الاستراتيجيّة: القدرة على التصدّي لخبرات تعلّميّة جديدة، وذلك بمحاولة ربطها بالمعرفة والمفاهيم الحاليّة، ومن ثمّ تحديد نمط التفكير المناسب.

13) التفكير الناقد أو المنطقيّ: القدرة على الاستنتاج ووضع الفرضيّات والاستدلال والبحث عن الأدلّة المؤيّدة.

14) التفكير المرن: القدرة على التخلّي عن فكرة واستبدالها بفكرة أفضل منها، أو إيجاد حلول متعدّدة.

15) طلاقة التفكير: القدرة على إنتاج الأفكار.

16) الأصالة: استحداث شيء جديد كليًّا.

17) التفكير التطوّريّ والتحوّليّ: القدرة على تكوين أفكار جديدة بوساطة البناء على الأفكار القائمة وتطويرها، أو بالتحوّل عنها إلى اتّجاه جديد.

18) عمليّات التنظيم الذاتيّة: قدرة الطالب على متابعة عمله ومراقبته وتقويمه وتصحيح مساره بنفسه.

19) السرعة والدقّة: القدرة على العمل بسرعة وبدقّة عالية في الوقت نفسه.

20) الإحكام: القدرة على العمل بفعاليّة ضمن قواعد المجال.

21) التركيز والمثابرة والصلابة: القدرة على مواصلة العمل حتّى إنجاز المهمّة.

استعمال هذا الدليل

يتعيّن أن يُقرأ هذا الدّليل جنباً إلى جنب مع كتاب الطالب من المنهاج الإضافيّ المتقدِّم . فهو يوفّر معلومات عن كيفيّة تدريس وحدات الكتاب ، وعما يحتاج الطالب معرفته ليكون قادراً على أدائه قبل التعامل مع أنشطة الكتاب كما يزوّد المعلّم بأساليب متنوّعة يمكن أن يسترشد بها لتدريس الأنشطة ، و خطّةً زمنيّة ممكنة .

و يتضمّن كتاب الطالب العديد من الأنشطة المتنوّعة التي صُمّم معظمها للتدريس الصفيّ التمايزي مع ترك الخيار للمعلمين في تدريس بعض الأنشطة لمجموعات مُنْتقاة من الطلاّب .

يتعيّن ألاّ يشعر المعلّم أنّه مقيّد و مُلْزم بتدريس الأنشطة كما هي معروضة في الكتاب تماماً ، فقد يرغب بعض المعلمين في تعديل أو تبديل بعض الأنشطة تبعاً لاحتياجات طلاّبهم ، فيُمكن على سبيل المثال أن يخصص لبعض الأنشطة وقتاً أطول من الوقت المقترح في الدليل ، و ذلك لإتاحة الفرصة للطلاّب لمتابعة الموضوعات التي تثير اهتماماتهم بصورة متعمّقة ، أو كي يستكشفوا المادّة المقترحة بصورة أوسع .

و يُطلب إلى المعلّمين ألاّ يضعوا سقفاً لما يمكن أن يُنجزه طلاّبهم . و تُفيد التجربة أن المُعلّم الذي ينتظر من طلبته أعلى مستويات التميّز و التحصيل سوف يلقى منهم أداءً يفوقُ توقعاته .

الوحدة الأولى

دراسة الدوال باستخدام حساب التفاضل والتكامل

نظرة عامّة

تُعطي هذه الوحدة الفرصة للطلبة لاستكشاف خصائص العديد من الدوال. كما وسيقومون باستخدام العديد من الطرق لتقريب قيمة الميل لمنحنى عند نقطة واقعة عليه.

تُعد فكرة ايجاد المشتقة للدالة من الامور ذات الأهمية الكبرى في علم الرياضيات. ولكن في الغالب يتم التطرق إلى الاشتقاق دون اعطاء الاهتمام الكافي للأفكار الرياضية الكامنة خلف هذا الموضوع. تهدف هذه الوحدة الى ترسيخ الوعي والمفاهيم الأساسية (مثل دراسة الاتصال والنهايات للدوال) والتي على أساسها سيتم بناء فهم جيد لحساب التفاضل والتكامل لدى الطالب.

لقد تم بعناية عمل هيكلية لجميع الأنشطة في هذه الوحدة :

- يعتبر أول نشاطين متقاربين نسبياً ويقدمان للطلبة سلسلة من التعليمات الواضحة.
- يعتبر النشاطان الثالث والرابع أكثر انفتاحاً ويوفران فرصة جيدة للطلبة للنقاش والاستكشاف في الرياضيات.

إن استخدام أحد برامج الحاسب (مثل برنامج جيوجبرا) سوف يثري العديد من المواضيع الموجودة في هذه الوحدة ، وتم تزويد الطلاب ببعض الارشادات لمساعدتهم.

الهدف التعلمي للوحدة

تطوير فهم عميق للأفكار الرياضية التي يقوم عليها الإشتقاق بما في ذلك الأفكار الرئيسة في الاتصال والنهايات.

المعرفة السابقة

يجب أن يكون لدى الطلاب فهم عميق للمهارات الأساسية في الهندسة الإحداثية بما في ذلك كيفية رسم المماس لمنحنى واستعماله لإيجاد قيمة تقريبية لميل المنحنى عند نقطة التماس. تُعتبر المقدرة على استخدام تقنيات التمثيل البياني مثل برمجية جيوجبرا مفيدةً جداً في هذه الوحدة، ولذلك تم تزويد الطلاب ببعض الارشادات حول استعمالها.

خصائص الأداء المتقدم

القيم والاتّجاهات والسمات

- الإبداع (النشاطان الأول والرابع)
- التعاون (النشاط الثالث)
- الاستقصاء (النشاطان الثاني والثالث)

المهارات المتقدّمة

- التعميم (النشاطان الثاني والثالث)
- التخطيط الاستراتيجي (النشاط الرابع)
- التخيل (النشاط الثالث)
- الطلاقة (النشاطان الأول والثاني)
- الدقة في الحساب (النشاطان الأول والثاني)

المعرفة والفهم المتقدّمان

- فهم البرهان (النشاط الرابع)

الخطّة الزمنيّة

ستّ ساعات تقريبًا

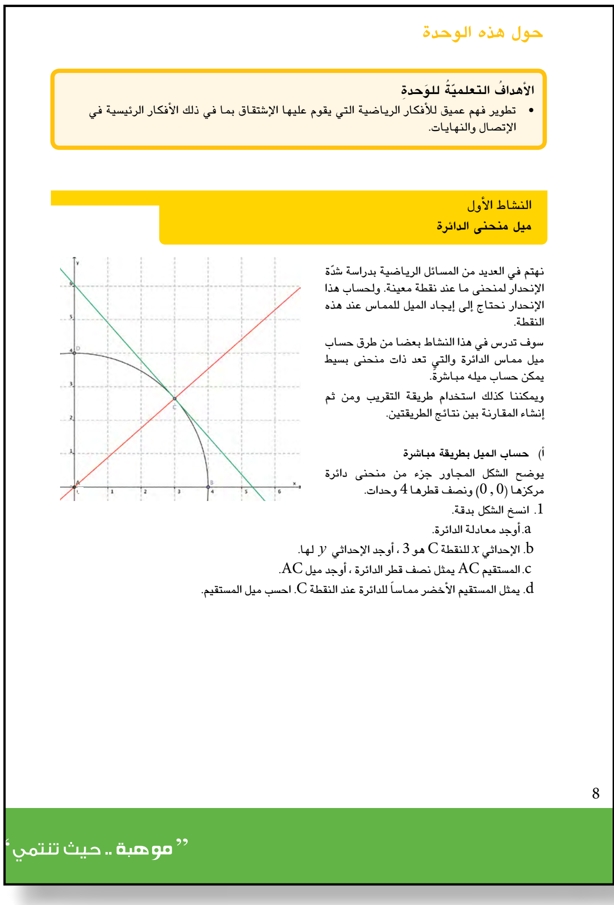
المصادر

- أدوات ملائمة للرسم (أو استخدام إحدى تقنيات التمثيل البياني)

التكنولوجيا

هناك العديد من برامج الحاسب التي يمكن استخدامها لتمثيل الدوال بيانياً ومن هذه البرامج جيوجبرا. إذ يعتبر هذا البرنامج من البرامج المجانية التي يمكن للطالب تحميلها على جهازه. و سيساعد هذا البرنامج الطلبة على استكشاف العديد من الأفكار الموجودة في هذه الوحدة. ويمكن تحميل البرنامج والمواد الأخرى الداعمة لهذا البرنامج من خلال الموقع الإلكتروني www.geogebra.com.

النشاط الأول: ميل منحنى الدائرة


حول هذه الوحدة

الأهدافُ التعلميّةُ للوَحدةِ
- تطوير فهم عميق للأفكار الرياضية التي يقوم عليها الإشتقاق بما في ذلك الأفكار الرئيسية في الإتصال والنهايات.

النشاط الأول
ميل منحنى الدائرة

نهتم في العديد من المسائل الرياضية بدراسة شدّة الإنحدار لمنحنى ما عند نقطة معينة. ولحساب هذا الإنحدار نحتاج إلى إيجاد الميل للمماس عند هذه النقطة.

سوف تدرس في هذا النشاط بعضا من طرق حساب ميل مماس الدائرة والتي تعد ذات منحنى بسيط يمكن حساب ميله مباشرة.

ويمكننا كذلك استخدام طريقة التقريب ومن ثم إنشاء المقارنة بين نتائج الطريقتين.

أ) حساب الميل بطريقة مباشرة

يوضح الشكل المجاور جزء من منحنى دائرة مركزها $(0 , 0)$ ونصف قطرها 4 وحدات.

1. انسخ الشكل بدقة.
a. أوجد معادلة الدائرة.
b. الإحداثي x للنقطة C هو 3 ، أوجد الإحداثي y لها.
c. المستقيم AC يمثل نصف قطر الدائرة ، أوجد ميل AC.
d. يمثل المستقيم الأخضر مماساً للدائرة عند النقطة C. احسب ميل المستقيم.

8

”موهبة .. حيث تنتمي“

حول هذا النشاط

يهتم هذا النشاط بإيجاد ميل مماس الدائرة عند أي نقطة منحناها. وفي حالة الدائرة يمكننا إيجاد الميل عند أي نقطة بطريقة مباشرة ودقيقة وبدون الحاجة إلى استخدام طرق التقريب ، وهذا سيخدم العديد من الأهداف ومنها:

- قيمة الميل عند أي نقطة على الدائرة تتغير ونستطيع تبعاً لذلك إستخدام الطريقة المناسبة للتقريب.
- من المهم حساب الميل باستعمال الطريقة المباشرة ومقارنة تلك النتائج مع النتائج التقريبية.

إن إيجاد ميل منحنى الدائرة بطريقة مباشرة وموافقة قيمته للنتائج التقريبية، سوف يعطي الطلبة ثقة أكبر في النتائج التقريبية التي توصلوا إليها في حالات عديدة عندما لا يكون التأكد من مدى صحتها ممكناً.

خصائص الأداء المتقدم

- **الإبداع** – من خلال تمثيل المسألة وربطها بالمعرفة المسبقة
- **الإستقصاء** – من خلال إيجاد الروابط المختلفة والبحث عن التعميمات
- **الطلاقة**
- **الدقّة**

توصيات أسلوب التدريس

يمكن وضع الطلاب الموهوبين في مجموعات مناسبة حسب مستوياتهم لتنفيذ النشاط. كما ومن المفترض أن يستخدم الطلبة ورق رسم وقلم رصاص في إيجاد الحلول. ومن المحتمل أن يقوم الطلبة باستخدام أحد برمجيات التمثيل البياني مثل برنامج جيوجبرا لتأكيد وشرح الحلول. يقدم النشاط 4 التعليمات المطلوبة خطوة بخطوة حول كيفية استخدام البرنامج في حل المسائل الهندسية.

إجابات الأسئلة

1 a. $x^2 + y^2 = 16$

b. $C = (3, \sqrt{7}) = (3, 2.65)$ مقرباً إلى منزلتين عشريتين.

c. من خلال الشكل نجد أن قيمة الميل هي

$\frac{\sqrt{7}}{3} = 0.88$ مقرباً إلى منزلتين عشريتين.

d. بما أن هذا المستقيم عمودي على المستقيم AC فإن قيمة ميله هي $m_2 = \frac{-1}{m_1}$ وبالتالي فإن ميل المماس هو $-\frac{3}{\sqrt{7}} = -1.13$ مقرباً إلى منزلتين عشريتين.

2. قيم الإحداثيات معطاة في الجدول أدناه. وقيم الميل هنا مقربة إلى أقرب منزلتين عشريتين.

a. ميل DC هو $\frac{\sqrt{7}-4}{3} = -0.45$

b. ميل DC (عندما يكون الإحداثي x للنقطة D هو 1) هو

$$\frac{\sqrt{7}-\sqrt{15}}{2} = -0.61$$

c. ميل DC (عندما يكون الإحداثي x للنقطة D هو 2) هو

$$\frac{\sqrt{7}-\sqrt{12}}{1} = -0.82$$

d. يتم حساب ميل المستقيم DC عند بقية النقاط بنفس الطريقة .

الإحداثي x للنقطة D	0	1	2	2.5	2.9	2.99
الإحداثي y للنقطة D	4	3.87	3.46	3.12	2.75	2.66
ميل المستقيم DC	-0.45	-0.61	-0.82	-0.95	-1.09	-1.13

3. الجزء المهم في هذه المهمة هو أنه كلما اقتربت النقطة D أكثر فأكثر من النقطة C فإننا نستطيع إيجاد قيمة تقريبية أدق للميل وأقرب إلى القيمة الحقيقية. تأكد من فهم الطلبة لكل مما يلي:

- لا يمكننا ببساطة جعل النقطتين C و D متطابقتان فهذا لن يعطينا أي قيمة للميل يمكن حسابها.
- بصورة عامة، لا يوجد لدينا أي طريقة مباشرة لحساب الميل لأي منحنى كما في حالة الدائرة لذا يجب الاعتماد على طرق أخرى.

تعتبر هذه الحالة ملائمة لاستخدام أحد تقنيات التمثيل البياني مثل جيوجبرا. على الرغم من أن الصور الثابتة توضح أن المستقيم الأزرق يقترب من المستقيم الأخضر فإنه وباستخدام برنامج جيوجبرا ومن خلال تحريك النقطة D سوف تعطينا تصور أكثر لما يحدث. حيث سيلاحظ الطلبة تقارب المستقيمين وهذا أشبه بتقارب طرفي المقص.

4. a.يمكن الحصول على القيمة الدقيقة للميل باستعمال معادلة الدائرة $x^2 + y^2 = 25$.

فإذا كانت $y > 0$ ، فإننا نعوض القيمة $x = 2$ في المعادلة لنحصل على قيمة y المناظرة لها وهي4.6 وبذلك يكون إحداثيا نقطة المماس هما $(2 , 4.6)$

ويكون ميل OC هو $4.6 \div 2 = 2.3$

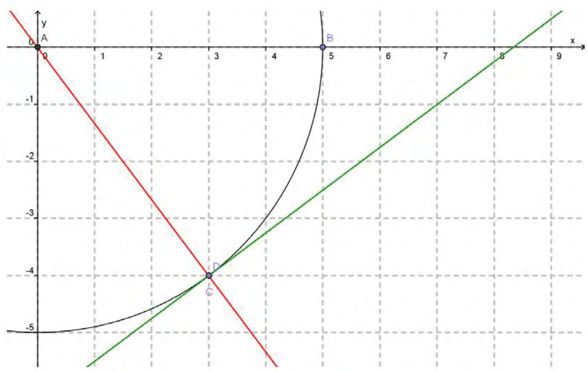
ميل المماس هو $-0.44 = -1 \div 2.3$

b . بنفس الطريقة كما في الفقرة السابقة نحصل على:

الإحداثي x هو 3، والإحداثي y هو -4 (وذلك من خلال المعادلة $x^2+y^2=25$

ميل OC هو $\frac{-4}{3} = -4 \div 3$

ميل المماس هو $-1 \div \frac{-4}{3} = 0.75$



يمكن حل الفقرتين c و d بنفس الطريقة.

c. ميل المماس هو-2.29

d. ميل المماس هو1.33

فرص التقويم

يعطي هذا النشاط الفرصة للطلبة لمراجعة فهمهم للمهارات الرئيسية في الهندسة الإحداثية بما في ذلك إيجاد إحداثيات نقاط تقع على منحنى الدالة وتمثيلها بيانياً ورسم المماس وإيجاد معادلة المستقيم العمودي على مستقيم آخر.

النشاط الثاني: تمثيل دالة الميل بيانياً

النشاط الثاني

تمثيل دالة الميل بيانياً

في هذا النشاط سوف تجد القيمة التقريبية لميل منحنى دالة عند نقطة واقعة عليه بطريقتين ، الأولى هي رسم مماس المنحنى عند هذه النقطة والثانية هي حساب الميل لجزء صغير من المنحنى عند هذه النقطة.

يمكن التفكير بالقيم الناتجة عن حساب الميل عند نقاط مختلفة على أنها دالة جديدة تسمى دالة الميل ويرمز لها بالرمز $g(x)$.

وبتمثيل الدالة $g(x)$ بيانياً ومقارنتها بالدالة الأصلية ودوال أخرى، يمكن مشاهدة العلاقات بين $g(x)$ ودوال أخرى درستها سابقاً.

الجزء الأول

a. قم برسم محورين على ورق رسم بياني مستخدماً المقياس 2cm لكل وحدة على المحور x والمقياس 1cm لكل وحدة على المحور y.

ضع القيم من 5- إلى 5 على المحور x والقيم من 10- إلى 18 على المحور y. ارسم المنحنى $y = x^2$.

b. ارسم مماس المنحنى عند $x=2$. استخدم نقطتين على المماس لإيجاد قيمة تقريبية لميله وهو مساوٍ لميل المنحنى عند $x=2$ وهذا يمثل القيمة $g(2)$.

c. انسخ الجدول التالي وضع القيمة التقريبية للميل التي حصلت عليها في الفقرة (b).

x	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4
$g(x)$ باستعمال المماس									

d. كرر الفقرة (b) لجميع قيم x الموجودة في الجدول. اكمل الصف الثاني واترك الصف الثالث فارغاً في الوقت الحالي.

سوف تقوم وبشكل تقريبي بتقدير ميل المنحنى بطريقة مختلفة وذلك لتتحقق من مدى دقة التقريب الذي حصلت عليه للدالة $g(x)$.

على الرغم من أن $y = x^2$ هو منحنى فإنه وبتكبير جزء صغير منه نلاحظ أن المنحنى قد أصبح أقرب إلى المستقيم وكلما قمنا بزيادة مقدار التكبير أصبح المنحنى أقرب وبشكل كبير إلى المستقيم.

من خلال حساب الميل للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين (2 , 4) و (2.05 ,4.2025) والواقعتين على المنحنى $y = x^2$ سوف تحصل على تقريب مختلف لميل المنحنى عند $x=2$ مقارنة بالميل الذي تم إيجاده مسبقا. يمكن الحصول على ميل أكثر دقة من خلال حساب ميل القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين(2,4) و (2.05, 4.2025).

e. أوجد ميل القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين (x, y) و $(x + 0.05, y + 0.05)$وقم بتسجيل هذه القيم في الجدول التالي.

x	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4
$g(x)$ باستعمال المماس									
$g(x)$ باستعمال القطعة المستقيمة									

f. استعمل هذه الطريقة لتقدير قيمة الميل وإكمال الصف الثالث من الجدول.

11

مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع

King Abdulaziz & his Companions Foundation for Giftedness & Creativity

حول هذا النشاط

يتطلب هذا النشاط حساب ورسم قيم الميل لدوال مختلفة (خطية، تربيعية، مثلثية) على نفس المستوى الإحداثي الذي يحتوي التمثيل البياني للدالة الأصلية. ويهدف هذا إلى تطوير فهم الطلبة للفكرة الرئيسية في الرياضيات وهي أن قيم الميل تشكل دالة ما (وتسمى بدالة المشتقة) بالرغم من أن الطلاب لم يتعرفوا بعد على مصطلح المشتقة.

خصائص الأداء المتقدم

- **الإستقصاء** – انشاء ومقارنة العديد من الحلول
- **فهم البرهان** – الانتقال من التمثيلات الملموسة إلى الأفكار المجردة
- **التعميم** – القدرة على ملاحظة ما يحدث وتطبيقه على مواقف مشابهة
- **الطلاقة**
- **الدقّة**

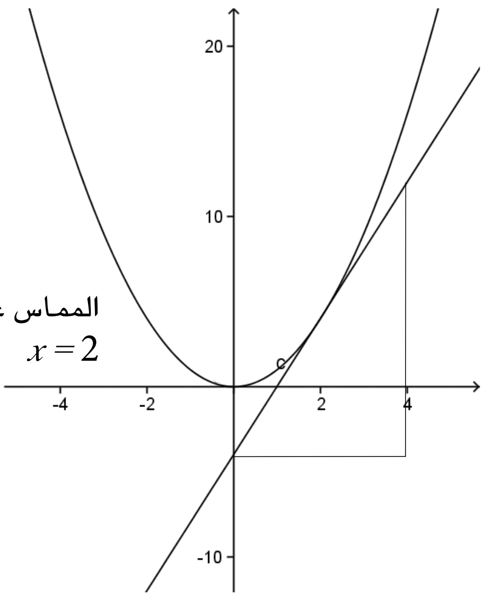
توصيات أسلوب التدريس

يمكن وضع الطلاب الموهوبين في مجموعات مناسبة.

إجابات الأسئلة

1. a. و b.

المماس عندما $x = 2$



القيمة الدقيقة للميل هي 4

.c و .d

يوضح الجدول التالي القيم الدقيقة. تعتمد القيم التي حصل عليها الطلبة على مدى دقة رسوماتهم.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$g(x)$ باستعمال المماس	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8

.e و .f

يوضح الجدول التالي القيم المحسوبة.

قيمة الميل مقربةً إلى أقرب منزلتين عشريتين

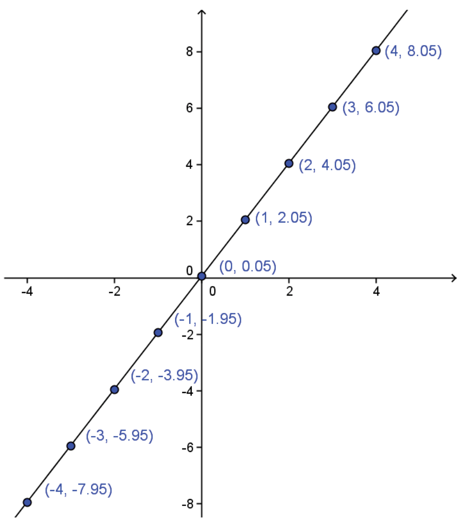
في الفقرة (e) هي

$$\frac{(2.05)^2 - 2^2}{2.05 - 2} = 4.05$$

وبنفس الطريقة يمكننا حساب بقية المقادير

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$g(x)$ باستعمال القطعة المستقيمة	-7.95	-5.95	-3.95	-1.95	0.05	2.05	4.05	6.05	8.05

.g

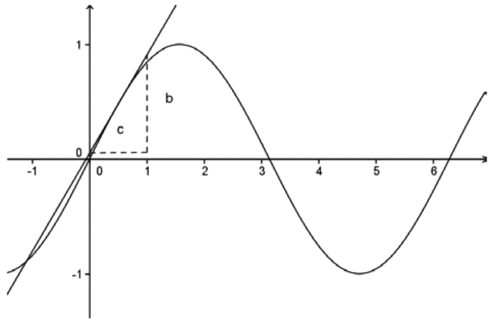


.*h* دالة الميل هي $g(x) = 2x$ قيم الميل لم تتغير على الإطلاق . لقد تم إزاحة الرسم إلى الأعلى بمقدار 6 وحدات لذا من المتوقع الحصول على نفس الميل.

.*i* يجب على الطلاب ملاحظة أن الحالة البسيطة للمستقيم يكون فيها الميل ثابتاً ويمكن قراءة ذلك مباشرة من الدالة.

وبالتالي فإن دالة الميل هنا هي $g(x) = 5$.

.2 a. و b.



يجب حساب القيم باستخدام قياسات دقيقة.

c. إلى f.

تعتمد نتائج الطلبة على مدى دقة رسمهم والقياسات التي قاموا بحسابها. ولمقارنة مدى دقة القيم التي توصلوا إليه فإن القيم الدقيقة باستخدام آلة حاسبة مقربة إلى 3 منازل عشرية بعد الفاصلة يمكن الإطلاع عليها في الجدول التالي.

حيث سيكون لدى الطلاب جدول يوضح قيم $g(x)$ الناتجة من حساب ميل المماس وكذلك من حساب ميل القطعة المستقيمة.

فرص التقويم

يعطي هذا النشاط الفرصة للطلبة لمعرفة مدى طلاقتهم في المهارات الأساسية للهندسة الإحداثية. لقد تم سؤال الطلاب إيجاد تقريب للميل بطريقتين مختلفتين (الرسم والحساب).

سيظهر الطلبة فهم رياضي جيد إذا لاحظوا ما يلي:

- عملية رسم المماس يدوياً تكون عرضةً لعدم الدقة.
- الحسابات المبنية على أجزاء صغيرة من المنحنى تكون أكثر دقة ، مع أنها لا توفر أكثر من تقريب للمماس المطلوب.
- يمكن الإستدلال على المماس الحقيقي عند نقطة من الحسابات التقريبية ، على الأقل في الدوال المذكورة هنا.

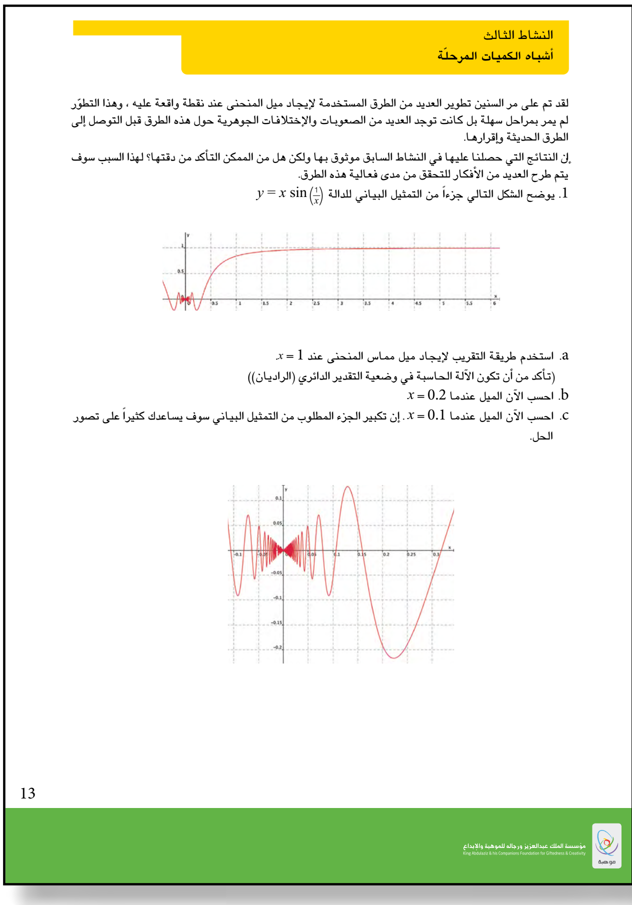
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$g(x)$	1	0.866	0.5	0	−0.5	−0.866	−1	−0.866	−0.5	0	0.5	0.866	1

g. إلى h.

يجب أن يتطابق التمثيل البياني لكل من الدالتين ويعتمد هذا على مدى دقة الطلبة في عمل التمثيل البياني لكل منهما.

لقد قام الطلاب في هذا النشاط باستكشاف دالة الميل لكل من $y = x^2$ و $y = \sin x$ ومقارنتها بدوال معروفة لديهم.

على الرغم من أنه لم يتم شرح أسباب وجود مثل هذه العلاقات في الوقت الحالي، فإنه ينبغي على الطلاب تقدير أهميتها وسيتم مراجعة ذلك في المستقبل.


النشاط الثالث
أشباه الكميات المرحلّة

لقد تم على مر السنين تطوير العديد من الطرق المستخدمة لإيجاد ميل المنحنى عند نقطة واقعة عليه ، وهذا التطوّر لم يمر بمراحل سهلة بل كانت توجد العديد من الصعوبات والإختلافات الجوهرية حول هذه الطرق قبل التوصل إلى الطرق الحديثة وإقرارها.

إن النتائج التي حصلنا عليها في النشاط السابق موثوق بها ولكن هل من الممكن التأكد من دقتها؟ لهذا السبب سوف يتم طرح العديد من الأفكار للتحقق من مدى فعالية هذه الطرق.

1. يوضح الشكل التالي جزءاً من التمثيل البياني للدالة $y = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

a. استخدم طريقة التقريب لإيجاد ميل مماس المنحنى عند $x = 1$.
(تأكد من أن تكون الآلة الحاسبة في وضعية التقدير الدائري (الراديان))
b. احسب الآن الميل عندما $x = 0.2$
c. احسب الآن الميل عندما $x = 0.1$. إن تكبير الجزء المطلوب من التمثيل البياني سوف يساعدك كثيراً على تصور الحل.

13

حول هذا النشاط

يعطي هذا النشاط الفرصة للطلاب لدراسة بعض المسائل التي واجهت علماء الرياضيات وكيفية حلها باستخدام طرق في الإشتقاق تم تطويرها حديثاً.

حيث ستعطي المهام الموجودة في هذا النشاط حس رياضي يساعد الطلاب على إدراك الحلول وكذلك تقدير بساطة وفعالية الطرق الحديثة. هناك نوعان من الأنشطة سيتم مناقشتهما بشكل موجز معتمدين في ذلك على بعض الأفكار الأساسية في الرياضيات. لقد استخدمنا في هذه الوحدة طريقة التقريب لحساب ميل مماس المنحنى عند نقطة التماس وذلك عن طريق أخذ زيادات صغيرة في قيمة x و $y = f(x)$ وبشكل أساسي نقوم بحساب قيمة المقدار $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ وذلك عندما تصبح قيمة Δx صغيرة جداً. حلول المهام مقنعة وتُعطي نتائج تنسجم بشكل كبير مع الطرق التجريبية مثل رسم المماس بالنظر ومن ثم حساب الميل.

وفي الحالات البسيطة مثل الدائرة نستطيع حساب القيمة الدقيقة للميل وبيان أن طريقة التقريب تُعطي نتائج قريبة من القيمة الدقيقة.

على الرغم من النجاح العملي في حساب الميل إلا أن هناك خطوة مهمة وبديهية في كل قيم الميل التي تم حسابها ففي الحقيقة نقول أن "الميل يقترب أكثر فأكثر من قيمة معينة وهذه القيمة هي التي نبحث عنها"

يوضح جدول النتائج في النشاط 1 هذا الحدس وهو موثوق فيه في بعض الأحيان. ومع ذلك لا يمكننا حساب النسبة $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ في حالة كان كل من المقدارين مساويا للصفر وبالتالي فإن طريقتنا في الحساب ستفشل في إيجاد القيمة المطلوبة.

خصائص الأداء المتقدم

- المقدرة على رؤية وجهات النظر البديلة.
- مرونة التفكير.
- فهم البرهان.
- فهم "الأفكار الكبيرة" ووضوح المفاهيم.
- التعميم.
- التخيل والقدرة فوق المعرفية.

توصيات أسلوب التدريس

يمكن سحب الطلاب الموهوبين وتنظيمهم في مجموعات مناسبة لتسهيل عملية المنافسة.

إجابات الأسئلة

1. تشتمل هذه المهمة على دوال ذات طبيعة معقدة خلافاً للدوال التي تم دراستها في الأنشطة السابقة.

والهدف من ذلك هو تنبيه الطلاب إلى أخذ الحيطة عند إيجاد الميل باستعمال طريقة التقريب، حيث سيكون هناك حالات تفشل فيها هذه الطريقة. فالقيم التي يسجلها الطلبة تعتمد على مدى دقة قياساتهم على المنحنى، والقيم الفعلية هي أكثر دقة مما يمكن أن يحصل عليه الطلبة.

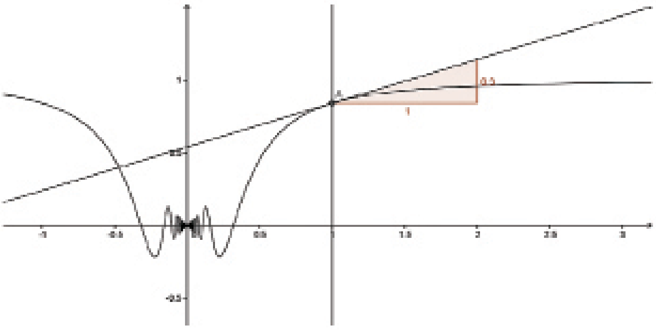
يمكن للطلبة استخدام أي طريقة تقريبية يرونها مناسبة لايجاد الميل كما يمكن قبول عمل نسخة من الأشكال الموجودة في الكتاب ومن ثم رسم مماس تقريبي لذلك.

يمكن استخدام تقنيات التمثيل البياني (مثل برنامج جيوجبرا) أو آلة حاسبة بيانية ومن ثم طباعة النتائج ورسم المماس التقريبي في هذه الحالة.

لقد قمنا باعطاء القيم الدقيقة للميل وذلك من أجل المقارنة.

يمكننا حساب المماس باستخدام برنامج جيوجبرا كما يلي:

- أدخل المعادلة $y = x * sin\ (1/x)$
- أدخل $x = 1$.
- اختر الأمر "تقاطع جسمين" ($Intersection$ $two\ objects$) ومن ثم اضغط على منحنى كل من الدالتين ليتم ايجاد النقطة الواقعة على $x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ عندما $x = 1$.
- اختر أمر **المماسات** ($Tangents$) وقم بالضغط على النقطة و الدالة.
- اختر أمر **الميل** ($Slope$) واضغط على المماس.
- سوف تشاهد الميل وقيمته $m = 0.3$.



a. القيمة الدقيقة للميل هي 0.301.

b. القيمة الدقيقة للميل هي 2.377 –

c. القيمة الدقيقة للميل هي 7.847.

d. سيكون لدينا بعض المشاكل والتي تكمن في أخذ قيمة صغيرة جدا للزيادات لأننا غير دقيقين إلى الآن في تحديد ما يعنيه صغيرة جدا.

فالتمثيل البياني للدالة يوضح مدى التعقيد الموجود في سلوك الدالة فاختيار قيم غير مناسبة لهذه الزيادات سوف يعطينا قيم غير صحيحة للميل.

يمكن للطلبة ومن خلال استخدام أحد برامج التمثيل البياني أو آلة حاسبة بيانية استكشاف سلوك الدالة بشكل سريع وذلك من خلال تكبير المنطقة القريبة من نقطة الأصل.

2. يتطلب التمرين التالي إعادة النظر في أحد المسائل المتعلقة بمفارقات زينو فالمسائل التي تم إفادتها تعتبر عميقة ومخادعة. مع أنه من المفترض أن يستمتع الطلبة في مناقشتها ولكن ليس من المفترض إيجاد الحلول. إذ أن الهدف من ذلك هو اكتساب فهم عميق للحاجة إلى أخذ الحذر عند تقسيم كميات مستمرة مثل المسافة والزمن وكذلك الحال عند النظر بتفصيل أكثر إلى مقاييس صغيرة للدوال. ليس لدينا هنا إجابة صحيحة محددة ولكن المطلوب هو إعطاء الطلبة الفرصة لإبداء آرائهم ومناقشتها. فالإستمرارية هنا هي المفتاح الرئيسي الذي هم بحاجة لمناقشته.

3. تعتبر طريقة نيوتن للتغير المستمر من أحد الطرق العميقة للتعرف على الإشتقاق. على الرغم من أن الطلبة لم يتعرفوا على التفاضل والتكامل بعد ، فإن بعض الأمثلة البسيطة على طريقة نيوتن ستكون مفيدة وستساعد الطلبة على فهم أعمق للمسائل التي يبحثونها.

المهمة:

من المؤكد وجود بعض الصعوبات في حل السؤال وتتمثل في أن فكرة النسبة النهائية غير مرضية. وسوف نتعرف بتفصيل أكثر في الأجزاء القادمة على هذه الصعوبات.

ولكن في الوقت الحالي فيُكتفى بتعرف الطلبة وفهمهم للأساسيات الكامنة خلف هذه الطريقة والتي تتمثل في أن قوى الزيادة h من الممكن إهمالها في حال كانت h قريبة من الصفر. يحتاج الطلاب إلى فك المقدار $(x+h)^3$ مع ملاحظة أن الحدود ذات القوى العالية في h يمكن إهمالها عند حساب مقدار النسبة النهائية.

$$\text{الميل} = \frac{y \text{ مقدار التغير في}}{x \text{ مقدار التغير في}}$$

$$= \frac{(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3) - x^3}{(x+h) - x}$$

$$= \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h}$$

سوف تتقلص هذه النسبة لتصبح $3x^2$ وبالتالي فإن ميل $y = x^3$ عند $x = 2$ هو 12

4. مع أن التطور في حساب التفاضل والتكامل أدى إلى تطوير علم الرياضيات والعلوم، ولكن سيحتاج الأمر إلى بعض الوقت حتى يتم إعتماد طرق أساسية تعتمد على أساس متين.

قد يحتاج الطلبة إلى المساعدة في فهم نقد بيركلي. فطريقة نيوتن تعتمد على إيجاد النسبة بين مقدارين يبدءان في التلاشي.

لقد قال بيركلي أن هذا العمل غير مبرر، فإما أن يكون المقدار h لايزال موجودا (وفي هذه الحالة لن نستطيع إيجاد القيمة الدقيقة للميل أو أن يكون المقدار h قد تلاشى (وفي هذه الحالة لن نستطيع حساب النسبة).

تم نشر **كتاب التحليل** (*Analyst*) بعد موت نيوتن ، لذا لن نستطيع معرفة رد نيوتن على هذا النقد.

ومع ذلك فإن الكثير من هذه الإنتقادات صحيحة، فهناك نوع من خفة اليد في فكرة نيوتن لحساب النسبة لمقدارين في طور التلاشي.

لقد برر نيوتن أفكاره من خلال بعض الحقائق الطبيعية. حيث أكد نيوتن على ذلك من خلال استخدامه ما سماه **بالطلاقة** (وتعني كميات تتغير بشكل سلس مثل المسافة والزمن والتي يمكن تمثيل العلاقة بينها بيانياً) فطريقة نيوتن سوف تعطينا الإجابات الصحيحة. ومع ذلك فإن نقد بيركلي كان له الأثر الأكبر فيما بعد لوضع حساب التفاضل والتكامل على أسس أكثر دقة.

وبإيجاز يمكننا تلخيص ذلك بأن نقول أن الطرق الحديثة لا تعتمد على التلاشي في الزيادات أو على أفكار نيوتن للتغير المستمر ولكن عوضا عن ذلك سيتم استخدام مفهوم النهايات والتي سيقوم الطلاب بدراستها قريبا.

5. نقدم أخيراً مثالاً توضيحياً للطلاب يشير إلى الصعوبات المحتملة عند دراسة سلوك الدالة من خلال مقياس صغير.

تعتبر دالة دريتشليت (*Dirichlet*) من الدوال غير المتصلة في جميع النقاط وقد تم اعتبار هذه الدالة لبيان سهولة تعريفها وعدم المقدرة على حساب الميل لها.

المهمة:

النقطة الأساسية هنا أن طبيعة عدم إتصال هذه الدالة يجعل من الإستحالة ايجاد قيم النهايات عند أي نقطة.

يجب على الطلاب محاولة تمثيل الدالة بيانياً وذكر أسباب عدم مقدرتهم على ذلك.

لمزيد من المعلومات حول طبيعة الدالة وخصائصها، يمكن للطلاب الإطلاع على الموقع التالي:

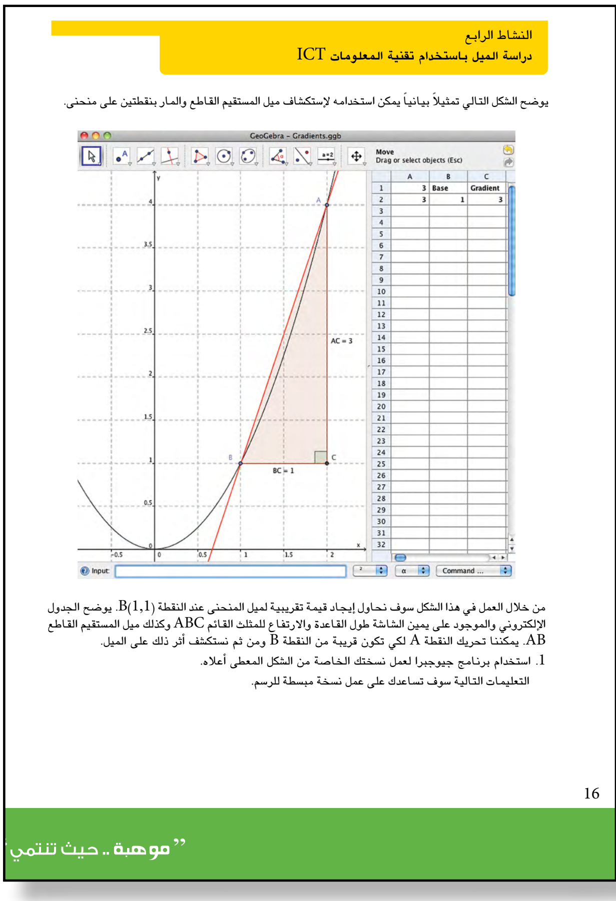
http://mathworld.wolfram.com/DirichletFunction.html

فرص التقويم

ينبغي أن يكون لدى الطلبة المقدرة على إثبات فهمهم للمسائل الرياضية الأساسية الموجودة في هذا النشاط وعلى الأخص تلك التي تم دراستها في المهمتين السابقتين.

كما وينبغي أن يكون التركيز على تقدير طبيعة الدوال المتصلة وكيفية ربطها بفكرة الإشتقاق.

النشاط الرابع: دراسة الميل باستخدام تقنية المعلومات ICT


النشاط الرابع
دراسة الميل باستخدام تقنية المعلومات ICT

يوضح الشكل التالي تمثيلاً بيانياً يمكن استخدامه لإستكشاف ميل المستقيم القاطع والمار بنقطتين على منحنى.

من خلال العمل في هذا الشكل سوف نحاول إيجاد قيمة تقريبية لميل المنحنى عند النقطة $B(1,1)$. يوضح الجدول الإلكتروني والموجود على يمين الشاشة طول القاعدة والارتفاع للمثلث القائم ABC وكذلك ميل المستقيم القاطع AB. يمكننا تحريك النقطة A لكي تكون قريبة من النقطة B ومن ثم نستكشف أثر ذلك على الميل.

1. استخدام برنامج جيوجبرا لعمل نسختك الخاصة من الشكل المعطى أعلاه.

التعليمات التالية سوف تساعدك على عمل نسخة مبسطة للرسم.

16

موهبة .. حيث تنتمي

حول هذا النشاط

يستخدم الطلبة في هذا النشاط برنامج جيوجبرا (أو أي برنامج آخر مشابه له) لاستكشاف تقريب ميل منحنى.

يستطيع برنامج جيوجبرا إنشاء مماس منحنى بطريقة تلقائية ولكننا في هذا النشاط سنقوم بعمل اللازم يدوياً وذلك من أجل استكشاف المبادئ الأساسية.

خصائص الأداء المتقدم

- **الإبداع** – تمثيل المسألة وربطها بمعرفة الطالب المسبقة.
- **التبصر في البنية الرياضية** – تقسيم المهمة إلى أجزاء وتقرير أفضل طريقة لحل كل جزء ومن ثم البدء في الحل.
- **التخطيط الإستراتيجي** – ربط الخبرات التعليمية الجديدة بالمعرفة المسبقة.

توصيات أسلوب التدريس

يمكن العمل بشكل فردي أو من خلال مجموعات ثنائية على أجهزة الحاسب.

إجابات الأسئلة

من الممكن عمل هذا النشاط باستخدام قلم رصاص وورق رسم. سوف نتوقع من الطلبة أن يقوموا بعمل تمثيل بياني لدالتين على الأقل بحيث تنطوي هذه الدالتين على مستويات مختلفة من الصعوبة والدقة. ولكن من الأفضل استعمال تقنيات التمثيل البياني في عمل هذه التمثيلات البيانية. من الأفضل أن يقوم المعلم بالتدرب بنفسه على برنامج جيوجبرا من خلال التعليمات الموجودة في كتاب الطالب حتى يكون لديه ثقة أكبر عند تعامله مع الطلبة في حل الأسئلة باستخدام البرنامج. وبشكل عام فإن استخدام برمجية جيوجبرا سوف يعطي كذلك ثقة أكبر لدى الطالب وسيزيد من سرعة الحل ومجابهة المشاكل الصغيرة وحلها من خلال إجراء المناقشات بين الطالب والمعلم.

1. إذا كان لدى الطالب معرفة باستخدام جيوجبرا فمن المحتمل أن يكون لديه المقدرة على انشاء التمثيلات البيانية بشكل مستقل. يفضل تقديم إرشادات الحل خطوة بخطوة.

3. إلى 4. e :

يجب أن يكون الجدول المحتوي على النتائج على الشكل التالي:

الإحداثي x للنقطة A	2	1.5	1.2	1.1	1.01	1.001
الإحداثي y للنقطة A	4	2.25	1.44	1.21	1.0201	1.002001
ميل BA	3	2.5	2.2	2.1	2.01	2.001

تقع منطقة الجبر (*Algebra*) في الجزء الأيسر من شاشة جيوجبرا والتي تُظهِر قائمة الإحداثيات والمعادلات للمنحنيات المرسومة. إذا لم تستطيع مشاهدة هذا الجزء فيمكنك الذهاب إلى قائمة **عرض** (*View*) واختر منها الأمر **عرض الجبر** (*Algebra View*).

من المهم في هذه الحالة تقريب الأعداد إلى خمسة منازل عشرية. لأنه عند تقليل مدى الدقة في الحساب فإن البرنامج سيعطينا تقدير للميل قيمته 2 عند اقتراب النقطة A من النقطة (1 , 1). سوف تلاحظ وجود علامة الإستفهام " ? " في قائمة عرض الجداول الإلكترونية والتي تعني عدم مقدرة البرنامج على الحساب.

4. f. يفضل أن يعمل الطلاب خلال الوقت المتبقي لهذا النشاط على عمل إصدارات تفاعلية من الرسوم البيانية الخاصة بهم والتي واجهتهم في هذه الوحدة. يعتبر من السهولة العمل على المهمة الأولى في قائمة المهام المقترحة وهي مناسبة للطلبة الذين ليس لديهم المقدرة الكافية على استخدام برمجية جيوجبرا. بينما تُعتبر المهمة الأخيرة أكثر إثارة للإهتمام ويمكن للطلبة الذين لديهم المعرفة الجيدة بالبرنامج البدء في حلها مباشرة بدون البدء في حل المهمتين الأولى والثانية.

إن العمل على انشاء التمثيلات البيانية خطوة بخطوة لا يُعد عملياً. لذا يجب على الطلاب تحميل البرنامج على الجهاز الخاص بهم والتدرب على هذه المهارات.

سيقوم الطلاب بتقديم أعمالهم إلى المجموعة بأكملها ومن ثم يجب أن يكون هناك مناقشة بين المجموعة لما تم انجازة ولتبادل الآراء وهذا بالتأكيد سيعطى نتائج جيدة من قبل المجموعة.

فرص التقويم

سوف يظهر الطلاب مدى ثقتهم باستخدام برنامج جيوجبرا وذلك لإنشاء نماذج تمثل الحالات التي واجهتهم في الأنشطة السابقة من هذه الوحدة. كما سيكون من المفيد إتاحة الوقت الكافي للطلاب لتطوير خبراتهم مع هذا البرنامج والذي سيستخدمونه في الوحدات القادمة.

الوحدة الثانية

الدوالّ الأسيّة والعلاقات

نظرة عامّة

سيكتشف الطلاّب في هذه الوحدة العلاقة بين التمثيل الجبري والتمثيل البيانيّ للدوالّ الأسيّة، وسيقومون أيضًا باستقصاء تأثير التحويلات الهندسيّة المختلفة على التمثيل الجبريّ والتمثيل البيانيّ لهذه الدوالّ.
وتتضمّن الوحدة اكتشاف سلوك التمثيلات الأسيّة، وسيكون لتقنيات التمثيل البيانيّ دور مهمّ في توضيح هذا النشاط.

الأهداف التعلمية للوحدة

- استقصاء العلاقة بين الصيغ الجبريّة للدوالّ الأسيّة وتمثيلاتها البيانيّة عند تطبيق مجموعة من التحويلات الهندسيّة.
- استكشاف طبيعة الدوالّ الأسيّة، ودراسة الشروط التّي تمثّل الدوالّ الأسيّة عندها مواقف مفيدة من واقع الحياة.

المعرفة السابقة

يتعيّن أن يفهم الطلاّب الدوالّ الأسيّة البسيطة وتمثيلاتها البيانيّة فهمًا جيّدًا، ويُدركوا كيفيّة تمثيل التحويلات الهندسيّة مثل، الانسحاب والتمدّد على هذه الدوالّ. كما يتعيّن أن يكون الطلاّب قادرين على استعمال إحدى تقنيات التمثيل البيانيّ مثل، Geogebra أو Autograph أو TI– nspire أو الحاسبة البيانيّة.

خصائص الأداء المتقدم

القيم والاتّجاهات والسمات

- الاستقصاء (النشاطان الأول والثاني)
- المجازفة (النشاط الأول)
- الإبداع (النشاط الرابع)

المهارات المتقدّمة

- ربط الرياضيّات بالواقع (النشاطان الثالث و الرابع)
- التبرير (النشاط الثاني)
- النمذجة (النشاط الثاني)

المعرفة والفهم المتقدّمان

- فهم البرهان (النشاط الرابع)

الخطّة الزمنيّة

ستّ ساعات تقريبًا

المصادر

- ورق رسم بيانيّ.
- تقنية تمثيل بياني.

حول هذه الوحدة

الأهدافُ التعلميّةُ للوَحدةِ

- استقصاء العلاقة بين الصيغ الجبريّة للدوالّ الأسيّة وتمثيلاتها البيانيّة عند تطبيق مجموعة من التحويلات الهندسيّة على التمثيلات البيانيّة.
- استكشاف طبيعة الدوالّ الأسيّة، ودراسة الشروط التّي تمثّل عندها الدوالّ الأسيّة مواقف مفيدة من واقع الحياة.

سوف تستقصي في هذه الوحدة، الدوالّ الأسيّة، وستبحث في العلاقة بين الصيغ الجبريّة لهذه الدوالّ وتمثيلاتها البيانيّة بوساطة تمثيل منحنيات هذه الدوالّ بيانياً، كما ستتعامل مع بعض تطبيقات الدوالّ المثلّثيّة التّي تستعمل لتمثيل مواقف من واقع الحياة.

لا بدّ لك من استعمال تقنية تمثيل بياني لاستكشاف الدوالّ الأسيّة، وتمثيلها بشكل دقيق.

النشاط الأول
الدوالّ الأسيّة

الدوالّ الأسيّة هي دوالّ على الصورة $f(x) = a^x$.

فمثلاً، الدوالّ $y = 2^x, f(x) = 0.5^x, y = 3^{-x}, g(x) = 10^{2x}, h(t) = 2^t, z = 8^{(w-1)}$ جميعها دوالّ أسيّة.

لنبدأ البحث في الدالّة الأسيّة البسيطة $y = 2^x$. يسمّى العدد (2) في هذه الدالّة الأساس، و تسمّى x الأسّ. لاحظ أنّ قيم هذه الدالّة y تزداد بشكل متسارع مع زيادة الأسّ x.

1. كوِّن جدولاً لقيم الدالّة $y = 2^x$ في الفترة $-8 \le x \le 8$.

a. مثِّل النقاط التّي حدّدتها في جدولك على ورقة رسم بيانيّ بأبعاد مناسبة، ثمّ مثِّل الدالّة $y = 2^x$ بيانياً.

b. استعمل حاسبة بيانيّة لتمثيل الدالّة $y = 2^x$ بيانياً على الفترة نفسها، للتحقّق من إجابتك في (a).

c. استعمل حاسبة بيانيّة لتمثيل الدوالّ $y = 2^x, y = 3^x, y = 10^x$ بيانياً في المجال نفسه.

d. أضف تمثيليْ الدالّتيْن $y = 3^x, y = 10^x$ على الورقة نفسها التّي استعملتها لتمثيل $y = 2^x$ دون استعمال جدْول قيم، ثمّ أضف تمثيليْ الدالّتيْن $y = 5^x, y = 12^x$.

e. تحقّق من إجابتك باستعمال تقنية تمثيل بياني.

f. اكتب فقرةً تصف فيها الخصائص الأساسيّة للدوالّ الأسيّة عندما يكون الأساس عددًا صحيحًا موجبًا، من حيث الشكل العامّ، والصفات المشتركة، وكيفيّة تغيّر قيم y عند تغير قيم x. ثمّ قارن بين أشكال المنحنيات لقيم مختلفة للأساس.

20

"موهبة .. حيث تنتمي"

خصائص الأداء المتقدم

- الاستقصاء: يتعيّن على الطلاّب الاهتمام باستكشاف الدوالّ الأسيّة بهدف فهم طبيعة هذه الدوالّ وتنوّعها.
- المجازفة: تنتج الدوالّ $y = (-a)^x$ نتائج ملفته للنظر، إذ لا يبدو تمثيلها البياني كما هو متوقّع؛ لذا يحتاج الطلاّب إلى الثقة في توضيح هذه النتيجة.

توصيات أسلوب التدريس

العمل الثنائيّ: لابدّ من تشجيع الطلاّب على مناقشة فهمهم، ثمّ العمل على نحو فرديّ لإيجاد الحلّول، ومن ثمّ مناقشتها مع زملائهم بعد ذلك.

حول هذا النشاط

صُمِّم هذا النشاط كي يتمكّن الطلاّب من تمثيل بعض الدوالّ الأسيّة تمثيلاً يدويّا على ورق رسم بيانيّ، بهدف كسب الثقة في التعامل مع هذا النوع من الدوالّ. ويتعيّن على الطلاّب مقارنة تمثيلاتهم البيانيّة اليدويّة بتلك الناتجة عن تقنيات التمثيل البياني بهدف كسب الثقة في التمثيلات الناتجة عن تقنيات التمثيل البياني.

يتعين على الطلاّب تمثيل مجموعة من الدوال الأسية بشكل سريع ودون اللجوء إلى تعيين نقاط، وعليهم كذلك استكشاف العلاقة بين $y = a^x$ و $y = (-a)^x$.

إجابات الأسئلة

1 .a

x	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64	128	256

b. الى e. لا توجد إجابات حيث تؤكّد التمثيلات البيانيّة والورقيّة إحداهما الأخرى.

f. يتعيّن على الطلّاب تضمين فقراتهم الخصائص العامّة مثل: سرعة ازدياد قيم الدالّة لقيم $x > 0$، وازدياد حدّة المنحنى بزيادة الأساس، واقتراب المنحنى من محور x مع ازدياد القيمة المطلقة لقيم $x < 0$، ومرور منحنيات جميع الدوالّ الأسيّة في النقطة $(0, 1)$.

2.a. يتعيّن على الطلّاب توضيح ملاحظاتهم المتعلّقة بالأعداد التخيليّة. كما يتعيّن عليهم استعمال تقنية تمثيل بياني، ومن ثمّ كتابة ملاحظاتهم.

b. ستختلف إجابات تقنية التمثيل البيانيّ، ويتعيّن على الطلّاب اكتشاف مخرجات مختلفة، حيث سيحصل بعض الطلّاب على استجابات تشير إلى خطأ الحسابات إن كانت تقنية التمثيل البيانيّ مضبوطة على الأعداد الحقيقيّة. لذا؛ فإنّه يتعيّن على الطلّاب تغيير ضبط تقنية التمثيل البيانيّ على الأعداد التخيُّلية.

c. انظر a.

d. يتعيّن على الطلّاب استكشاف عدّة حالات؛ مثل الحالات التّي يكون فيها الأساس عددًا كسريًّا، أو عددًا غير نسبيّ، ويتعيّن عليهم ملاحظة أنّ جميع الأساسات الموجبة تنتج منحنيات، مع تقديم أمثلة لحالات مختلفة.

3. $f(x) \to -f(x)$

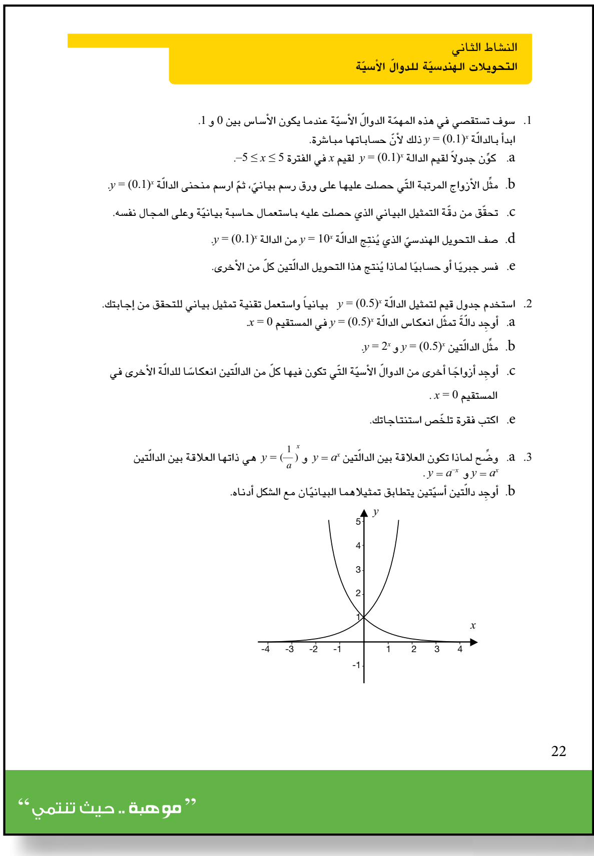
4. $f(x) \to f(x) + b$

5. يتعيّن على الطلّاب ملاحظة أنّ الدالّة الجديدة ليست معرّفة عندما $x < 0$، وأنّ المستقيم $x = 0$ يمثّل خطّ تقارب عموديّ للدالّة الجديدة. كما يتعيّن ملاحظة أنّ $f(x) \to \infty$ عندما $x \to \infty$ إلاّ أنّ هذا الاقتراب بطيء نسبيًّا. ثمّ يتعيّن عليهم إيجاد بعض النقاط على المنحنى الجديد مثل $(0,1), (2,1)$ و $(4,2), (8,3), \dots$؛ الأمر الذي سيلفت انتباههم إلى أنّ الدالّة هي $log_2 x$، وذلك بسبب أنّ الدالّتين $log_2 x$ و 2^x دالّتان عكسيّتان.

فرص التقويم

تهيّئ هذه الوحدة فرصة جيّدة لتقويم طلاقة الطلّاب في التعامل مع الصيغ الجبريّة والتمثيلات البيانية للدوالّ، وكذلك تقويم قدرتهم على استعمال تقنيات التمثيل البيانيّ لتوضيح أعمالهم.

وستُظهر استجابة الطلّاب لجميع أجزاء الوحدة، مدى فهمهم للدوالّ الأسيّة. وسيمنح استعمال تقنيات التمثيل البيانيّ للتحقّق من التمثيلات البيانيّة الطلّاب فرصة تقويم أعمالهم ذاتيًا؛ الأمر الذي ينمّي ثقتهم ويضمن استقلاليّة الحلّ.



النشاط الثاني

التحويلات الهندسيّة للدوالّ الأسيّة

1. سوف تستقصي في هذه المهمّة الدوالّ الأسيّة عندما يكون الأساس بين 0 و 1.
ابدأ بالدالّة $y = (0.1)^x$ ذلك لأنّ حساباتها مباشرة.
    a. كوِّن جدولاً لقيم الدالة $y = (0.1)^x$ لقيم x في الفترة $-5 \leq x \leq 5$.
    b. مثِّل الأزواج المرتبة التّي حصلت عليها على ورق رسم بيانيّ، ثمّ ارسم منحنى الدالّة $y = (0.1)^x$.
    c. تحقّق من دقّة التمثيل البياني الذي حصلت عليه باستعمال حاسبة بيانيّة وعلى المجال نفسه.
    d. صف التحويل الهندسيّ الذي يُنتِج الدالّة $y = 10^x$ من الدالة $y = (0.1)^x$.
    e. فسر جبريًا أو حسابيًا لماذا يُنتج هذا التحويل الدالّتين كلّ من الأخرى.

2. استخدم جدول قيم لتمثيل الدالّة $y = (0.5)^x$ بيانياً واستعمل تقنية تمثيل بياني للتحقق من إجابتك.
    a. أوجِد دالّةً تمثّل انعكاس الدالّة $y = (0.5)^x$ في المستقيم $x = 0$.
    b. مثِّل الدالّتين $y = (0.5)^x$ و $y = 2^x$.
    c. أوجِد أزواجًا أخرى من الدوالّ الأسيّة التّي تكون فيها كلّ من الدالّتين انعكاسًا للدالّة الأخرى في المستقيم $x = 0$.
    e. اكتب فقرة تلخّص استنتاجاتك.

3. a. وضِّح لماذا تكون العلاقة بين الدالّتين $y = a^x$ و $y = (\frac{1}{a})^x$ هي ذاتها العلاقة بين الدالّتين $y = a^x$ و $y = a^{-x}$.
    b. أوجِد دالّتين أسيّتين يتطابق تمثيلاهما البيانيّان مع الشكل أدناه.

22

"موهبة .. حيث تنتمي"

حول هذا النشاط

سيمثّل الطلاّب في هذا النشاط زوجين من الدوالّ الأسيّة يرتبطان ببعضهما من خلال انعكاس؛ ونظرًا لأنّ هذا التمثيل غير متوقّع فإنّه يتعيّن على الطلاّب استكشاف هذه الحقيقة بأنفسهم. كما يتعيّن عليهم البدء بتمثيل الدوالّ يدويًّا لتكوين فرصة أوليّة، ثمّ سيختبر الطلاّب هذا الافتراض في المهمّة الثانية باستعمال تقنية تمثيل بياني. وتمنح المهمّة الثالثة الطلاّب الفرصة للعمل في اتّجاه عكسيّ، حيث سيتعاملون مع زوجين من الدوالّ الأسيّة لإيجاد الصيغ الجبريّة لهذه الدوالّ.

خصائص الأداء المتقدم

- الاستقصاء: يتعيّن على الطلاّب إنشاء مجموعة بيانات لإيجاد العلاقة بين الدوالّ.
- التبرير: يتعيّن على الطلاّب توضيح سبب أنّ التحويل $a^x \rightarrow a^{-x}$ يمثّل انعكاسًا في محور y.

توصيات أسلوب التدريس

يتعيّن على الطلاّب العمل على نحو فرديّ لإيجاد التمثيل البياني الأوّل، ثمّ العمل على نحو ثنائيّ لتطوير فرضيّة واختبارها باستعمال تقنية تمثيل بياني. كما يتعيّن على الطلاّب اختبار تبريراتهم شفويًّا في مجموعات ثنائية، وتشجيعهم على استعمال تقنية التمثيل البياني لاختبار إجاباتهم، بدلاً من الاعتماد على المعلّم.

إجابات الأسئلة

.1 .a

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	100000	10000	1000	100	10	1	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001

b. و c. لم يتم إضافة إجابات حيث تؤكّد تقنية التمثيل البيانيّ المستعملة صحة التمثيل البياني المستعملة صحة التمثيل البياني على الورقة والعكس.

d. يمثّل المنحنيان انعكاسًا في المحور y.

e. يتوقّع من الطلاّب كتابة عبارات شبيهة بالعبارة
$$(0.1)^x = (\frac{1}{10})^x = \frac{1}{10^x} = 10^{-x}$$

.2 .a $y = 2^x$.

b. و c. يتعيّن إظهار تسمية الأشكال بصورة كاملة.

d. يتعيّن تضمين التوضيح خصائص الانعكاس التّي لوحظت في السؤال الأول e وكلمات تصف تأثير
$a^x = (\frac{1}{a})^{-x}$.

.3 .a $(\frac{1}{a})^x = a^{-x}$

b. لقد تمّ إنشاء الشكل باستعمال الدالّتين $y = 3^x$ و$y = 3^{-x}$، إلاّ أنّه من الممكن إنشاؤه باستعمال الدالّتين $y = (\frac{1}{3})^x$ و$y = (\frac{1}{3})^{-x}$ على التوالي.
وفي الواقع، يمكن استعمال أساس مختلف عن العدد 3.

.4 .b تمثّل العلاقة تمدداً معامله 2 في اتّجاه المحور y.

.5 .b g و h، انسحابان من خلال المتّجهين $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}$ على الترتيب للدالّة f.

6. يتعيّن تضمين التقرير مختصرًا كاملاً عن العمل في هذا النشاط والنشاطين 3 و 4، ووصفًا للتمدد والانسحاب والانعكاس على نحو كامل، كما يتعيّن أن يتضمّن تأثير الحالة $a \leq 0$.

فرص التقويم

يتعيّن على الطلاّب شرح تعاميمهم شفويًّا وكتابيًّا، حيث يمكن تقويمهم من خلال وضوح شرح تبريراتهم للمعلّم، كما يتعيّن أن تُظهر أعمالهم تعابير ومفردات رياضيّة صحيحة.

النشاط الثالث: خدمة توصيل الوجبات

النشاط الثالث

خدمة توصيل الوجبات

افتُتح مطعم للوجبات السريعة في منطقتك، ويحرص مدير المطعم على توصيل الوجبات ساخنة إلى الزبائن، لذا قرّر الاسترشاد برأيك بصفتك خبيرًا في الرياضيّات لمعرفة الزمن الذي تحافظ فيه الوجبة على درجة حرارتها بعد إعدادها.

سوف يستعمل عامل المطعم درّاجة ناريّة لتوصيل الوجبات، وذلك بسرعة متوسّطها 30km/h. فإذا كان الزمن اللازم لبقاء الوجبة ساخنة معروفًا، فإنّ بإمكان الإدارة تحديد الأماكن التّي من الممكن أن توصل إليها الوجبات السريعة إلى الزبائن. لذلك؛ قامت الإدارة بعمل مسح إحصائيّ لزبائن المطعم، فتبيّن أنّ درجة حرارة 48° هي أقلّ درجة حرارة مقبولة للوجبة.

وبصفتك خبيرًا رياضيًّا، قرّرتَ القيام بتجربة لإيجاد المعدّل الذي تبرد فيه الوجبة، فأخذتَ وجبةً بعد إعدادها مباشرةً ووضعتَها في صندوق توصيل يحتوي ثقبًا؛ للتمكّن بوساطته من قياس درجة الحرارة، وقمت بقياس درجة الحرارة فور إعداد الوجبة، ثمّ قياسها كلّ دقيقة، وعلى مدار عشر دقائق، فكانت النتائج كما هي مبيّنة في الجدول أدناه:

الزمن (دقيقة)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
درجة الحرارة (C°)	86.12	84.21	82.36	80.57	78.83	77.14	75.50	73.91	72.36	70.87	69.43

1. على فرض أنّك تركت الوجبة في صندوق التوصيل لفترة زمنية طويلة:
   – كم تبلغ درجة الحرارة المتوقعة للوجبة بعد (i) 30 دقيقة، (ii)ساعتين، (iii) 24 ساعة، على التوالي.
2. مثِّل الأزواج المرتبة الظاهرة في الجدول بيانياً، وارسم منحنى أفضل دالة خطية $f(t)$ تمثّل هذه البيانات، ثمّ أوجدْ الدالة .
3. استعمل الدالّة $f(t)$ لحساب الزمن اللازم كي تصل درجة حرارة الوجبة إلى 48° درجة.
4. سنختبر الآن مناسبة هذا النموذج لوصف البيانات:
   استعمل الدالّة $f(t)$ لحساب درجة الحرارة بعد (i) 30 دقيقة، (ii)ساعتين، (iii) 24 ساعة،على التوالي. ثمّ قارن إجاباتك بتلك الإجابة التيّ حصلت عليها في المهمة 1، ثمّ اكتب تعليقًا على خصائص الدالّة $f(t)$ التّي لا تجعلها أفضل نموذج لوصف درجة الحرارة.
5. استعمل طريقة جبرية لإيجاد دالّة تربيعيّة $g(t)$ تَصِف البيانات المعطاة ثمّ استعمل برمجية حاسوبية للتحقق من إجابتك. بيّن لماذا لا تكون الدالّة $g(t)$ أفضل نموذج لوصف درجة الحرارة كما في (4).
6. ينصّ قانون نيوتن للتبريد على أنّ درجة حرارة الوجبة تتبع نموذجًا أسيًّا.
   استعمل معلوماتك حول الدوالّ الأسيّة لإيجاد النموذج الأسيّ $h(t)$ ، ثمّ تحقّق من هذا النموذج باستعمال توقّعاتك في الواجب الأوّل لحساب الزمن اللازم كي تصل درجة حرارة الوجبة إلى 48° درجة، وبناءً على ذلك، جدْ نصف قطر المنطقة الدائريّة التّي يمكن أن يخدمها المطعم.

24

”موهبة .. حيث تنتمي“

حول هذا النشاط

لابدّ من تشجيع الطلّاب لتطوير هذا النشاط إلى ما يشبه نموذجًا تجاريًّا، آخذين في الحسبان أنواع الوجبات المختلفة، والأشكال المختلفة للصناديق، ووسائل النقل، وطبيعة منطقة التوصيل التّي قد لا تكون دائريّة في التطبيق العمليّ.

خصائص الأداء المتقدم

- ربط الرياضيّات بالواقع: يتعيّن على الطلّاب في هذا النشاط نقد الرياضيّات بناءً على معرفتهم بكيفية برودة الوجبات.
- النمذجة: يتعيّن على الطلّاب التعامل مع نموذج بسيط متعارف عليه، ونقد المعرفة المستعملة فيه، ومن ثمّ يمكنهم التعامل مع نماذج أكثر تطوّرًا.

توصيات أسلوب التدريس

العمل في مجموعات: يتعيّن على الطلّاب العمل في مجموعات لمشاركة الأفكار ومناقشتها. ويتوقّع من الطلّاب إجراء التجارب بأنفسهم؛ الأمر الذي يتطلّب توفير مجموعة من الوجبات الطازجة، وميزان حرارة يستعمله الطلّاب لقياس درجة حرارة الوجبات. ولابدّ من تشجيع الطلّاب على التعامل مع هذه المسألة كما لو أنّها مشروع، وكتابة تقرير كما لو كانوا مستشارين في هذا المشروع، واستخلاص استنتاجاتهم على أساس تجاريّ.

إجابات الأسئلة

تعتمد دقّة هذه المهمّة اعتمادًا قويًّا على تقنية التمثيل البيانيّ المستعملة؛ إذ يمكن يدويًّا إنتاج نماذج خطيّة مقبولة، إلاّ أنّه يصعب إيجاد النماذج التربيعيّة والأسيّة على نحوٍ دقيق.

لذا؛ ستُقبل الإجابات التقريبيّة، وسيتمّ نقد كلّ من النموذجين الخطيّ والتربيعيّ.

يتوقّع أن يحصل الطلاّب على نموذج دقيق يمثل البيانات في المهمّة الأولى، وذلك إن تمكّنوا من استعمال تقنية تمثيل بياني دقيقة.

1. يبرد الطعام بمعدّل يقلّ بقليل عن 2° في الدقيقة؛ لذا نتوقّع أن تصل درجة حرارته 30° بعد 30 دقيقة. وسيصل درجة حرارة الغرفة وهي عادةً 22° بعد ساعتين، ثمّ بعد 24 ساعة مرّة أخرى. وبإمكانك اختيار قيمة أخرى لدرجة حرارة الغرفة حسب البيئة التّي تعيش فيها.
2. تمثّل المعادلة $f(x) = -1.7x + 86$ نموذجًا خطيًّا تقريبيًّا للبيانات.
3. سيكون الزمن التقريبيّ 22.4 دقيقة باستعمال النموذج في المهمّة الثانية.
4. مرّةً أخرى، باستعمال النموذج المُعطى:

   35° (ii) -118° (iii) -2362°

   يُظهر النموذج الخطيّ تناقصًا مستمرًّا في درجة الحرارة، تصل إلى أبعد من نقطة التجمّد.

   إلاّ أنّنا نعرف أنّ الطعام سيبرد إلى أن يصل درجة حرارة الغرفة، وأنّه لن يبرد أكثر من ذلك.
5. تمثّل المعادلة:

   $$g(x) = 0.02x^2 - 1.9x + 86$$

   نموذجًا تربيعيًّا تقريبيًّا للبيانات ويمكن الحصول عليها بتعويض الأزواج المرتبة $(0, 86), (5, 77), (10, 69)$ في الصيغة العامة للمعادلة التربيعية $y = ax^2 + bx + c$. وسيعطي هذا النموذج درجات الحرارة:

   (i) 52° (ii) 218° (iii) 49190°

   لاحظ أنّ النموذج التربيعيّ يقترح أنّ درجة حرارة الطعام ستبدأ بالزيادة مرّة أخرى إلى أن تصل إلى درجات حرارة مرتفعة جدًّا.

   يمكن كذلك استعمال برمجية جيوجبرا لإيجاد هذا النموذج.

التعليمات التاليةسوف تساعدك في ذلك:

- افتح صفحة جديدة في برنامج جيوجبرا.
- اختر **جدول الكتروني** (Spreadsheet)من قائمة **العرض** (View) .
- قم بإدخال قيم الزمن في العمود A، وقيم درجات الحرارة المناظرة لها في العمود B .
- قم بتظليل الخلايا التي تحتوي القيم التي أدخلتها وذلك بسحب مؤشر الشاشة فوقها.
- اختر الأمر (Tow Variable) (Regression Analysis) من قائمة المهام أعلى الشاشة.
- اضغط على أيقونة **تحلل** (Analyze) في مربع الحوار الذي يظهر بعد ذلك.
- اختر **تحلل** (Polynomial) من قائمة **نموذج الانحدار** (Regression Model) التي تظهر أسفل الشاشة.

6. تمثّل المعادلة:

   $$h(x) = 1.03^{-1.02(x-138)} + 22$$

   نموذجًا أسيًّا للبيانات.

   وسيعطي هذا النموذج درجات الحرارة

   (i) 48° (ii) 23.7° (iii) 22°

   وتوصف هذه النتائج بأنّها منسجمة مع توقّعاتنا.

   بحسب هذا النموذج، فإنّ درجة حرارة الطعام ستصل إلى 48° بعد 30 دقيقة، وتعدّ هذه النتيجة أفضل لإدارة المطعم من نتيجة النموذج الخطيّ. لذا؛ إذا كان معدّل سرعة الدراجة النارية التي تستعمل لتوصيل الوجبات 30 km/h، فإنّ بإمكان الدراجة النارية تغطية منطقة نصف قطرها $0.5\text{hr} \times 30\text{km/hr} = 15\text{km}$.

فرص التقويم

يتعيّن على الطلاّب محاولة إيجاد نماذج بدقة عالية، وبناءً عليه، يمكن النظر إلى دقة النموذج بأنّها نقطة أساسيّة في التقويم. ويحتاج الطلاّب إلى الثقة في نقد نماذجهم حسب الواقع، وبناءً عليه يتعيّن تقويم نقدهم.

كما يمكن للطلاّب تقديم تقارير موجزة حول استنتاجاتهم للمساعدة في عمليّة التقويم.

النشاط الرابع
مقادير كبيرة جدًّا

ستتعامل في هذا النشاط مع ثلاث مسائل تقليديّة تحتوي نموذجًا أسيًّا.

1. برج هانوي هو إحدى الأحاجي التّي اقترحها الرياضيّ الفرنسيّ لوكاس عام 1883م، حيث افترض وجود ثلاثة أعمدة، يحتوي العمود الموجود على أحد الطرفين 64 قرصاً مرتّبة فوق بعضها بعضًا، بحيث يكون كلّ قرص أصغر من القرص الذي دونه؛ لتكوّن شكلاً هرمياً. المطلوب هو نقل هذه الأقراص واحداً تلو الآخر إلى عمود آخر شريطة ألاّ يوضع قرص فوق قرص أصغر منه ، لنحصل في النهاية على الترتيب نفسه في عمود آخر. تعتقد الأحجية أنّه من المستحيل إنجاز هذه المهمّة؛ في أي زمن مهما كان طويلاً.

يتعيّن عليك استقصاء هذه الأحجية بإيجاد أقلّ عدد من الحركات المطلوبة لإنجاز المهمّة لعدّة خيارات من عدد الأقراص. توصّل إلى قاعدة لعدد هذه الحركات، ثمّ برهن صحّة القاعدة التّي توصّلت إليها، واستعملها لإيجاد عدد الحركات المطلوبة لنقل 64 قرص. بإمكانك إيجاد الزمن اللازم لإنهاء العمليّة إن قدّرت الزمن اللازم لنقل قرص واحد.

2. إذا طويتَ ورقةً من منتصفها، ثمّ طويتَ القطعة الناتجة من منتصفها أيضًا، وكرّرت ذلك عدّة مرّات، ما عدد الطيّات الممكنة للورقة؟

لاحظ أنّ ذلك يعتمد على سُمك الورقة، لذا؛ قُصّ الورقة بدلاً من طيّها. ثمّ قصّ الورقة من النّصف وضع جزأيْ الورقة فوق بعضهما، وقصّ الناتج من النصف، ثمّ ضع الأجزاء الأربعة فوق بعضها، وهكذا. كم مرّةً تستطيع قصّ الورق؟ كم سيصل ارتفاع قطع الورق؟ كم مرّةً ستحتاج لقص الورقة كي يصبح ارتفاع الورق مماثلاً لارتفاع الغرفة؟ أو مماثلاً لارتفاع البناية التّي تسكنها؟ أو مماثلاً لارتفاع أعلى بناية في العالم؟ أو بُعد القمر؟ هل من الممكن فعل هذا؟ فسّر إجابتك.

3. يُحكى أنّ خادمًا قدّم خدمة عظيمةً لملك إحدى الدول الغنيّة، فسأل الملك الخادم عن المكافأة التّي يطلبها. فأجاب الخادم "أريد حبّة أرز مقابل أوّل مربّع على لوح الشطرنج، وحبّتين مقابل المربّع الثاني، وأربع حبّات مقابل المربّع الثالث، وهكذا إلى أن تنتهي جميع مربّعات اللوح". فابتهج الحاكم، معتقدًا أنّها مهمّة سهلة، لكنّ الحاكم لم يستطع تحقيق طلب الخادم!

أوّلاً، احسب عدد حبّات الأرز المطلوبة لإنجاز المهمّة. سيكون الناتج عددًا كبيرًا جدًّا، ولكن، كم سيكون هذا العدد المتوقّع ؟ كم عدد أكياس الأرز المطلوبة؟ وكم هو كبير هذا العدد؟ كم وزن الأرز المطلوب؟ كيف ستُنقل هذه الكميّة من الأرز؟ كم المدّة الزمنيّة التّي تحتاجها زراعة هذه الكميّة من الأرز؟

25

حول هذا النشاط

يتضمّن هذا النشاط ثلاث مسائل تقليديّة تُنتج أعدادًا كبيرةً جدًّا. ويتعيّن على الطلاّب في المهمّة الأولى إيجاد قاعدة وطريقة لبرهان صحّتها بصورة عامّة. أمّا في المهمتين 2 و 3، فإنّه يتعيّن على الطلاّب التعامل مع كميّات كبيرة جدًّا على نحو يمكّنهم من استخلاص بعض الاستنتاجات العمليّة المتعلّقة بهذه الكميّات، إذ لابدّ من تشجيعهم للنظر في مسائل مثل، سُمك الورقة، ومساحتها السطحيّة في المهمّة 2، ووزن وحجم الأرز، والإنتاج العالميّ من الأرز في المهمّة 3.

سيتمكّن الطلاّب من استقصاء عدّة جوانب مرتبطة بكلّ مسألة، وعندها يمكن للطلاّب كتابة تقارير تلخّص النتائج التّي توصّلوا إليها.

خصائص الأداء المتقدم

- ربط الرياضيّات بالواقع: يتعيّن على الطلاّب تقدير الكميّات الكبيرة الناتجة عن الدوالّ الأسيّة.
- الإبداع: يتعيّن على الطلاّب تطوير أسئلتهم والبحث فيها، وأن يأخذوا دورًا إبداعيًّا في استقصاء الموضوعات الرئيسة.
- فهم البرهان: يتعيّن على الطلاّب تطوير برهان للقاعدة التّي تمّ إيجادها لبرج هانوي.

توصيات أسلوب التدريس

يتعيّن على الطلاّب العمل في مجموعات صغيرة، ويفضّل أن تكون مجموعات ثلاثيّة، بحيث تخصّص المهمّة لكلّ فرد من أفراد المجموعة؛ كي تكون مساهمات كلّ منهم واضحة تمامًا.

إجابات الأسئلة

1. يبيّن الجدول الآتي أصغر عدد ممكن من الحركات في عدّة حالات.

عدد الأقراص	أقل عدد ممكن من الحركات
1	1
2	3
3	8
4	15
5	31
n	$2^n - 1$
64	$2^{64} - 1 \simeq 1.8 \times 10^{19}$

يمكنك برهان الصيغة $u_n = 2^n - 1$ من خلال ملاحظة أنّك عند إضافة قرص واحد ستحرّك جميع الأقراص السابقة، ثمّ تحرّك القرص الجديد، ثمّ تحرّك جميع الأقراص السابقة مرّة أخرى. أيْ أنّ $u_{n+1} = 2u_n + 1$. وبالاستقراء نجد أنّ $u_1 = 2^1 - 1 = 1$، أيْ أنّ القاعدة تكون صحيحة عندما $n = 1$. افرض صحّة القاعدة لـِ u_n، وبرهن صحّتها لـِ $u_{n+1} = 2^{n+1} - 1$.

من المعلوم أنّ $u_{n+1} = 2u_n + 1$ ؛ لذا فإنّ:

$$u_{n+1} = 2 \times (2^n - 1) + 1$$
$$= 2^{n+1} - 2 + 1$$
$$= 2^{n+1} - 1$$

وبهذا يكتمل البرهان.

فإذا كان نقل القرص الواحد يحتاج إلى ثانيتين، فإنّ ذلك يعني أنّه يلزم 1.2 تريليون سنة تقريبًا لإنجاز المهمّة .

2. يمكن طيّ الورقة العاديّة بمعدّل 6 أو 7 طيّات.

افرض أنّ سُمك الورقة 0.1 مليمتر، فإنّ سُمك مجموعة الورق بعد العمليّة n هو 0.0001×2^n مترًا. لذا؛ إذا كان ارتفاع الغرفة 3 أمتار، فإنّنا بحاجة إلى قصّ الورقة 12 مرّة.

يبلغ ارتفاع برج خليفة في دبي 828 مترًا وهو الأعلى في العالم. عندها سنحتاج إلى قصّ الورقة 20 مرّة. وللوصول إلى القمر الذي يبعد عن الأرض بمقدار 38440km فإنّنا نحتاج قصَّ الورقة 39 مرّة. ويتعيّن على الطلاّب التحقّق من الآثار غير العاديّة لهذه النتائج مثل، الأبعاد التّي يتعيّن أن تكون بها الورقة، ومساحة المقطع العرضيّ للمجموعة. وقدرتنا على تثبيت الأوراق فوق بعضها. كما أنّ موقع مجموعة الورق على سطح الأرض بالنسبة للقمر سيكون قضية بحد ذاته.

3. سنسهّل المسألة بالنظر إلى الأرز في المربّع الأخير، حيث سيحتاج إلى $2^{64-1} \approx 9.2 \times 10^{18}$ حبّة من الأرز. شجّع الطلاّب على اختبار العلاقة بين حجم الأرز ووزنه وعدد الحبّات.

بالبحث في شبكة الإنترنت، فإنّ معدّل عدد حبّات الأرز في الكيلو جرام الواحد يبلغ حوالي 36590 حبة. لذا؛ فإنّ مكافأة الخادم ستبلغ 2.5×10^{14} كجم، أو نحو 5×10^{12} عبوة سعة كلّ منها 50 كجم.

وبمقارنة هذا العدد مع الإنتاج الحالي السنوي من الأرز في العالم البالغ 410 مليون طن، أيْ 4.1×10^9 كجم، فإنّنا نحتاج إلى إنتاج العالم من الأرز مدّة 61000 سنة. لا بدّ من تشجيع الطلاّب لاستكشاف بعض المسائل مثل تغير الإنتاج العالميّ من الأرز، وعمليّة النقل. كم عبوة تتّسع الحاوية؟ وكم حاوية تتّسع السفينة؟ ثمّ يتعيّن عليهم تطوير أسئلتهم لكتابة تقرير رياضيّ مفصّل يتعلّق بالموضوع.

فرصة التقويم

يتعيّن على الطلاّب كتابة برهان واضح وكامل وموجز في المهمّة الأولى، ويُعدّ إنجاز هذا البرهان بصورة مستقلّة معيارًا مهمًّا في عمليّة التقويم إذ يحتاج الطلاّب إلى استكشاف المهمّات. كما لابدّ من تقويم قدرتهم على إنجاز المهمّة ، والتوجّه الإبداعيّ عند العمل في مجموعات. ويتعيّن على الطلاّب تقديم ما توصّلوا إليه، وإبراز مساهمات كلّ فرد من أفراد المجموعة.

الوحدة الثالثة

الدوال والعلاقات اللوغاريتمية

مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع
King Abdulaziz & his Companions Foundation for Giftedness & Creativity
موهبة

نظرة عامّة

تقدم هذه الوحدة للطلاب فرصاً لاستكشاف استخدامات اللوغاريتمات وسلوكها.سيتم استكاف الأساليب الجبرية للتعامل مع اللوغاريتمات بالاضافة إلى تقديم استخدامها للمساعدة في الحساب كوسائل لترسيخ فهم الطلاب لأثر استخدام اللوغاريتمات بالاضافة إلى تقديم نبذة تاريخيةحول تطور هذا المجال في علم الرياضيات.

يصف قانون بنفورد توزيع الأرقام الموجودة في المنزلة الأولى من الأعداد في مجموعات البيانات الرقمية في حياتنا العملية، ويقدمه كأحد التطبيقات على اللوغاريتمات. كما سوف يتم تعريف الطلاب بفكرة القياسات اللوغاريتمية المستخدمة في العديد من المجالات العلمية.

الأهداف التعلمية للوحدة

- استكشاف الدوال والعلاقات اللوغاريتمية.
- تطوير فهم عميق لخصائص اللوغاريتمات.

المعرفة السابقة

يجب ان يكون الطلاب على دراية بالطرق الجبرية وعلاقتها باللوغاريتمات، على سبيل المثال استخدام اللوغاريتمات في حل المعادلات التي تكون فيها القيم المجهولة أسساً. يجب ان يكون لدى الطلاب الثقة عند انشاء نماذج جداول البيانات لتقصي الانظمة الرياضية.

خصائص الأداء المتقدم

القيم والاتّجاهات والسمات

- الابداع (النشاطان الثاني والرابع)
- المجازفة (النشاط الثاني)

المهارات المتقدّمة

- التعميم ـ القدرة على رؤية ماذا يحدث في هذا المثال لكي يتم مقارنتها مع حالات متشابهة (النشاطان الثاني والثالث)
- الدقة ـ القدرة على العمل بفاعلية ضمن إطار من القواعد المحددة (النشاطان الثاني والرابع)

المعرفة والفهم المتقدّمان

- فهم البرهان (النشاط الثالث)
- التبصُّر في البنية الرياضية (النشاطان الثالث والرابع)
- تقدير الروابط (النشاطان الثالث والرابع)

الخطّة الزمنيّة

ما يقارب 16 ساعة، ولكل من الأنشطة المدة الزمنية نفسها.

المصادر

سيكون الطالب بحاجة الى ورقة بيضاء و وسائل آمنة لقص شرائط الورقة في النشاط الثاني.

التكنولوجيا

- سوف يحتاج الطلاب الوصول الى شبكة الإنترنت لنسخ مجموعة بيانات عددية على الموقع http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_countries_by_future_GDP_(PPP)_estimates ثم استعمال برنامج الجداول الإلكترونية لعمل نسخهم الخاصة.


حول هذه الوحدة

الأهدافُ التعلميّةُ للوَحدةِ
- استكشاف الدوال والعلاقات اللوغاريتمية.
- تطوير فهم عميق لخصائص اللوغاريتمات.

في هذه الوحدة ستقوم باستكشاف اللوغاريتمات و الدوال اللوغاريتمية من خلال عدد من المنظورات. وتتضمن الوحدة مهاماً عملية ، ونهجاً جبرياً وعددياً.

النشاط الأول
اللوغاريتمات

الأسئلة الأربعة الأولى هي تدريبات تُنمِّي مهارتك في التعامل مع اللوغاريتمات.
يجب أن تمتلك ثقةً في فهم العلاقة بين الأسس واللوغاريتمات، حيث
$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$
قبل البدء، اكتبْ قوانين جمع اللوغاريتمات وطرحها وضربها وقسمتها وقوانين الأسس المُناظرة لها.
1. جدْ قيمة كلٍّ ممّا يلي:
a. $\log_2 (\log_2 2^2)^2$
b. $\log_a a\sqrt{\frac{1}{a\sqrt{a}}}$
c. $(\log_{10} a^2 + \log_{10} b^2) \div \log_{10} ab$

2. جدْ قيمة: $\log_2 9 \times \log_3 8$.

3. أثبت أنّ: $\log_a x + \log_a x^2 + \ldots + \log_a x^n = n(n+1) \log_a \sqrt{x}$.

4. بسّط العبارة: $\log_{10} \tan 1^\circ + \log_{10} \tan 2^\circ + \ldots + \log_{10} \tan 89^\circ$.

اكتشف يوهان كيبلر (1571م– 1630م) وهو عالم فلكيّ رياضيّ، ثلاثة قوانين تصف حركة الكواكب، وكانت من الاكتشافات المذهلة في علم الفلك. حيث كتب في قانونه الثالث:

تخيلّت في 8 آذار من عام 1618 ..... واعتقدت في البداية أنّني أحلم، وأنّ استنتاجاتي المذكورة في المقدّمة مجردّ افتراض. ولكنّني تحقّقت بما لا يدع مجالاً للشكّ من أنّ النسبة بين زمنيْ دورتيْ أيّ كوكبيْن حول الشمس، تساوي مرةّ ونصف المرةّ من النسبة بين متوسط بُعديْهما عن الشمس.

(قم بزيارة الموقع http://plus.maths.org/issue8/features/proof2/ للإطلاع على مزيد من المعلومات).

27

مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع
King Abdulaziz & his Companions Foundation for Giftedness & Creativity

حول هذا النشاط

يتكوّن هذا النشاط من مهامّ ترتبط باللوغاريتمات وتتزايد درجة صعوبتها.

صمّمت الأنشطة 1–4 لتدريب الطلاّب على معالجة اللوغارتمات بطلاقة، ونوصي أن يستذكر الطلاّب العلاقة بين الأسس واللوغاريتمات، وقوانين اللوغاريتمات، وقاعدة تغيير أساس اللوغاريتم، ويعمدوا إلى تسجيلها. وأن يكوّنوا أمثلة خاصّة بهم ويُحلّوها، ويكتبوا ملاحظاتهم عن الحلول. شجّع الطلاّب على العمل في مجموعات ثنائيّة لتنفيذ الأنشطة 2–4، حيث يناقشوا الفكرة الأساسيّة التّي يحتاجون إليها لإتمام البرهان، وبعد ذلك يعملوا بصورة منفردة ويتشاركوا الحلول. تتطلّب المهمّة الثانية قانون تغيير أساس اللوغاريتم، وتتطلب المهمة الثالثة استعمالاً متكرراً لقانون الضرب في اللوغاريتمات، وأمّا المهمّة الرابعة فتتطلّب استعمالاً ذكيًّا للمتطابقات المثلّثيّة.

المهمّتان الثالثة والرابعة هما أسئلة إثبات، تشبهان نماذج من أسئلة أولمبياد الرياضيّات، ويتعيّن على الطلاّب استعمال القاعدة المناسبة. وأمّا الجزء الأخير فهو نبذة حول حدث مهمّ من تاريخ الرياضيّات، ومن المفيد مناقشة الطلاّب في وحدات القياس المستعملة. لذا؛ يتعيّن أن ينفّذ هذا الجزء على نحو تعاونيّ على صورة مجموعات ثنائية أو مجموعاتٍ صغيرة.

شجّع الطلاب على الدخول إلى الموقع الإلكتروني من خلال الرابط المُعطى لاستكشاف القصّة كاملة، وممّا يصعّب المسألة هو أهميّة الفهم الدقيق لقانون كيبلر، لذا؛ اطلب إليهم مناقشة فهمهم لهذا القانون. يعني استعمال موضوع التناسب أنّنا نبحث عن علاقة أسيّة، وتستعمل اللوغاريتمات لضبط العلاقة والتمكّن من تمثيلها. وبناءً عليه، فإنّ العلاقة بين اللوغاريتمات تخلق علاقة أسيّة بين الكميّات.

ثمّ يعرض الطلاّب ما وجدوه، ويتحاورون في توضيح شروحاتهم.

ستحتاج إلى ورق رسم بيانيّ لوغاريتمي، ويمكن أن تجده في الشبكة العالميّة للمعلومات في الموقع www.printfreegraphpaper.com

خصائص الأداء المتقدم

قد يظهر الطالب في هذا النشاط السمات الآتية:

- القدرة على ربط الرياضيّات بالحياة.
- القدرة على الاستدلال الرياضيّ.
- إدراك ما وراء المعرفة (التفكير رياضيًّا).
- القدرة على التعميم.
- الطلاقة في أداء المهارات الرياضيّة.
- القدرة على بناء نموذج رياضيّ.
- التبصّر العميق للبنية الرياضيّة الأساسيّة.
- فهم "الأفكار الكبيرة" في الرياضيّات.
- القدرة على فهم البرهان وبنائه.

توصيات أسلوب التدريس

يمكن سحب الطلاب الموهوبين في مجموعات مناسبة.

إجابات الأسئلة

.1

a. 2

b. $\frac{1}{4}$

c. 2

.2 يمكن استعمال اللوغاريتمات لأيّ أساس، وسوف نستعمل القانون: $\log_a x = \log_b x \log_a b$ في هذا النشاط.

$$\log_2 9 \times \log_3 8 = \log_2 3^2 \times \log_3 8$$
$$= 2\log_2 3 \times \log_3 8$$
$$= 2\log_2 8$$
$$= 2\log_2 2^3$$
$$= 2 \times 3 \log_2 2$$
$$= 6$$

.3

$$\log_a x + \log_a x^2 + \ldots + \log_a x^n = \log_a (x.x^2 \ldots x^n)$$
$$= \log_a (x^{1+2+\ldots+n})$$
$$= \log_a (x^{\frac{n(n+1)}{2}}) = \frac{n(n+1)}{2} \log_a x = n(n+1) \log_a \sqrt{x}$$

.4

يمكن استعمال اللوغارتيمات لأيّ أساس:

$$\log_{10}\tan 1° + \log_{10} \tan 2° + \ldots + \log_{10} \tan 89°$$
$$= \log_{10} (\tan 1° \times \tan 2° \times \ldots \times \tan 89°)$$
$$= \log_{10} \left(\frac{\sin 1°}{\cos 1°} \times \frac{\sin 2°}{\cos 2°} \times \ldots \times \frac{\sin 89°}{\cos 89°}\right) = \log 1 = 0$$

[لأنّ $\sin 1°$ تختصر مع $\cos 89°$، وهكذا..]

.5

.a

	عطارد	الزهرة	الأرض
$\log_{10} d$	–0.4122	–0.1407	0
$\log_{10} T$	–0.6184	–0.2110	0
	المريخ	المشتري	زحل
$\log_{10} d$	0.1829	0.7162	9.539
$\log_{10} T$	0.2744	1.0742	1.4692

d. يجب الرسم على مستوى بيانيّ لوغاريتمي log –log، وسيكون ميله 1.5 ومقطع المحور y يساوي صفر.

c. $\log_{10} T = 1.5 \log_{10} d$

$$= \log_{10} d^{1.5}$$
$$T = d^{1.5}$$

$T = d^{1.5}$ تكافئ $T^2 = d^3$ (لأنّ T، d موجبتان) وهذا يعني أنّ زمن الدورات حول الشمس يساوي 1.5 متوسّط مسافاتها عن الشمس. وهذا ما عناه كيبلر عندما قال: إنّ النسبة بين زمنَي دورة كوكبيْن تساوي مرّة ونصف المرّة النسبة بين متوسط بُعديهما عن الشمس.

وتَنتُج الصيغة الأكثر شيوعًا لهذه النتيجة من المعادلة $T = d^{1.5}$ التّي تكافئ $T^2 = d^3$ (لأنّ كلاً من T، d موجبة). وتعني أنّ النسبة بين مُربعَي زمن الدوران حول الشمس تساوي النسبة بين مُكعبَي متوسّط البعد عن الشمس.

فرص التقويم

تعدّ المهمّة الثالثة دليلاً جيّدًا على قدرة الطلاّب على كتابة البرهان. إنّ ملاحظة استجابات الطلاّب على المهمّة الأخيرة–وخاصّة مدى تقدّمهم دون الحاجة إلى مساعدة–تبيّن مدى قدرتهم على ربط الرياضيّات بالواقع وإيجاد نموذج رياضيّ. ومن المهمّ تشجيع الطلاّب على عرض نتائجهم على صورة عبارات لفظيّة مرفقة مع توضيحاتهم التّي تبيّن لماذا، وكيف توصّلوا إلى هذه النتيجة.

ويتعيّن أن يشعر الطلاّب بالرضى عند مناقشة كلّ طالب يعرض نتائجه متوقّعين أن يوضّحوا شروحاتهم وينقّحوها.

النشاط الثاني
اللوغاريتمات وقوانين المسطرة المتحركة

قبل ظهور الآلات الحاسبة، كانت جداول اللوغاريتمات والمساطر المتحركة (slide rules) شائعة الاستخدام للقيام بعمليات الضرب والقسمة والعديد من العمليات الحسابية الأخرى. بالرغم من أن الآلات الحاسبة وأجهزة الحاسب الآلي جعلت العمليات الحسابية أسهل بكثير، إلا أنه من المفيد تعلم كيفية عمل الطرائق الحسابية التي استخدمت سابقاً. هذا النشاط سيبحث في القوانين الرياضية المتعلقة باستخدام جداول اللوغاريتمات والمساطر المتحركة.

1. عندما تُستخدم اللوغاريتمات في الحسابات، فإنها تستبدل الضرب والقسمة بالجمع والطرح. الأمثلة الموجودة أدناه تبين كيف يتم ذلك.

الضرب: 1.8×32

نقوم بإيجاد اللوغاريتم لكل من الأعداد المضروبة. (ستقوم بعمل ذلك باستخدام آلة حاسبة ولكن قبل وجود الآلات الحاسبة، كان يتم استخدام كتب مطبوعة تحتوي على جداول اللوغاريتمات). سنستخدم اللوغاريتم للاساس 10.

العدد	اللوغاريتم
32	1.505
1.8	0.255

الآن اجمع قيمة اللوغاريتم: $0.255 + 1.505 = 1.760$.

أخيراً، أوجد قيمة $10^{1.760} = 57.5$ مقرباً إلى منزلة عشرية واحدة

للتحقق من الإجابة، قم بإجراء عملية الضرب مباشرة: $1.8 \times 32 = 57.6$

القسمة: $491 \div 17.6$

قم بإيجاد اللوغاريتم لكل من العددين كما فعلنا في السابق، ولكن اطرح بدلاً من الجمع.

العدد	اللوغاريتم
491	2.691
17.6	1.246

ثم نحسب $2.691 - 1.246 = 1.445$ و من ثم $10^{1.445} = 27.9$

بإجراء القسمة مباشرة $491 \div 17.6 = 27.9$ مقرباً إلى منزلة عشرية واحدة.

الآن قم بإجراء العمليات الحسابية التالية باستخدام اللوغاريتمات. اكتب قيم اللوغاريتمات مقربة إلى 3 منازل عشرية واكتب النتائج النهائية مقربة إلى منزلة عشرية واحدة.

بين خطواتك كما في الأعلى.

a. 48×6.7
b. 38.9×104.6
c. $663 \div 29.2$
d. $1087 \div 345$

29

مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع

حول هذا النشاط

في هذا النشاط يستكشف الطلاب خصائص اللوغاريتمات عن طريق صنع المسطرة المتحركة الخاصة بهم واستخدامها لإجراء عمليات الضرب والقسمة. بعد ذلك يقومون بربط الحسابات التي أجرَوها بخصائص اللوغاريتمات.

خصائص الأداء المتقدم

- **الإبداع** – القدرة على تمثيل المسألة وتصنيفها بطريقة أكثر شمولية وترابط على حسب علاقتها بالمعلومات السابقة.
- **المجازفة** – القدرة على تمييز القوانين وتوجيهها لإيجاد شكل آخر صحيح ولكن جديد للقانون.
- **التعميم** – القدرة على فهم كيفية تطبيق ما يجري في مثال ما على مواقف مشابهة.
- **الدقة** – القدرة على العمل بفاعلية ضمن إطار من القواعد المحددة.

توصيات أسلوب التدريس

يمكن وضع الطلاب الموهوبين في مجموعات مناسبة. سيتضمن هذا النشاط أداءً عملياً، لذلك سيحتاج الطلاب مساحة كافية للعمل براحة وأمان.

إجابات الأسئلة

1. a. 48×6.7

العدد	اللوغاريتم
48	1.681
6.7	0.826

الآن نجمع قيمتي اللوغاريتم:

$0.826 + 1.681 = 2.507$

3 منازل عشرية

أخيراً، نجد قيمة $10^{2.507} = 321.4$

مقرباً إلى منزلة عشرية واحدة

للتحقق من الإجابة، نقوم بإجراء عملية الضرب مباشرة:

$48 \times 6.7 = 321.6$

b. 38.9×104.6

العدد	اللوغاريتم
38.9	1.590
104.6	2.020

الآن نجمع قيمتي اللوغاريتم:

$2.020 + 1.590 = 3.610$ (3 منازل عشرية)

أخيراً، نجد قيمة $10^{3.610} = 4073.8$ مقرباً إلى منزلة عشرية واحدة .للتحقق من الإجابة، نقوم بإجراء عملية الضرب مباشرة:

$38.9 \times 104.6 = 4068.9$

c. $663 \div 29.2$

العدد	اللوغاريتم
663	2.822
29.2	1.465

الآن نحسب $2.822 - 1.465 = 1.357$

(3منازل عشرية) ثم نحسب $10^{1.357} = 22.8$

بإجراء القسمة مباشرة $663 \div 29.2 = 22.7$

مقرباً إلى منزلة عشرية واحدة

(عدم الدقة في الرقم الثالث سببها الخطأ الناتج من التقريب)

d. $1087 \div 345$

العدد	اللوغاريتم
1087	3.036
345	2.538

الآن نحسب $3.036 - 2.538 = 0.498$

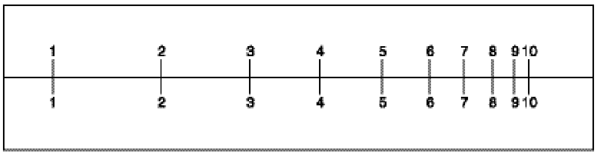
(3منازل عشرية) ثم نحسب $10^{0.498} = 3.6$

بإجراء القسمة مباشرة $1087 \div 345 = 3.6$

2. يجب تشجيع الطلاب للعمل بحذر ودقة في هذا النشاط. إن استخدام سكين حاد أو قاطع مستدير سيضمن الحصول على حافة مستقيمة بين المسطرتين ولكن من الواضح أن أخذ احتياطات السلامة بعين الاعتبار أمر أساسي.

3. الشيء الأساسي في هذه الحسابات هو أن النقطة المؤشَّرة 3 على المسطرة هي في الحقيقة تبعد $\log_{10}3$ وحدة على يمين العدد 1. بعد ذلك نقوم بوضع العدد1 على المسطرة العلوية فوق العدد 3 ثم نتحرك $\log_{10}2$ وحدة إضافية لتبلغ المسافة الكلية

$\log_{10}3 + \log_{10}2 = \log_{10}6$ وحدة على يمين العدد 1 على المسطرة السفلية، وعندها سيكون العدد 6 هو المؤشَّر عليه.



4. c. في هذه الحالة قمنا في الحقيقة بالضرب بالعدد 0.8 بدلاً من 8، ثم قمنا بتعديل قيمة العدد بناءً على ذلك. هناك امر يستحق ذكره للطلاب وهو أنه بإمكاننا إضافة أصفار لكل من الأعداد على إحدى المسطرتين (بحيث تصبح 10، 20، 30... 100) ووصلها بالمسطرة الأصلية للحصول على مسطرة لوغاريتمية من 1 إلى 100. وبنفس الطريقة يمكننا وضع الأعداد 0.1، 0.2، 0.3... 1.0 على نسخة أخرى ووصلها من اليسار للحصول على مسطرة لوغاريتمية تشمل ثلاث مقاييس.

5. c. الجواب لهذه الحسابات سيكون موقعه على مسافة $\log_{10}3.2 - \log_{10}2 = \log_{10}1.6$ وحدة على يمين العدد 1 على المسطرة السفلية والذي سيكون العدد 1.6.

6. b.

(i) 910

(ii) 27600

(iii) 19.5

(iv) 6.67

7. c. سيكون العدد 2 على حافة الثَّني.

d. و e

عندما تُوضع حافة المسطرة اليسرى عند عدد ما، ستكون الثنية عند الجذر التربيعي لذلك العدد. إذا رمزنا للعدد بالرمز x فإن الثَّنْية ستكون عند العدد

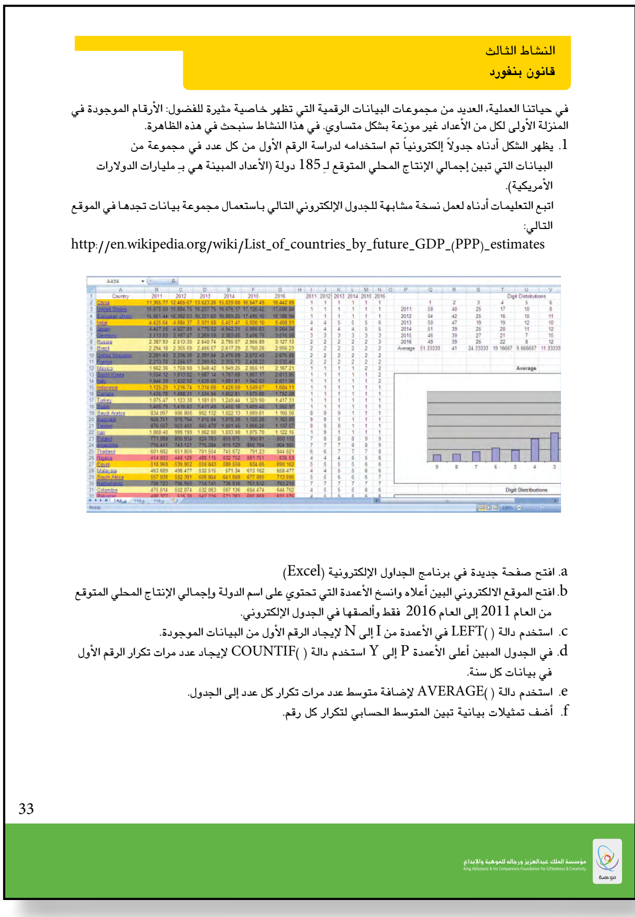
$$\frac{1}{2}\log_{10} x = \log_{10}\sqrt{x}.$$

8. a. 0.405

b. ستؤول المتسلسلة إلى ... 0.4053 بعد ثمانية حدود.

فرص التقويم

يمنح هذا النشاط فرصة جيدة للطلاب لمراجعة فهم للوغاريتمات والمقاييس (المساطر) اللوغاريتمية.


النشاط الثالث
قانون بنفورد

في حياتنا العملية، العديد من مجموعات البيانات الرقمية التي تظهر خاصية مثيرة للفضول: الأرقام الموجودة في المنزلة الأولى لكل من الأعداد غير موزعة بشكل متساوي. في هذا النشاط سنبحث في هذه الظاهرة.

1. يظهر الشكل أدناه جدولاً إلكترونياً تم استخدامه لدراسة الرقم الأول من كل عدد في مجموعة من البيانات التي تبين إجمالي الإنتاج المحلي المتوقع لِـ 185 دولة (الأعداد المبينة هي بِـ مليارات الدولارات الأمريكية).

اتبع التعليمات أدناه لعمل نسخة مشابهة للجدول الإلكتروني التالي باستعمال مجموعة بيانات تجدها في الموقع التالي:

http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_countries_by_future_GDP_(PPP)_estimates

a. افتح صفحة جديدة في برنامج الجداول الإلكترونية (Excel)
b. افتح الموقع الالكتروني البين أعلاه وانسخ الأعمدة التي تحتوي على اسم الدولة وإجمالي الإنتاج المحلي المتوقع من العام 2011 إلى العام 2016 فقط وألصقها في الجدول الإلكتروني.
c. استخدم دالة ( )LEFT في الأعمدة من I إلى N لإيجاد الرقم الأول من البيانات الموجودة.
d. في الجدول المبين أعلى الأعمدة P إلى Y استخدم دالة ( )COUNTIF لإيجاد عدد مرات تكرار الرقم الأول في بيانات كل سنة.
e. استخدم دالة ( )AVERAGE لإضافة متوسط عدد مرات تكرار كل عدد إلى الجدول.
f. أضف تمثيلات بيانية تبين المتوسط الحسابي لتكرار كل رقم.

33

حول هذا النشاط

كما تم التوضيح في كتاب الطالب، فإن الأرقام الموجودة في المنزلة الأولى من الأعداد في مجموعات البيانات الرقمية في حياتنا العملية ليست موزعةً بشكل عشوائي. في الحقيقة الرقم 1 هو الأكثر تكراراً ثم 2 ثم 3 وهكذا حتى الرقم 9 الذي هو الأقل ظهوراً في المنزلة الاولى. أول من اكتشف هذه الظاهرة هو عالم الرياضيات الكندي سايمون نيوكوم في عام 1881م، عندما لاحظ أن كتب جداول اللوغاريتمات مهترئةً أكثر في الصفحات التي فيها أرقام تبدأ بالأعداد الصغيرة. فقد كان الناس يبحثون عن هذه الأرقام بشكل أكثر تكراراً لأن ظهورها في البيانات الطبيعية كان أكثر تكراراً. في عام 1938 م قام المهندس الأمريكي فرانك بنفورد باكتشاف القانون الذي يحمل اسمه الآن. في هذا النشاط سيستكشف الطلاب خصائص ونتائج قانون بنفورد.

خصائص الأداء المتقدم

- **فهم البرهان** – القدرة على الانتقال من الشيء الواقعي إلى الشيء المجرد بسرعة.
- **تقدير الروابط** –استخدام العلاقات من الخبرات السابقة للبحث عن تعميمات ممكنة.
- **التبصر في البنية الرياضية الأساسية**– القدرة على تجزئة المهمة، القدرة على اتخاذ القرار بشأن أسلوب الحل المناسب، ثم تنفيذ النشاط.
- **التعميم** – القدرة على فهم كيفية تطبيق ما يجري في مثال ما على مواقف أخرى مشابهة.

توصيات أسلوب التدريس

يمكن سحب الطلاب الموهوبين في مجموعات مناسبة بحيث يعمل كل طالب على جهاز حاسب أو كل طالبين معاً على نفس الجهاز.

إجابات الأسئلة

1. قد يحتاج الطلاب بعض المساعدة في إنشاء نموذج الجدول الإلكتروني. لاحظ النقاط التالية على وجه الخصوص:

a. إلى c. الصيغة المستخدمة لإيجاد الرقم الأول من اليسار هي ببساطة: LEFT(B2,1) = ويجب إدخالها في الخلية I2 ثم نسخها أفقياً حتى العمود N. بعد ذلك نسخ الأسطر من I2 إلى N2 إلى الأسفل حتى السطر 186.

d. أدخل الأعداد 1، 2، 3،...9 في الخلايا من Q2 إلى Y2 كما هو مبين، اكتب الصيغة COUNTIF($I2:$I186,Q$2) = في الخلية Q3. اسحب بشكل عرضي حتى الخلية Y3. الآن اسحب الخلية Q3 إلى الأسفل حتى الخلية Q4. عدِّل الصيغة بتغييرI إلى J. بعد ذلك اسحب Q4 أفقياً حتى Y4. بعدها اسحب Q4 إلى الأسفل حتى Q5 وغيِّر J إلى K واسحب أفقياً. أعد حتى يتم سحب Q8 إلى Y8 وهكذا حتى تصل إلى تغيير M إلى N.

e. قد يحتاج الطلاب للتذكير أن برنامج الجداول الالكترونية يستخدم الصيغة AVERAGE لحساب المتوسط الحسابي. أدخل الصيغة (AVERAGE(Q3:Q8 = في الخلية Q9 واسحب إلى اليمين حتى الخلية Y9.

f. قد تحتاج في هذا الفرع إلى تذكير الطلاب بطريقة تظليل خلايا غير متجاورة في برامج الجداول الإلكترونية وذلك بإبقاء الضغط على المفتاح Ctrl في لوحة المفاتيح في أثناء اختيار الخلايا التي تريد تظليلها.

2. يبين الجدول الآتي قيم الاحتمالات. إن قيمة الاحتمال تساوي المتوسط الحسابي لتكرار العدد مقسوماً على إجمالي عدد الدول وهو 185.

الرقم الأول	1	2	3	4	5	6	7	8	9
الاحتمال	0.277	0.222	0.132	0.104	0.052	0.061	0.045	0.037	0.029

3.a. القيم المتوقعة باستخدام قانون بنفورد مبينة في الجدول.

$$P(d) = \log_{10}\left(1 + \frac{1}{d}\right)$$

$$P(1) = \log_{10}\left(1 + \frac{1}{1}\right) = \log_{10}(2) = 0.301$$

الرقم الأول	1	2	3	4	5	6	7	8	9
الاحتمال	0.301	0.176	0.125	0.097	0.079	0.067	0.058	0.051	0.046

b. مجموعة البيانات التي تم دراستها إلى الآن تتوافق بشكل جيد مع قانون بنفورد. لكن انتبه أن العلاقة تقريبية فقط.

4.c البيانات التي تم إنتاجها بهذه الطريقة لن تتوافق مع قانون بنفورد. إن من المثير للإنتباه أن قانون بنفورد يستخدم كثيراً المحاسبة القضائية لاكتشاف البيانات المزورة. هذا التحليل يعتبر دليلاً قانونياً عند بعض السلطات القضائية.

5. بالرغم من أن البيانات التي تم إيجادها تغطي قيمة أسية واحدة، إلا أنها تتوافق بشكل جيد مع قانون بنفورد.

6. a. يجب على الطلاب استخدام السعر الحالي لصرف العملات. سيجد الطلاب أن توزيع الرقم الأول لم يتغير بشكل كبير عند تغيير وحدة قياس البيانات بهذه الطريقة.

b. في المقابل، إن توزيع الرقم الأول لمجموعة البيانات المختارة عشوائياً سيتغير بتغير وحدة القياس.

في الحقيقة التوزيع اللوغاريتمي المتوقع باستخدام قانون بنفورد هو الوحيد الذي لن يتغير بتغير وحدة القياس. ونحن نتوقع أن مجموعة من البيانات في حياتنا العملية ستكون كذلك؛ أي أن توزيع الأرقام لن يكون معتمداً على وحدة القياس المستخدمة للبيانات.

فرص التقويم

هذا النشاط يمنح فرصة جيدة لمراجعة ثقة الطلاب في استخدام الجداول الإلكترونية لتحليل البيانات.

النشاط الرابع: المقاييس اللوغاريتمية

النشاط الرابع

المقاييس اللوغاريتمية

يستعمل مقياس مقدار الشدة (Moment Magnitude Scale) لقياس مقدار شدة الزلازل.

مقدار الشدة M_o لزلزال هو مقياس ليس متجهي يتم حسابه باستخدام الصيغة التالية:

$$M_w = \frac{2}{3}\log_{10} M_0 - 10.7$$

حيث M_o هو العزم الزلزالي مقيساً بوحدة الداين سنتيميتر (1 dyne-centimetre = 10^{-7}Newton millimiter.)

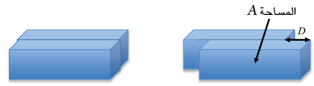
و تُحسب قيمة العزم الزلزالي نفسها باستخدام الصيغة:

$$M_o = \mu AD$$

حيث:

- μ تمثل معامل القص وهو مقياس لمقدار القوة اللازمة لصدع الصخور المتأثرة بالزلزال ووحدة قياسها هي $dynes/cm^2$. في هذا النشاط سنستخدم القيمة $\mu = 3\times10^{11}$.
- A هي مساحة الصدع الحقيقي في الصخور مقيسة بوحدة cm^2.
- D هي متوسط الإزاحة في الصخور على امتداد الصدع.

يبين الرسم أدناه هذه القياسات وعلاقتها بالصخور قبل وبعد الزلزال.



1. احسب M_w لزلزال بحيث:

$D = 2$ cm

$A = 10^{14}$ cm^2

2. انسخ وأكمل الجدول التالي لتبين قيم M_w باستخدام قيم مختلفة لـِ D مع $A = 10^{14}$ cm^2 .

D (cm)	10	20	30	40	50
M_w					

36

"موهبة .. حيث تنتمي"

حول هذا النشاط

في هذا النشاط سيستكشف الطلاب خواص المقاييس اللوغاريتمية باستخدام مثال مقياس مقدار الشدة (Moment Magnitude Scale) للزلازل. هناك تأكيد على الأفكار الأساسية المتمثلة في أن المقياس اللوغاريتمي يغطي مدىً كبيراً من القيم وأنه غير خطي؛ أي أن زيادةً قليلةً في القياسات قد تؤدي إلى زيادة كبيرة جداً في القيمة الفعلية للكمية المراد قياسها.

خصائص الأداء المتقدم

- **الإبداع** – القدرة على تمثيل المسألة وتصنيفها بطريقة أكثر شمولية وترابط على حسب علاقتها بالمعلومات السابقة.
- **تقدير الروابط** – استخدام العلاقات من الخبرات السابقة للبحث عن تعميمات ممكنة.
- **التبصر في البنية الرياضية الأساسية والمسائل متعددة الخطوات** – القدرة على تجزئة المهمة، واتخاذ القرار بشأن أسلوب الحل المناسب، ثم تنفيذ النشاط.
- **التعميم** – القدرة على فهم كيفية تطبيق ما يجري في مثال ما على مواقف اخرى مشابهة.
- **الدقة** – القدرة على العمل بفاعلية ضمن إطار من القواعد المحددة.

توصيات أسلوب التدريس

يمكن سحب الطلاب الموهوبين في مجموعات مناسبة. يمكن أن يعمل الطلاب على انفراد أو في مجموعات خلال هذا النشاط. توفر أجهزة حواسيب سيكون مفيداً لأن نموذج الجدول الإلكتروني يمكن استخدامه للقيام بالحسابات المطلوبة في هذا النشاط.

إجابات الأسئلة

.1

$$M_0 = \mu AD = 3 \times 10^{11} \times 10^{14} \times 20 = 6 \times 10^{26}$$

$$M_w = \frac{2}{3}\log_{10}(6 \times 10^{26}) - 10.7 = 7.15$$

2. يبين الجدول مقدار الشدة مقرباً إلى منزلتين عشريتين (انتبه أن مقدار الشدة في الغالب يكون مقرباً إلى منزلة عشرية واحدة).

مثال: نحن نستخدم

$\mu = 3 \times 10^{11}$, $A = 10^{14}$ and $D = 10$

$$M_0 = \mu A D$$
$$= 3\times10^{11} \times 10^{14} \times 10$$
$$= 3 \times 10^{26}$$

لذلك

$$M_w = \frac{2}{3} \log_{10} (3 \times 10^{26}) - 10.7$$
$$= 6.95$$

D (cm)	10	20	30	40	50
M_w	6.95	7.15	7.27	7.35	7.42

لاحظ أن من أحد خصائص المقياس أن زيادة كبيرة في متوسط الإزاحة ينتج عنها زيادة قليلة في مقدار الشدة. فمثلاً مضاعفة قيمة الإزاحة من 20cm إلى 40cm ينتج عنه زيادة في الشدة بمقدار 0.2.

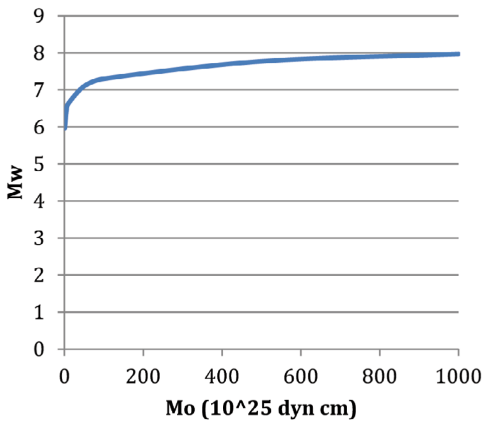
3. a. القيم المحسوبة مبينة في الجدول.

مثلاً:

$$M_w = \frac{2}{3} \log_{10} (1 \times 10^{25}) - 10.7 = 5.97$$

M_0 (10^{25} dyn cm)	1	5	10	50	100	500	1000
M_w	5.97	6.43	6.63	7.10	7.30	7.77	7.97

لاحظ في الجدول أن زيادة في العزم الزلزالي من الدرجة الأولى إلى الدرجة الثالثة ينتج عنها زيادة في الشدة بمقدار 2؛ أي من 5.97 إلى 7.97.



يبين التمثيل البياني زيادة حادة في قيمة العزم الزلزالي M_0 عندما تزداد M_w .

4. العزم الزلزالي يُحسب كما يلي:

$$M_w = \log_{10} M_0 - 10.7 = 9.0$$
$$\Rightarrow \log_{10} M_0 = \times 19.7 = 29.6$$
$$\Rightarrow M_0 = 10^{29.6} = 3.98 \times 10^{29}$$

يجب تشجيع الطلاب لمقارنة هذا العدد مع النتائج في الجدول السابق لكي يشعر الطالب بمدى قوة هذا الزلزال

تبين الجداول العزم الزلزالي بمضاعفات 10^{25} dyn–cm

مثلاً:

$$M_w = \log_{10} M_0 - 10.7 = 1.0$$
$$\Rightarrow \log_{10} M_0 = \times 11.7 = 17.55$$
$$\Rightarrow M_0 = 10^{17.55} = 3.5 \times 10^{17}$$
$$= (3.5 \times 10^{-8}) \times 10^{25})$$

لاحظ أن اختيار هذه الوحدة يجعل زلزال بمقدار 6 معياراً مفيداً للمقارنة. مقياس مقدار الشدة (moment–magnitude scale) مفيد على وجه الخصوص لمقارنة الزلازل الكبيرة، ولكنه أقل فائدة عندما نتعامل مع الهزات الأرضية الخفيفة.

6. عند دراسة التأثير المدمر المحتمل لزلزال، فإن العزم الزلزالي يعتبر مؤشر أفضل بكثير من مقدار الشدة. كما كان واضحاً من الجدول في السؤال 5، فإن العزم الزلزالي لزلزال شدته 8 هو في الحقيقة أكبر بمليون مرة من العزم لزلزال شدته 4.

7. العزم الزلزالي المقدر زاد بمقدار 100%؛ أي أنّ 2.5×10^{29} dyn–cm إلى 5×10^{29} dyn–cm

8. a. النسبة هي $1:10^{12}$

b. يُحتاج إلى مثل هذا المقياس لضمان استخدام مقياس واحد فقط لقياس حركات تتراوح بين هزات خفيفة لا تدرك إلى زلازل شديدة.

9. يجب تشجيع الطلاب لاستخدام الإنترنت للبحث عن واحد أو أكثر من هذه المقاييس.

M_0 (× 10^{25} dyn cm)	3.5×10^{-8}	1.1×10^{-6}	3.5×10^{-8}	0.0011	0.035
M_w	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0

M_0 (× 10^{25} dyn cm)	1.1	35	1100	35000	1100000
M_w	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0

فرص التقويم

هذا النشاط يمنح فرصة للتأكد من فهم الطلاب للطرق المختلفة التي تستخدم فيها اللوغاريتمات في المواقف العملية لوصف عمليات تحدث بمدى كبير من القيم.

الوحدة الرابعة

المتطابقات والمعادلات المثلثية

نظرة عامّة

يوجد في هذه الوحدة عدداً من الانشطة التي تسمح للطلاب استكشاف خصائص الدوال المثلثية و علاقاتها ببعضها البعض. يوجد هناك تاكيد على الربط بين التمثيل الجبري و البياني للدوال مع تفسيرها الهندسي.

يمكن توسعة وتبسيط التعاريف البسيطة للدوال المثلثية (بدلالة المثلث القائم) بطرائق مختلفة. على سبيل المثال:

- يمكن استنتاج العلاقات بين الدوال من النظريات الهندسية (مثل نظرية فيثاغورس).
- عرض سلوك الدوال بيانياً مما يسمح بالحصول على وصف واضح لطبيعة الدوال الدورية.
- التعبير عن الدوال باستعمال متسلسلة لا نهائية.

سوف يتم التطرق لجميع هذه الطرائق في هذه الوحدة.

تتيح هذه الوحدة الفرصة للطلاب في تطبيق معرفتهم وفهمهم لوصف الانماط الهندسية الغنية بالبنية المثلثية.

الأهداف التعلمية للوحدة

- استكشاف المتطابقات المثلثية.
- تطوير فهم عميق لخصائص الدوال المثلثية.

المعرفة السابقة

يجب أن يكون الطلاب على دراية وثقة بالمتطابقات المثلثية الاساسية وعملياتها.

خصائص الأداء المتقدم

القيم والاتّجاهات والسمات

- المجازفة (النشاط الثاني)

المهارات المتقدّمة

- **التعميم** – القدرة على فهم كيفية تطبيق ما يجري في مثال ما على مواقف أخرى مشابهة (النشاط الثاني)
- **الدقة** – القدرة على العمل بفاعلية ضمن إطار من القواعد المحددة (النشاط الثاني)

المعرفة والفهم المتقدّمان

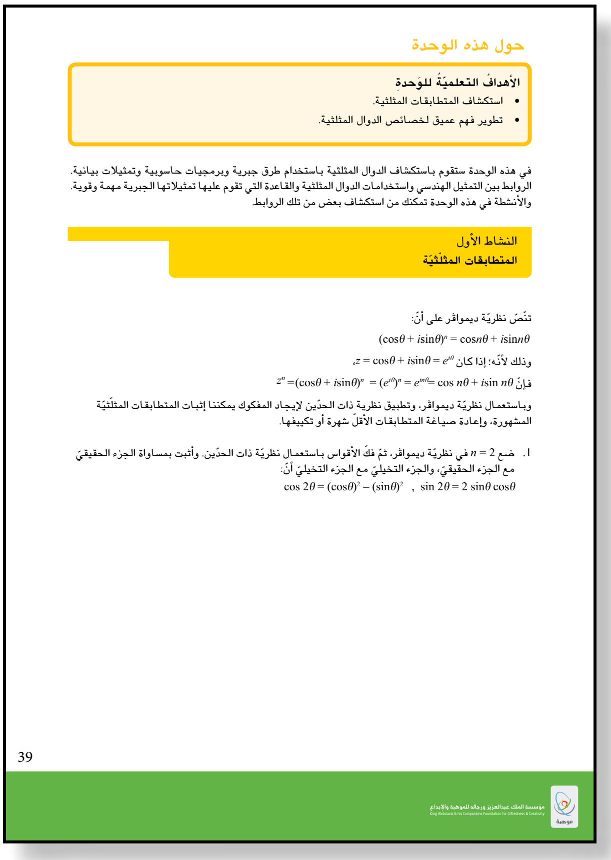
- تقدير الروابط (النشاط الثالث)
- التبصُّر في البنية الرياضية الأساسية (النشاطان الثاني والثالث)

الخطّة الزمنيّة

5 ساعات تقريباً ، وهي موزعة بين الأنشطة بالتساوي.

التكنولوجيا

تستخدم هذه الوحدة برنامج الجيوجبرا استخداما مكثفا. حيث يُسهِّل هذا البرنامج الاستكشافات التي يكون من الصعب والمستحيل الحصول عليها من خلال استخدام قلم الرصاص و الورقة. سوف يستفيد الطلاب بشكل كبير من الفرص لاستكشاف العلاقات الرياضية التي تم تضمينها في هذه الوحدة.



حول هذه الوحدة

الأهدافُ التعلميّةُ للوَحدةِ

- استكشاف المتطابقات المثلثية.
- تطوير فهم عميق لخصائص الدوال المثلثية.

في هذه الوحدة ستقوم باستكشاف الدوال المثلثية باستخدام طرق جبرية وبرمجيات حاسوبية وتمثيلات بيانية. الروابط بين التمثيل الهندسي واستخدامات الدوال المثلثية والقاعدة التي تقوم عليها تمثيلاتها الجبرية مهمة وقوية. والأنشطة في هذه الوحدة تمكنك من استكشاف بعض من تلك الروابط.

النشاط الأول

المتطابقات المثلّثيّة

تنّصّ نظريّة ديمواڤر على أنّ:

$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

وذلك لأنّه؛ إذا كان $z = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$،

فإنّ $z^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^n = (e^{i\theta})^n = e^{in\theta} = \cos n\theta + i\sin n\theta$

وباستعمال نظريّة ديمواڤر، وتطبيق نظرية ذات الحدّين لإيجاد المفكوك يمكننا إثبات المتطابقات المثلّثيّة المشهورة، وإعادة صياغة المتطابقات الأقلّ شهرة أو تكييفها.

1. ضع $n = 2$ في نظريّة ديمواڤر، ثمّ فكّ الأقواس باستعمال نظريّة ذات الحدّين. وأثبت بمساواة الجزء الحقيقيّ مع الجزء الحقيقيّ، والجزء التخيليّ مع الجزء التخيليّ أنّ:
$\cos 2\theta = (\cos\theta)^2 - (\sin\theta)^2 \quad , \quad \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

39

حول هذا النشاط

يعتمد هذا النشاط على تطبيق نظريّة ديمواڤر، ونظريّة ذات الحدّين لاشتقاق مجموعة من المتطابقات المثلّثيّة.

يشتقّ الطلاّب متطابقات $\sin(n\theta)$ وَ $\cos(n\theta)$ لقيم n الصحيحة الموجبة.

خصائص الأداء المتقدّم

قد يظهر الطالب في هذا النشاط السمات الآتية:

- الطلاقة في المهارات الرياضيّة.
- التبصّر العميق للبنية الرياضيّة الأساسيّة.

توصيات أسلوب التدريس

يمكن وضع الطلاب الموهوبين في مجموعات مناسبة.

إجابات الأسئلة

2. b. $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4(\sin\theta)^3$

3. a. $\cos 4\theta = 8(\cos\theta)^4 - 8(\cos\theta)^2 + 1$

b. لا، لا يوجد تعبير مكافئ للنسبة $\sin 4\theta$.

4. a. يمكن كتابة $\cos n\theta$ بدلالة $\cos$ لجميع قيم n الصحيحة الموجبة.

b. يمكن كتابة $\sin n\theta$ بدلالة $\sin\theta$ لجميع قيم n الفرديّة.

فرص التقويم

يتمّ اختبار فهم الطلاّب لنظريّة ديمواڤر استنادًا إلى تنفيذهم هذا النشاط.

تُظهر إجابة الطلاّب عن السؤال الرابع على نحوٍ خاصٍّ—والذي يطبّق فيه الطلاّب النظريّة بصورة فرديّة لاستنتاج تعميم—، مدى فهمهم للبنية الرياضيّة الأساسيّة مقابل تنفيذ الخطوات المرتبطة معًا.

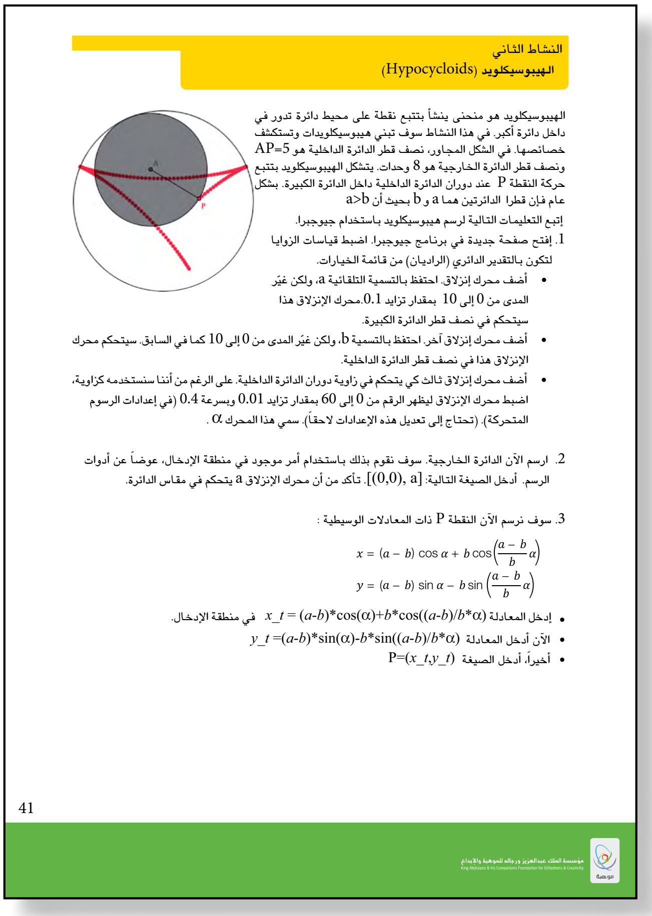
النشاط الثاني: الهيبوسيكلويد (Hypocycloids)

خصائص الأداء المتقدم

- **المجازفة** – المقدرة على التعرف على القوانين واستخدامها في تكوين صيغ جديدة ومحققة
- **التبصر في البنية الرياضية الأساسية والمسائل المتعددة الخطوات** – تقسيم المهمة إلى أجزاء وتحديد أفضل طريقة للحل ومن ثم تنفيذ الحل.
- **التعميم** – القدرة على فهم كيفية تطبيق ما يجري في مثالٍ ما على مواقف أخرى مشابهة.
- **الدقة** – المقدرة على العمل بفعالية ضمن إطار من القواعد المحددة.

توصيات أسلوب التدريس

يمكن سحب الطلاب الموهوبين في مجموعات مناسبة بحيث يعملون فرادى أو في مجموعات ثنائية على أجهزة الحاسب.



النشاط الثاني
الهيبوسيكلويد (Hypocycloids)

الهيبوسيكلويد هو منحنى ينشأ بتتبع نقطة على محيط دائرة تدور في داخل دائرة أكبر. في هذا النشاط سوف تبني هيبوسيكلويدات وتستكشف خصائصها. في الشكل المجاور، نصف قطر الدائرة الداخلية هو AP=5 ونصف قطر الدائرة الخارجية هو 8 وحدات. يتشكل الهيبوسيكلويد بتتبع حركة النقطة P عند دوران الدائرة الداخلية داخل الدائرة الكبيرة. بشكل عام فإن قطرا الدائرتين هما a و b بحيث أن a>b

إتبع التعليمات التالية لرسم هيبوسيكلويد باستخدام جيوجبرا.

1. إفتح صفحة جديدة في برنامج جيوجبرا. اضبط قياسات الزوايا لتكون بالتقدير الدائري (الراديان) من قائمة الخيارات.
   - أضف محرك إنزلاق. احتفظ بالتسمية التلقائية a، ولكن غيّر المدى من 0 إلى 10 بمقدار تزايد 0.1.محرك الإنزلاق هذا سيتحكم في نصف قطر الدائرة الكبيرة.
   - أضف محرك إنزلاق آخر. احتفظ بالتسمية b، ولكن غيّر المدى من 0 إلى 10 كما في السابق. سيتحكم محرك الإنزلاق هذا في نصف قطر الدائرة الداخلية.
   - أضف محرك إنزلاق ثالث كي يتحكم في زاوية دوران الدائرة الداخلية. على الرغم من أننا سنستخدمه كزاوية، اضبط محرك الإنزلاق ليظهر الرقم من 0 إلى 60 بمقدار تزايد 0.01 وبسرعة 0.4 (في إعدادات الرسوم المتحركة). (تحتاج إلى تعديل هذه الإعدادات لاحقاً). سمي هذا المحرك α .

2. ارسم الآن الدائرة الخارجية. سوف نقوم بذلك باستخدام أمر موجود في منطقة الإدخال، عوضاً عن أدوات الرسم. أدخل الصيغة التالية: [(0,0), a]. تأكد من أن محرك الإنزلاق a يتحكم في مقاس الدائرة.

3. سوف نرسم الآن النقطة P ذات المعادلات الوسيطية :

$$x = (a - b)\cos\alpha + b\cos\left(\frac{a-b}{b}\alpha\right)$$
$$y = (a - b)\sin\alpha - b\sin\left(\frac{a-b}{b}\alpha\right)$$

- إدخل المعادلة $x\_t = (a\text{-}b)*\cos(\alpha)+b*\cos((a\text{-}b)/b*\alpha)$ في منطقة الإدخال.
- الآن أدخل المعادلة $y\_t = (a\text{-}b)*\sin(\alpha)\text{-}b*\sin((a\text{-}b)/b*\alpha)$
- أخيراً، أدخل الصيغة $P=(x\_t,y\_t)$

41

حول هذا النشاط

يعطي هذا النشاط الفرصة للطلبة لإستكشاف سلوك الرسوم البيانية للهيبوسيكلويد وعلاقتها بالمنحنيات. يقدم كتاب الطالب التعليمات المطلوبة لرسم شكل مبسط للهيبوسيكلويد حيث يقوم الطلاب بعد ذلك بتغيير قيمة المتغيرات المستخدمة في الرسم لإيجاد الرسم المطلوب ومن ثم يقومون بدراسة خصائص المنحنيات الناتجة من ذلك. ويمكن للطلبة التوسع في استكشافاتهم عند وجود المزيد من الوقت.

يجمع هذا النشاط العديد من موضوعات الرياضيات المختلفة، بما في ذلك علم المثلثات، والمعادلات الوسيطية والنمذجة الرياضية. يتحدث علماء الرياضيات في كثير من الأحيان عن أهمية الأناقة (وحتى الجمال) في الرياضيات، لذا فإن هذا الموضوع سوف يعطي فرصة جيدة لاستكشاف هذه الأفكار.

اجابات الأسئلة

1. تجدر الإشارة إلى ضرورة اجراء التعديلات المطلوبة على محرك الانزلاق. فعلى سبيل المثال، السرعة العالية في الرسم سوف تؤدي إلى ظهور نقاط متقطعة عوضاً عن منحنى إنسيابي.

2. قد لا يكون الطلاب على دراية كافية بواجهة سطر الأوامر، وفي هذه الحالة نقوم برسم دائرة باستخدام دالة معرفة تلقائياً في البرنامج والتي ستسمح لنا بالتحكم في نصف قطرها باستخدام محرك الانزلاق. ويمكننا الحصول على نتيجة مشابهة باستخدام أدوات الرسم، ولكن استخدام سطر الأوامر هو على الارجح أبسط هنا. ومن الممكن استخدام نهج مماثل في وقت لاحق.

3. يتم تزويد الطلاب هنا بالمعادلات الوسيطية المرتبطة بالهيبوسكلويد. ويمكنك بالطبع أن تطلب من الطلاب اشتقاق هذه المعادلات، أو البحث عن اشتقاقها.

ويعتمد الاشتقاق على ما يلي:

يتم ايجاد موقع النقطة P عن طريق ايجاد مركز الدائرة الداخلية ثم يتم إضافة إزاحة لموقع P بالنسبة لمركز الدائرة.

زاوية دوران الدائرة الداخلية هي α وبالتالي فإن إحداثيا النقطة P هما

$$x = (a - b)\cos\alpha + x\text{-offset}$$
$$y = (a - b)\sin\alpha + y\text{-offset}$$

حيث x-offset هو مقدار الإزاحة الأفقية، y-offset هو مقدار الإزاحة الرأسية.

لنفترض أن النقطة P تنطلق من موقع قريب جداً لنقطة الأصل عندما يكون $\alpha = 0$ وتدور بزاوية قياسها β حول مركز الدائرة الصغيرة في حين أن الدائرة الصغيرة تدور بزاوية قياسها α حول مركز الدائرة الكبيرة. وبالتالي فإن:

$$x = (a - b)\cos\alpha - b\cos\beta$$
$$y = (a - b)\sin\alpha + b\sin\beta$$

وأخيراً فإن كلاً من الزاويتين α و β مرتبطتان بالمعادلة التالية:

$$(a - b)\,\alpha = b\beta \Rightarrow \beta = \frac{(a - b)}{b}$$

وهذا ناتج بالطبع من تدحرج الدائرة الصغيرة حول الدائرة الكبيرة من الداخل دون الخروج منها بحيث يتساوى طول المحيط المقطوع لكلا الدائرتين.
وبتعويض قيمة β في المعادلة السابقة نحصل على الصيغة الوسيطية الموجودة في كتاب الطالب.

4. ليس من الضرورة رسم الدائرة الداخلية ولكن رسمها سوف يجعل سلوك البناء المطلوب أكثر وضوحاً. من الممكن اخفاء الدائرة أو أي عناصر أخرى غير مطلوبة وذلك في حال أراد الطالب إظهار الهيبوسكلويد فقط بدون وجود عناصر أخرى تشوه الصورة المطلوبة.

5. يجب تذكير الطلاب بأهمية ضبط محرك الانزلاق الذي يمثل قياس الزاوية وذلك للحصول حركات تنتج منحنى انسيابي مكتمل.

6. من الممكن أن يبدأ الطلاب دراستهم للأنماط الناتجة عندما تكون $b=1$ ومن ثم يتم دراسة الحالة $b = 2$ وهكذا. ستنشأ بعض الحالات المثيرة للاهتمام ومنها ما يلي:

- عندما تكون النسبة $a{:}b = 2{:}1$ فإن النقطة المراد تتبعها تقع على قطر الدائرة الكبرى ويعرف ذلك بعائلة الطوسي نسبة إلى عالم الفلك ناصر الدين الطوسي الذي استخدمها في دراساته الفلكية في القرن الثالث عشر الميلادي .
- عندما يكون $b = 1$ و a عدد صحيح كبير فإن أنماط مغلقة وغير متداخلة سوف تتشكل .
- بشكل عام فإنه إذا كانت النسبة $a{:}b$ يمكن صياغتها في أبسط صورها فإن أنماطاً على شكل نجوم ستتشكل.

7. قد يحتاج الطلاب إلى قضاء بعض الوقت في تجريب استخدام أنماط هيبوتروكويد.

و يمكن أن يكون ذلك مرضياً بشكل خاص، كما ويمكن نسخ المخططات الناتجة لإستخدامها في عمل معرض أو فهرس للحالات المختلفة الناتجة. ومن الجدير بالذكر مرة أخرى أنه في الحالة التي تكون فيها النسبة: $a{:}b = 2{:}1$ سنحصل على معادلة مستقيم في حالة الهيبوسيكلويد، ولكننا سنحصل على مجموعة من القطوع الناقصة في الحالة العامة للهيبوتروكويد.

8. من الممكن الحصول على الأنماط من خلال تتبع ثلاث نقاط مختلفة واقعة على نصف قطر الدائرة الداخلية. وبصرف النظر عن كون الشكل الناتج هو شكل جمالي، فإن من الممكن قراءة ما يحدث على أنه وصف لأثر تعديل المسافة بين النقطة المراد تتبعها ومركز الدائرة الداخلية.

9. من الممكن اشتقاق المعادلات الوسيطية للإبيسيكلويد بنفس طريقة اشتقاق الهيبوسيكلويد وهي كالتالي:

$$x = (a + b) \cos\alpha - b \cos\left(\frac{a + b}{b}\alpha\right)$$

$$y = (a + b) \sin\alpha - b \sin\left(\frac{a + b}{b}\alpha\right)$$

يمكن أن يقوم الطلاب بعمل الإنشاء بنفس طريقة إنشاء الهيبوسيكلويد مع مراعاة التغير في المعادلات الوسيطية.

من الممكن كذلك ضبط الإنشاء لرسم كلاً من الإبيسيكلويد والهيبوسيكلويد على نفس الدائرة الأساسية ، وهذا سيعطينا نطاق أوسع من التصاميم.

فرص التقويم

من الممكن تقديم هذا النشاط بشكل مرن تماماً مما سيسمح بوجود مجموعة من فرص التقييم. يمكن للطلاب ببساطة اتباع التعليمات الموجودة في كتاب الطالب والتحقيق في سلوك البناء. سوف تسمح هذه الطريقة بإلقاء الضوء على الاستراتيجية في تفكير الطلاب ومقدرتهم على حل المسائل المختلفة. ومن الممكن اتباع نهج أكثر تحد من خلال سؤال الطلاب إثبات الصيغ المعطاه والمتعلقة بالهيبوسيكلويد أو اشتقاق الصيغ المتعلقة بالإبيسيكلويد. وهذا من شأنه تسهيل استعراض مهارات الطلاب في النمذجة .

النشاط الثالث: متسلسلات القوى للدوال المثلثية

النشاط الثالث

متسلسلات القوى للدوال المثلثية

متسلسلة القوى هي متسلسلة لا نهائية من الحدود التي تحتوي على أسس متزايدة لمتغيّر.

إذا كان بالإمكان كتابة الدالة على شكل متسلسلة قوى، فإن:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \ldots \quad [1]$$

لكتابة الدالة على شكل متسلسلة قوى، فإننا نحتاج إلى إيجاد القيم الصحيحة للمعاملات $a_0, a_1, a_2,$

سوف نقوم في هذا النشاط باستخدام طريقة تجريبية لإيجاد قيم تقريبية للمعاملات في متسلسلة القوى للدالتين $\sin x$ و $\cos x$.

سوف نبدأ بالدالة $\cos x$، ثم نجد تقريبات متتالية لمتسلسلة القوى. نستطيع إيجاد قيمة a_0 مباشرةً.

1. a. ما قيمة $\cos x$ عندما $x=0$؟
   b. ما قيمة $a_1 x$ عندما $x=0$؟
   c. ما قيمة a_0 ؟ برر إجابتك.

سوف نستخدم الرمز $C_1(x)$ للدلالة على أول تقريب أوجدناه لمتسلسلة القوى لـِ $\cos x$:

$$C1(x) = 1 \quad [2]$$

سوف ننظر الآن في مدى دقة هذا التقريب.

2. a. إفتح ملفاً جديداً في جيوجبرا.
   b. من قائمة **الخيارات** (Options) استخدم الخيار **متقدم** (Advanced) ، واختر منه **تغيير وحدة الزاوية** (Angle unit) لكي تكون بالتقدير الدائري.
   c. اختر **منطقة التمثيلات البيانية** (Graphic View) من قائمة الخيارات، ثم اضبط القيم الصغرى والعظمى للمتغيرين x و y لتكون من -2 إلى 2.
   d. أدخل المعادلة $y=\cos x$ في منطقة **الإدخال** (Input) والموجودة أسفل الشاشة.
   e. اضغط بالزر الأيمن على منحنى $y=\cos x$ واختر **خصائص الموضوع** (Object Properties).
   اختر الآن أمر **النمط** (Style)، ثم غيّر سماكة الخط إلى قيمة أكبر قليلاً من 3 نقاط.
   اختر الآن أمر **اللون** (colour) وأعط الرسم لوناً مميزاً مثل اللون الأحمر مثلاً.
   f. أدخل الآن أمر المعادلة $y=1$ في منطقة الإدخال. سوف يقوم جيوجبرا تلقائياً بتسمية هذا المستقيم .
   اضغط بالزر الأيمن على المستقيم (أو على معادلته في **منطقة الجبر** (Algebra View) على يسار النافذة) واستخدم **إعادة التسمية** (Rename) لتغيير التسمية إلى C1.

44

"موهبة .. حيث تنتمي"

حول هذا النشاط

يستكشف هذا النشاط متسلسلات القوى المرتبطة بالدوال المثلثية حيث يتم الربط مع مواضيع متقدمة في الرياضيات مثل متسلسلة تايلور. فالنهج الذي سيتم إتباعه مع الطلاب هنا هو نهج كمي وغير رسمي حيث سيتم استخدام أحد تقنيات التمثيل البياني للتحقق في سلوك سلسلة من الدوال.

خصائص الأداء المتقدم

- **تقدير الروابط** – الربط بين الخبرات الماضية للبحث عن تعميمات محتملة
- **التبصر في البنية الرياضية الأساسية والمسائل متعددة الخطوات** – تقسيم المهمة إلى عدة أجزاء وتقرير الطريقة الملائمة لكل خطوة ومن ثم حل النشاط

توصيات أسلوب التدريس

يحتاج الطلاب إلى استخدام جهاز الحاسب وأحد تقنيات التمثيل البياني مثل جيوجبرا. هذا النشاط ملائم للعمل بشكل ثنائي حيث يشترك الطلاب في العمل على الحاسب.

اجابات الأسئلة

1. a. 1

b. 0

c. $a_0 = 1$ وذلك لأن جميع حدود المتسلسلة اللاحقة تساوي صفر عندما $x = 0$ ، ونحن نعرف أن مجموع هذه المتسلسلة يجب أن يساوي 1.

2. أنظر إلى التمثيل الكامل والمُعطى في كتاب الطالب.

3. سوف يجد الطلاب أن من المستحيل إيجاد تقريب أفضل من الطريقة المقترحة في كتاب الطالب.

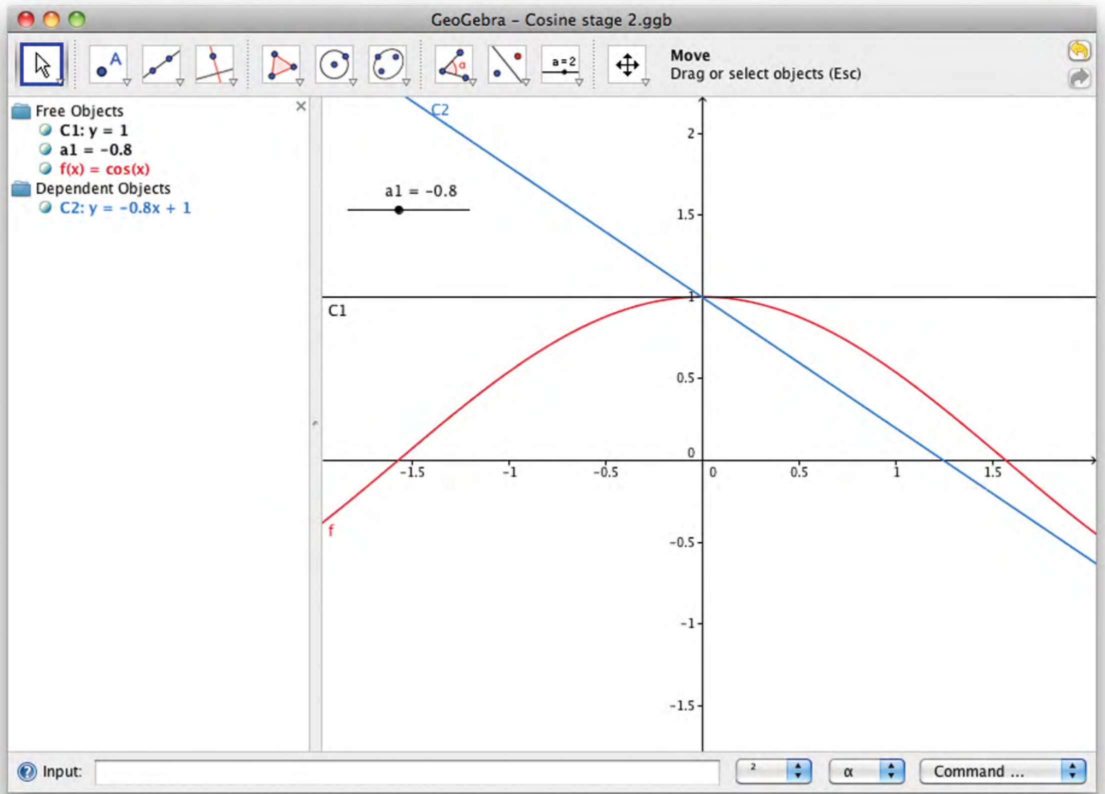
الشكل التالي يبين محاولة أخرى للحل.

يوجد مشكلتين واضحتين هنا:

أولاً: فشل التقريب في المنطقة التي تكون فيها قيم x قريبة من 0 مع أنها نجحت مُسبقاً.

ثانياً: على الرغم من أننا قد نجحنا في إيجاد أفضل تطابق من أجل قيم كبيرة للمتغير x، ويقابل ذلك حقيقة أن التمثيل البياني الجديد سيكون أقل دقة لقيم سالبة للمتغير x كما هو موضح.

من المهم التأكد أن نفس الحجة سوف تستبعد إدراج أي قوى فردية للمتغير x في تقديراتنا التقريبية ، أي تحسن في تقريب القيم الموجبة للمتغير x سوف يؤدي إلى تردي في تقريب القيم السالبة، والعكس صحيح. ويمكن النظر إليها من ناحية أخرى وهي أن الدالة $\cos x$ زوجية وأن جميع حدود متسلسلة القوى هي دوال زوجية أيضاً. يثير السؤال 4 هذه المسألة، ومن الضروري جداً التأكد من فهمهم لها قبل مواصلة الحل.



4. كل ما هو مطلوب هنا هو تقدير غير رسمي لحقيقة أن إضافة دوال ذات قوى فردية للمتغير x لن يعطي أي إسهام مفيد. سيتم إلغاء أي تقدير مقارب لقيم x الموجبة من خلال أسوأ تقدير لقيم x السالبة، والعكس صحيح.

5. بعد إثبات أننا نقوم بحساب تقريبي لمعاملات القوى الزوجية فقط للمتغير x في متسلسلة القوى، فيجب على الطلاب المضي قدماً في تقدير معامل x^2.

يجب على الطلاب إيجاد أفضل قيمة لـ $a2$ وهي -0.5 . الشكل الموضح أدناه يبين ذلك.

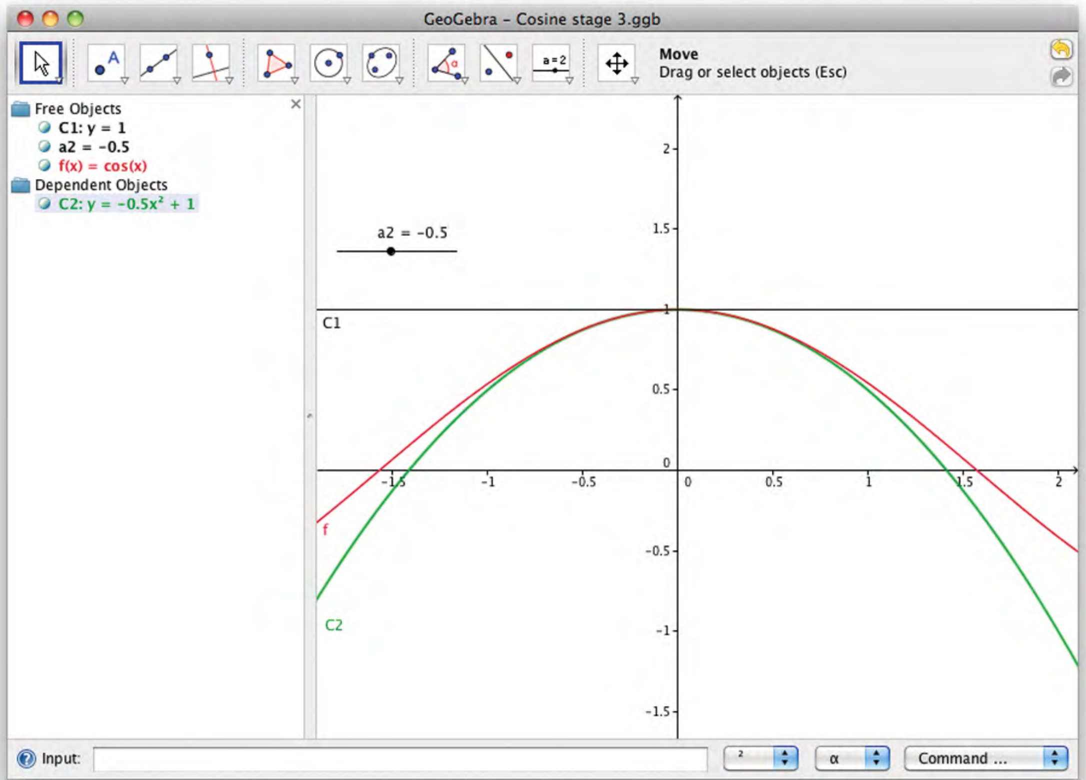
سوف نستخدم الرمز C1 للدلالة على التقريب الأول و C2 للدلالة على التقريب الثاني وهكذا. لقد قمنا برفض المحاولة السابقة (خطية) في محاولتنا لإيجاد C2 ولذلك نستخدم C2 للتقريب باستخدام معادلة تربيعية

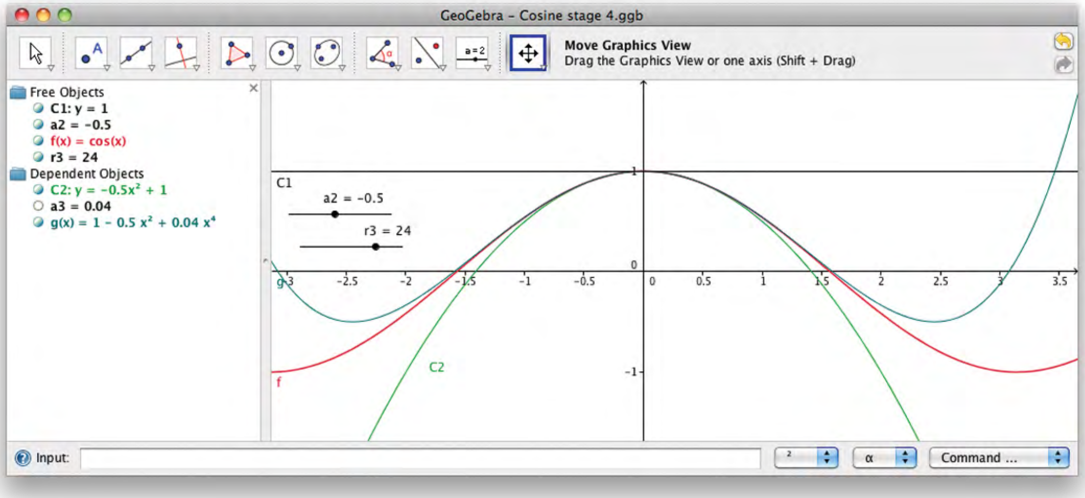
6. سوف يحاول الطلبة الآن إيجاد المعاملات لقوى x الزوجية العليا. من الملاحظ أن قيم هذه المعاملات سوف تصغر بسرعة كبيرة وذلك لأن المعاملات هي مقلوب المضروب، ولذا فنحن بحاجة إلى استخدام محرك الانزلاق بعناية في البرنامج.

يجب أن يحصل الطلاب على تقدير مقارب للقيمة 24. كما يجب أن يلاحظ الطلاب أن إضافة الحد x^4 سوف يعني إضافة نقطة التفاف للأعلى في التمثيل البياني للدالة وسوف يكون مقارباً أكثر لشكل منحنى دالة الجيب تمام.

7. a. هذا يمثل تقريب جيد حول القيمة $x = \pm \frac{\pi}{2}$.

b. معامل الحد x^{6} هو $-\frac{1}{720}$. يحتاج الطلاب إلى التجربة مع ضبط محرك الانزلاق للتأكد من الوصول إلى هذه القيمة.





8. يحتاج الطلبة إلى معرفة أن الدالة $\sin x$ هي دالة فردية وأن جميع القوى للمتغير x في المتسلسلة المطلوبة يجب أن تكون أعداد فردية فقط.

المتسلسلة المطلوبة هي:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \ldots$$

$$= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} \ldots$$

وأخيراً قد ترغب ومن خلال إيجاد مشتقة كل حد من حدود المتسلسلة في إثبات العلاقات التالية:

$$\frac{d(\cos x)}{dx} = -\sin x$$

$$\frac{d(\sin x)}{dx} = \cos x$$

فرص التقويم

يشتمل هذا النشاط على فرص جيدة للبحث في فهم الطلاب لكل من:

- سلوك الدوال الزوجية والفردية
- عملية إيجاد تقريب متتابع ومتقارب.

الوحدة الخامسة

القطوع المخروطية والمعادلات الوسيطية

نظرة عامّة

تهدف هذه وحدة إلى تشجيع الطلاب على استكشاف القطوع المخروطية والدائرة.

سوف يقوم الطلاب بتقدير المساحة المحصورة تحت منحنى معين باستخدام طرق مختلفة ومقارنة مدى دقة التقديرات التي تم الحصول عليها. بالرغم من أن كل نشاط من أنشطة هذه الوحدة يشتمل بشكل مستقل على أهداف تعليمية خاصة به، إلا أنّ العديد من هذه الأنشطة تطور فكرة تقدير مساحات مناطق حدودها دوال غير خطية وذلك عن طريق مجموع مساحات أشكال معينة تمثل هذه المنطقة مثل المستطيلات والمثلثات.

يجب أن يدرك الطلاب أهمية تقسيم المنطقة إلى أكبر عدد ممكن من الأجزاء الصغيرة من أجل الحصول على تقدير أدق للمساحة، وهذا هو المبدأ الذي يقوم عليه التكامل.

يحتاج الطلاب في هذه الوحدة إلى استخدام برمجية الجداول الإلكترونية وتقنية تمثيل بياني مناسبة مثل برنامج جيوجبرا وكذلك الجداول الإلكترونية. يجب على الطلاب مراعاة الدقة في حساباتهم ومقارنة ذلك بطرق مختلفة.

الأهداف التعلميّة للوحدة

- تطوير فهم أوسع لخصائص القطوع المخروطية.
- فهم كيفية تقدير مساحة منطقة محصورة بمنحنى عن طريق عدد محدود من العمليات.
- فهم كيفية كتابة معادلات الدوال باستخدام معادلات وسيطية.

المعرفة السابقة

يجب أن يكون لدى الطلاب المقدرة على الفهم والخبرة في التعامل مع التمثيلات البيانية لكل من الدوائر والمعادلات التربيعية والقطوع المخروطية.

كما ينبغي أن يكونوا على دراية باستخدام الجداول الإلكترونية وعمل التمثيلات البيانية بشكل يدوي وباستخدام بعض تقنيات التمثيل البياني مثل جيوجبرا.

خصائص الأداء المتقدم

القيم والاتجاهات والسمات

- **الإبداع** (الأنشطة الأول والثاني والثالث)
- **المجازفة** (النشاط الثالث)
- **المثابرة** – المقدرة على الاستمرارية في الحل حتى انتهاء المهمة(النشاطان الثالث والرابع)

المهارات المتقدّمة

- **الاستقصاء** – المقدرة على اتباع خبرات جديدة في التعلّم عن طريق المحاولة بشكل نشط لربطها مع المعرفة القائمة و تحديد وسيلة مناسبة للتفكير في العمل (النشاط الثاني)
- **التخيل والقدرات فوق المعرفية** – المقدرة على عمل الافتراضات وبيان الأسباب و البحث عن أدلة مؤيدة للفرضيات (النشاط الأول)

- الطلاقة(النشاطان الأول و الثاني)
- الدقة في الحساب – المقدرة على العمل بفعالية من خلال قواعد محددة(النشاط الرابع)

المعرفة والفهم المتقدّمان

- تقدير الروابط (النشاط الرابع)
- فهم "الأفكار الكبيرة" ووضوح المفاهيم (النشاط الثالث)

الخطّة الزمنيّة

ستّ ساعات تقريبًا

المصادر

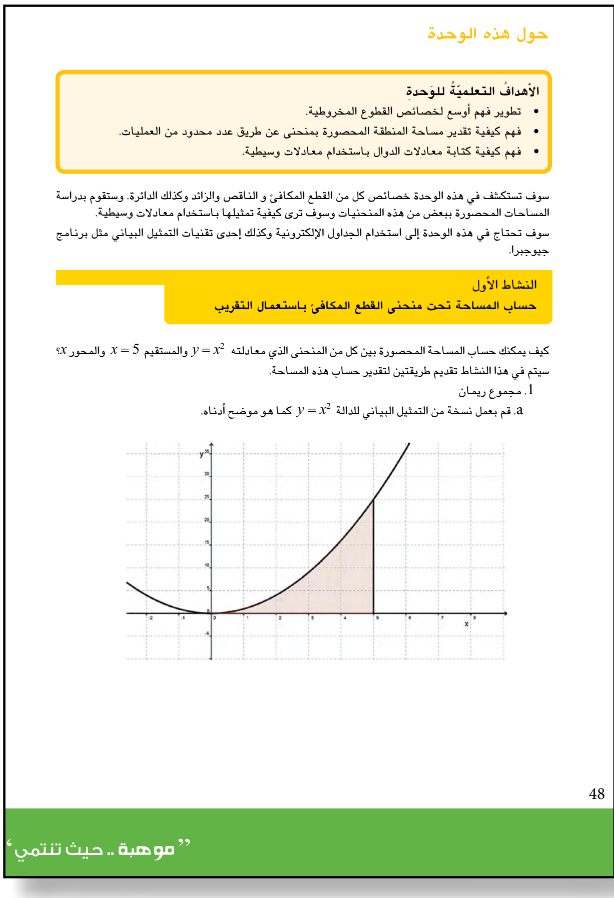
- أدوات ملائمة للرسم وورق رسم
- برمجية الجداول الإلكترونية
- تقنية تمثيل بياني.

التكنولوجيا

لقد تم استخدام برنامج جيوجبرا لحل معظم الأمثلة التي تتطلب تقنيات تمثيل بياني وعلى الرغم من ذلك فهناك العديد من البرامج التي يمكن استخدامها لحل هذه الأمثلة.

يعتبر برنامج جيوجبرا من البرامج المجانية التي يمكن للطالب تحميلها على جهازه بسهولة. حيث سيساعد هذا البرنامج الطلبة على استكشاف العديد من الأفكار الموجودة في هذه الوحدة. ويمكن تحميل البرنامج والمواد الأخرى الداعمة لهذا البرنامج من خلال الموقع الإلكتروني www.geogebra.com.

النشاط الأوّل: حساب المساحة تحت منحنى القطع المكافئ باستعمال التقريب


حول هذه الوحدة

الأهدافُ التعلميّةُ للوَحدةِ
- تطوير فهم أوسع لخصائص القطوع المخروطية.
- فهم كيفية تقدير مساحة المنطقة المحصورة بمنحنى عن طريق عدد محدود من العمليات.
- فهم كيفية كتابة معادلات الدوال باستخدام معادلات وسيطية.

سوف تستكشف في هذه الوحدة خصائص كل من القطع المكافئ و الناقص والزائد وكذلك الدائرة. وستقوم بدراسة المساحات المحصورة ببعض من هذه المنحنيات وسوف ترى كيفية تمثيلها باستخدام معادلات وسيطية.
سوف تحتاج في هذه الوحدة إلى استخدام الجداول الإلكترونية وكذلك إحدى تقنيات التمثيل البياني مثل برنامج جيوجبرا.

النشاط الأول
حساب المساحة تحت منحنى القطع المكافئ باستعمال التقريب

كيف يمكنك حساب المساحة المحصورة بين كل من المنحنى الذي معادلته $y=x^2$ والمستقيم $x=5$ والمحور x؟
سيتم في هذا النشاط تقديم طريقتين لتقدير حساب هذه المساحة.
1. مجموع ريمان
a. قم بعمل نسخة من التمثيل البياني للدالة $y=x^2$ كما هو موضح أدناه.

48

"موهبة .. حيث تنتمي"

حول هذا النشاط

- فهم أنه يمكن تقدير مساحة أي منطقة محصوره بمنحنى عن طريق ايجاد مجموع مساحة مستطيلات داخل المنطقة ومن الممكن تحسين هذا التقدير من خلال زيادة عدد المستطيلات داخل المنطقة.
- تصميم نموذج لطريقة عشوائية باستخدام جداول إلكترونية وبالتالي حساب المساحة تحت منحنى. يطرح هذا النشاط السؤال التالي – كيف يمكن إيجاد مساحة منطقة واقعة تحت منحنى؟ يطور هذا النشاط طريقتين مختلفتين لحساب هذه المساحة وهما: مجموع ريمان و الطريقة العشوائية والمعتمدة على قيم عشوائية.

- تعتمد طريقة ريمان على تقسيم المنطقة إلى مستطيلات ومن ثم يتم ايجاد مجموع مساحات هذه المستطيلات. وكلما زاد عدد المستطيلات داخل المنطقة كلما حصلنا عل تقدير أدق لهذه المساحة.
- تستند طريقة الأعداد العشوائية على الربط بين كل من الاحتمالات و حساب النسبة، ويكون ذلك من خلال محاكاة تجربة رمي سهام باتجاه هدف معين بحيث يكون لكل سهم نفس إحتمال اصابة أي مكان، حيث ستعطي نسبة اصابته لمنطقة معينة تقدير لنسبة اصابة الهدف الموجود داخل هذه المنطقة. سوف نستخدم هذه الطريقة في هذا النشاط لتقدير المساحة المحصورة بمنحنى كما سنستخدمها مرة أخرى لتقدير مساحة دائرة.

خصائص الأداء المتقدم

- **الإبداع** – من خلال تصور تقسيم المنطقة الواقعة تحت منحنى إلى مستطيلات أصغر بشكل متزايد، لذا يجب على الطلاب البدء في بناء مفاهيم جديدة سيكونون بحاجة لها في وقت لاحق من أجل دراسة حساب التكامل.
- **التخيل والقدرات فوق المعرفية** – إن اجراء المقارنة بين الطريقتين المستخدمتين تتطلب من الطلاب أن يفكرون بشكل انتقادي حول نقاط القوة والضعف لكل طريقة.

توصيات أسلوب التدريس

ينبغي أن يعمل الطلاب في مجموعات صغيرة، كما ينبغي عليهم مناقشة النتائج التي توصلوا إليها مع بعضهم البعض كلما تقدموا في الحل. يحتاج الطلبة إلى استخدام أجهزة الحاسب لحل السؤال 2.

إجابات الأسئلة

1. a و b.

كلما كان التمثيل البياني واضحاً ومعقولاً فهو بالتأكيد سيكون مفيداً، فالمهمة لا تتطلب أخذ القياسات من التمثيل البياني، وبالتالي فإن دقة الرسم البياني ليست ضرورية.

c. $30 <$ المساحة < 55

d. أنظر التمثيلات البيانية للطلاب

e. $35.625 <$ المساحة < 48.125

f. $38.59 <$ المساحة < 44.84

الإجابة الدقيقة هي $41\frac{2}{3}$. يمكن حث الطلاب على استخدام النقطة الواقعة في منتصف الفترة. وفي هذه الحالة ستكون تقديرات المساحة هي:

c. 42.5

e. 48.875

f. 41.72

2. يمكن العمل على هذا السؤال من خلال استخدام الأعداد العشوائية والموجودة في أي آلة حاسبة علمية. ولكن نظراً للحاجة إلى توليد كمية كبيرة من الأعداد فإن استخدام الجداول الإلكترونية سيكون أكثر فعالية.

إن صورة الجدول الالكتروني الموجودة في كتاب الطالب سوف تساعد الطلاب على استعمال الصيغ الصحيحة في الجدول الإلكتروني. يجب ملاحظة أن الجدول الإلكتروني لن يظهر الصيغ ، فكل ما سيراه الطالب هو المخرجات. لذا فإننا نوصي أن يقوم المعلم بمحاولة التدرب على انشاء الجدول بنفسه لكي يكون لديه الثقة في استخدامه.

لاحظ ان الدالة ()RAND سوف تولد أعداد عشوائية ما بين 0 و 1، وبالتالي لكي يتم توليد عدد عشوائي يمثل الإحداثي x ما بين 0 و 5 نستخدم الصيغة ()5*RAND = وبنفس الطريقة يمكن توليد عدد عشوائي يمثل الإحداثي y ما بين 0 و 25 باستخدام الصيغة ()25*RAND = .

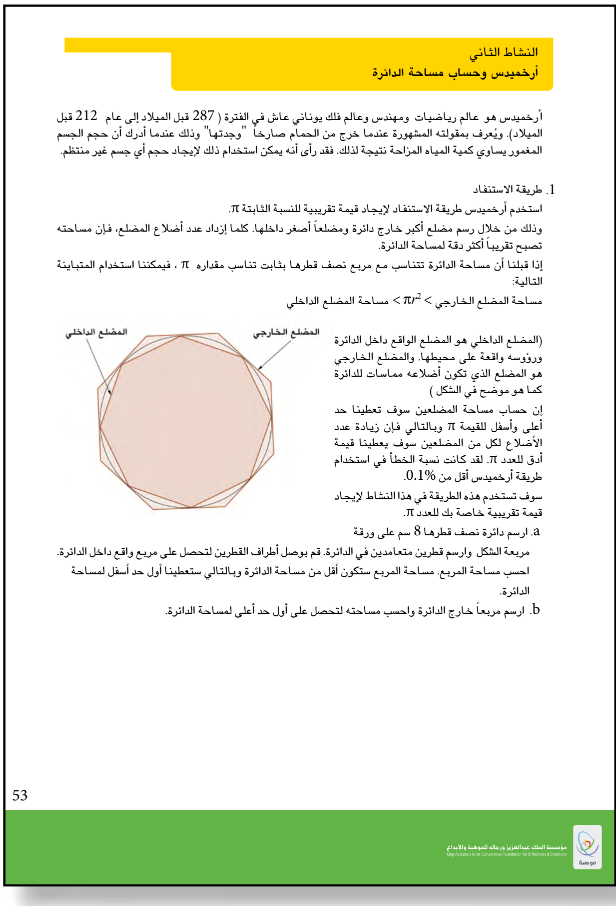
ولكي يتم اختبار ما اذا كان الإحداثي y أقل من المقدار x^2 ، نقوم بحساب المقدار x^2 في الخلية C2. وبالتالي يتم انشاء الإختبار في الخلية D2 باستخدام الأمر IF(B2<C2,1,0) = وهذا يعني أنه إذا كان B2<C2 فإن النتيجة تكون هي 1 عدا ذلك تكون النتيجة 0. وبالتالي ستحصل على القيمة 1 إذا كانت أقل من 0 وستحصل على 0 عدا ذلك في الخلية D2.

نستطيع وضع الحسابات الثلاث في أي مكان في الجدول الإلكتروني. وننصح مرة أخرى المعلم باتباع التعليمات الموجودة في كتاب الطالب لكي تكون لديه ثقة أكبر في استخدام الجداول الإلكترونية.

تعتمد التقديرات على الأعداد العشوائية التي يتم توليدها، وعلى عدد مرات محاكاة التجارب. الإجابة الدقيقة لهذا السؤال هي $41\frac{2}{3}$. سيكون هناك فرصة أخرى لاستعمال هذه الطريقة في النشاط الثاني.

فرص التقويم

ينبغي أن يكون الجزء المتعلق بالرياضيات في هذا النشاط في متناول جميع الطلاب. يمكن اختبار مدى فهم الطلبة للأساسيات عن طريق طرح أسئلة حول كيفية تحسين التقديرات بشكل أدق، ومن الممكن مناقشة استخدام شبة المنحرف في السؤال الأول.



النشاط الثاني
أرخميدس وحساب مساحة الدائرة

أرخميدس هو عالم رياضيات ومهندس وعالم فلك يوناني عاش في الفترة (287 قبل الميلاد إلى عام 212 قبل الميلاد). ويُعرف بمقولته المشهورة عندما خرج من الحمام صارخاً "وجدتها" وذلك عندما أدرك أن حجم الجسم المغمور يساوي كمية المياه المزاحة نتيجة لذلك. فقد رأى أنه يمكن استخدام ذلك لإيجاد حجم أي جسم غير منتظم.

1. طريقة الاستنفاد

استخدم أرخميدس طريقة الاستنفاد لإيجاد قيمة تقريبية للنسبة الثابتة π.

وذلك من خلال رسم مضلع أكبر خارج دائرة ومضلعاً أصغر داخلها. كلما إزداد عدد أضلاع المضلع، فإن مساحته تصبح تقريباً أكثر دقة لمساحة الدائرة.

إذا قبلنا أن مساحة الدائرة تتناسب مع مربع نصف قطرها بثابت تناسب مقداره π ، فيمكننا استخدام المتباينة التالية:

مساحة المضلع الخارجي > πr^2 > مساحة المضلع الداخلي

(المضلع الداخلي هو المضلع الواقع داخل الدائرة ورؤوسه واقعة على محيطها. والمضلع الخارجي هو المضلع الذي تكون أضلاعه مماسات للدائرة كما هو موضح في الشكل)

إن حساب مساحة المضلعين سوف تعطينا حد أعلى وأسفل للقيمة π وبالتالي فإن زيادة عدد الأضلاع لكل من المضلعين سوف يعطينا قيمة أدق للعدد π. لقد كانت نسبة الخطأ في استخدام طريقة أرخميدس أقل من 0.1%.

سوف تستخدم هذه الطريقة في هذا النشاط لإيجاد قيمة تقريبية خاصة بك للعدد π.

a. ارسم دائرة نصف قطرها 8 سم على ورقة مربعة الشكل وارسم قطرين متعامدين في الدائرة. قم بوصل أطراف القطرين لتحصل على مربع واقع داخل الدائرة. احسب مساحة المربع. مساحة المربع ستكون أقل من مساحة الدائرة وبالتالي ستعطينا أول حد أسفل لمساحة الدائرة.

b. ارسم مربعاً خارج الدائرة واحسب مساحته لتحصل على أول حد أعلى لمساحة الدائرة.

53

حول هذا النشاط

- فهم أن من الممكن تقدير مساحة الدائرة كمجموع مساحات مضلعات ويمكن تحسين هذا التقدير عن طريق زيادة عدد المضلعات.
- عمل نموذج عشوائي باستخدام الجداول الإلكترونية لتقدير مساحة الدائرة وبالتالي ايجاد قيمة تقريبية للمقدار π.

في السؤال الأول من هذا النشاط سوف يحاول الطلاب ايجاد حد أعلى وأسفل لمساحة دائرة عن طريق ايجاد مساحة مضلع داخلي وآخر خارجي للدائرة. وعند زيادة عدد أضلاع المضلعين فإن قيمتي المساحتين ستكونان متقاربتان مما سيعطينا قيمة تقريبية أدق لمساحة الدائرة.

إن تقديم بعض الإرشادات حول كيفية حساب مساحة المثلثات التي تشكل المضلعين ستعطي الطلاب الفرصة لاستكشاف طرق مختلفة بأنفسهم. يمكن التوسع في هذا السؤال من خلال الطلب منهم ان يقوموا بتكرار الفقرة (e) باستخدام مضلعات ذات عدد مختلف من الأضلاع مثل 18 ضلع و22 ضلع و24 ضلع. سيكون ذلك ملائماً جداً في حال عمل الطلبة في مجموعات ويمكنهم مشاركة ما توصلوا إليه فيما بينهم. كما يمكن للمعلم تعريف الطلاب ما يعنيه مصطلح مضلع خارجي وداخلي.

يعطي السؤال الثاني الفرصة للطلبة لتطبيق طريقة الأعداد العشوائية والتي تم تقديمها في النشاط الأول. يحتاج الطلاب إلى استخدام قانون مساحة الدائرة لإيجاد الصيغة المناسبة. سيستفيد الطلاب الذين لديهم معرفة مسبقة بالجداول الإلكترونية في تصميم الجدول الإلكتروني الخاص بهم.

خصائص الأداء المتقدم

- **الإبداع** – يقوم الطلاب بتصميم الجدول الإلكتروني في السؤال الثاني واستخدامه لتقدير قيمة π
- **الإستقصاء** – يطلب من الطلاب ابتكار طريقة خاصة بهم من أجل إيجاد مساحة المضلعات الموجودة في السؤال الأول، وذلك باستخدام معرفتهم المسبقة في علم المثلثات.

توصيات أسلوب التدريس

يجب على الطلاب العمل على هذا النشاط في مجموعات ثنائية أو في مجموعات صغيرة والتعاون فيما بينهم، كما يجب عليهم مشاركة أفكارهم والطرق التي سيستخدموها لهذا النشاط. الوصول إلى أجهزة الحاسب مرغوب فيه للغاية للعمل على حل السؤال 2.

إجابات الأسئلة

يجب تشجيع الطلاب على تطوير الطرق الخاصة بهم في عمل تمثيلات بيانية دقيقة، وبالتالي لن يتم تقديم أي تعليمات. سيتم اعطاء النتائج الدقيقة من أجل التأكد من الحلول.

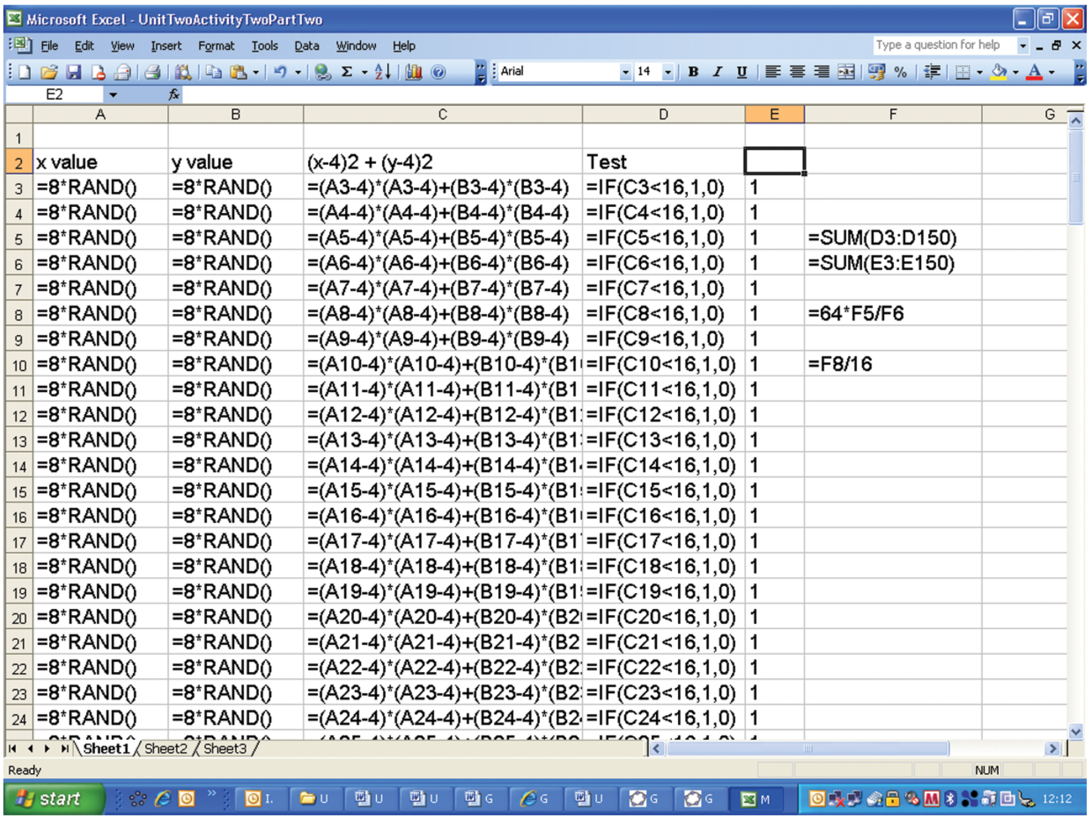
1. a. 128
   b. 256
   c. $2 < \pi < 4$
   d. 181.019 < المساحة < 212.077
   $2.828 < \pi < 3.314$
   e. 195.934 < المساحة < 203.686
   $3.06 < \pi < 3.18$
   f. 200.92 < المساحة < 201.13
   $3.139 < \pi < 3.142$

2. الجدول الإلكتروني الخاص بهذا السؤال معطى في الشكل أدناه. تمثل الخلية F5 عدد مرات إصابة الهدف داخل الدائرة فيما تمثل الخلية F6 عدد المحاولات. تعطي الخلية F8 قيمة تقريبية لمساحة الدائرة وتعطي الخلية F10 قيمة تقريبية للعدد π. القيمة التقريبية في هذا المثال هي 3.11 (مقربة إلى منزلتين عشريتين). ستتغير هذه القيمة عند إعادة الحسابات في الجدول الإلكتروني وذلك لإعتماده على الأعداد العشوائية التي يتم توليدها. (ويتم ذلك عند الضغط على كل من Ctrl + Alt + F9 في برنامج إكسل)

ينبغي تشجيع الطلاب على دراسة كيفية تحسين تقديراتهم وذلك من خلال اجراء المزيد من التجارب والمحاكاة عن طريق زيادة عدد الصفوف في الجدول الإلكتروني. كما يمكنهم أيضا تحسين الثقة في تقديراتهم عن طريق حساب متوسط عدة تقديرات.

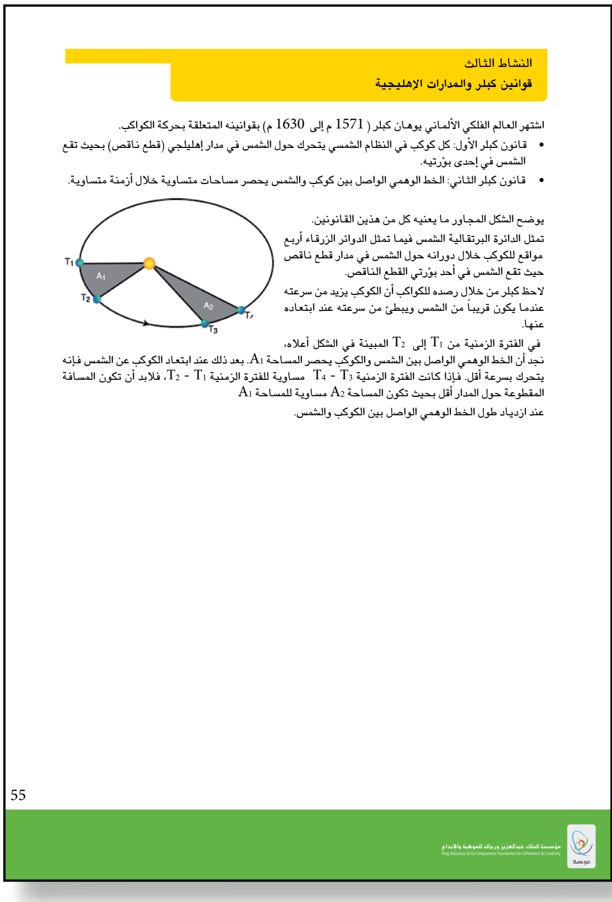
فرص التقويم

يتطلب هذا النشاط المعرفة المسبقة بحساب المثلثات بحيث أن بإمكانهم العمل بشكل مستقل وهذا سيكون مؤشراً على تخصصهم في هذا المجال من علم الرياضيات. يختبر السؤال الثاني مدى قدرة الطلاب على استخدام الجداول الإلكترونية.



Microsoft Excel - UnitTwoActivityTwoPartTwo

	A	B	C	D	E	F
1						
2	x value	y value	(x-4)2 + (y-4)2	Test		
3	=8*RAND()	=8*RAND()	=(A3-4)*(A3-4)+(B3-4)*(B3-4)	=IF(C3<16,1,0)	1	
4	=8*RAND()	=8*RAND()	=(A4-4)*(A4-4)+(B4-4)*(B4-4)	=IF(C4<16,1,0)	1	
5	=8*RAND()	=8*RAND()	=(A5-4)*(A5-4)+(B5-4)*(B5-4)	=IF(C5<16,1,0)	1	=SUM(D3:D150)
6	=8*RAND()	=8*RAND()	=(A6-4)*(A6-4)+(B6-4)*(B6-4)	=IF(C6<16,1,0)	1	=SUM(E3:E150)
7	=8*RAND()	=8*RAND()	=(A7-4)*(A7-4)+(B7-4)*(B7-4)	=IF(C7<16,1,0)	1	
8	=8*RAND()	=8*RAND()	=(A8-4)*(A8-4)+(B8-4)*(B8-4)	=IF(C8<16,1,0)	1	=64*F5/F6
9	=8*RAND()	=8*RAND()	=(A9-4)*(A9-4)+(B9-4)*(B9-4)	=IF(C9<16,1,0)	1	
10	=8*RAND()	=8*RAND()	=(A10-4)*(A10-4)+(B10-4)*(B1	=IF(C10<16,1,0)	1	=F8/16
11	=8*RAND()	=8*RAND()	=(A11-4)*(A11-4)+(B11-4)*(B1	=IF(C11<16,1,0)	1	
12	=8*RAND()	=8*RAND()	=(A12-4)*(A12-4)+(B12-4)*(B1	=IF(C12<16,1,0)	1	
13	=8*RAND()	=8*RAND()	=(A13-4)*(A13-4)+(B13-4)*(B1	=IF(C13<16,1,0)	1	
14	=8*RAND()	=8*RAND()	=(A14-4)*(A14-4)+(B14-4)*(B1	=IF(C14<16,1,0)	1	
15	=8*RAND()	=8*RAND()	=(A15-4)*(A15-4)+(B15-4)*(B1	=IF(C15<16,1,0)	1	
16	=8*RAND()	=8*RAND()	=(A16-4)*(A16-4)+(B16-4)*(B1	=IF(C16<16,1,0)	1	
17	=8*RAND()	=8*RAND()	=(A17-4)*(A17-4)+(B17-4)*(B1	=IF(C17<16,1,0)	1	
18	=8*RAND()	=8*RAND()	=(A18-4)*(A18-4)+(B18-4)*(B1	=IF(C18<16,1,0)	1	
19	=8*RAND()	=8*RAND()	=(A19-4)*(A19-4)+(B19-4)*(B1	=IF(C19<16,1,0)	1	
20	=8*RAND()	=8*RAND()	=(A20-4)*(A20-4)+(B20-4)*(B2	=IF(C20<16,1,0)	1	
21	=8*RAND()	=8*RAND()	=(A21-4)*(A21-4)+(B21-4)*(B2	=IF(C21<16,1,0)	1	
22	=8*RAND()	=8*RAND()	=(A22-4)*(A22-4)+(B22-4)*(B2	=IF(C22<16,1,0)	1	
23	=8*RAND()	=8*RAND()	=(A23-4)*(A23-4)+(B23-4)*(B2	=IF(C23<16,1,0)	1	
24	=8*RAND()	=8*RAND()	=(A24-4)*(A24-4)+(B24-4)*(B2	=IF(C24<16,1,0)	1	


النشاط الثالث
قوانين كبلر والمدارات الإهليجية

اشتهر العالم الفلكي الألماني يوهان كبلر (1571 م إلى 1630 م) بقوانينه المتعلقة بحركة الكواكب.

- قانون كبلر الأول: كل كوكب في النظام الشمسي يتحرك حول الشمس في مدار إهليلجي (قطع ناقص) بحيث تقع الشمس في إحدى بؤرتيه.
- قانون كبلر الثاني: الخط الوهمي الواصل بين كوكب والشمس يحصر مساحات متساوية خلال أزمنة متساوية.

يوضح الشكل المجاور ما يعنيه كل من هذين القانونين.
تمثل الدائرة البرتقالية الشمس فيما تمثل الدوائر الزرقاء أربع مواقع للكوكب خلال دورانه حول الشمس في مدار قطع ناقص حيث تقع الشمس في أحد بؤرتي القطع الناقص.
لاحظ كبلر من خلال رصده للكواكب أن الكوكب يزيد من سرعته عندما يكون قريباً من الشمس ويبطئ من سرعته عند ابتعاده عنها.
في الفترة الزمنية من T_1 إلى T_2 المبينة في الشكل أعلاه، نجد أن الخط الوهمي الواصل بين الشمس والكوكب يحصر المساحة A_1. بعد ذلك عند ابتعاد الكوكب عن الشمس فإنه يتحرك بسرعة أقل. فإذا كانت الفترة الزمنية $T_4 - T_3$ مساوية للفترة الزمنية $T_2 - T_1$، فلابد أن تكون المسافة المقطوعة حول المدار أقل بحيث تكون المساحة A_2 مساوية للمساحة A_1
عند ازدياد طول الخط الوهمي الواصل بين الكوكب والشمس.

55

حول هذا النشاط

يقوم الطلاب في هذا النشاط باستخدام بيانات فلكية حديثة لدراسة قانون كبلر الثاني والذي ينص على أن الخط الوهمي الواصل بين كوكب ما والشمس يحصر مساحات متساوية خلال أزمنة متساوية.
يقوم الطلاب في هذا النشاط بإيجاد معادلة المدار لهذا الكوكب والذي يتخذ شكل قطع ناقص (إهليجي) وذلك من خلال البيانات المعطاه ومن ثم يقومون بتقدير الزمن اللازم للكوكب لإكمال دورة كاملة حول الشمس.

- تطبيق المعرفة المسبقة حول القطع الناقص في استكشاف مدارات الكواكب.

خصائص الأداء المتقدم

- **الإبداع** – هل يستطيع الطلاب تصور حركة الكواكب ومناقشة أثر معامل التباعد المركزي على مدار الكواكب؟
- **المجازفة** – تعريف الطلاب في هذه المهمة على الأفكار التي سوف تكون مثيرة للاهتمام والمتعلقة بالكون وعلم الفلك
- **المثابرة** – عمل التمثيلات البيانية التي توضح مسار الكواكب
- فهم "الأفكار الكبيرة" ووضوح المفاهيم – يجب على الطلبة التفكير في قوة الرياضيات كأداة لفهم الكون.

إجابات الأسئلة

.a.1

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

$$0.249 = \sqrt{1 - \frac{b^2}{39.48^2}}$$

$$0.249^2 = \frac{39.48^2 - b^2}{39.48^2}$$

$$b^2 = 39.48^2 - 39.48^2 \times 0.249^2$$

$$b = 38.24$$

b. يجب على الطلاب العمل على ورقة رسم بياني كبيرة ما أمكنهم ذلك.

سوف نجد أن $a = 39.48$ و $b = 38.24$

وبالتالي فإن معادلة القطع الناقص المطلوبة هي :

$$\frac{x^2}{39.48^2} + \frac{y^2}{38.24^2} = 1$$

$$y = \pm \sqrt{38.24^2 \times (1 - \frac{x^2}{39.48^2})}$$

بتعويض القيمة $x = 1$ في المعادلة السابقة نحصل على القيمة $y = \pm\ 38.23$ (مقرباً إلى منزلتين عشريتين)

إن استخدام الجداول الإلكترونية أو الآلة الحاسبة البيانية سيساعد كثيراً في تخفيف العبء الكبير الناتج من العمليات الحسابية المتكررة.

يوضح الجدول التالي قيم y بحيث أن $0 \le x \le 20$

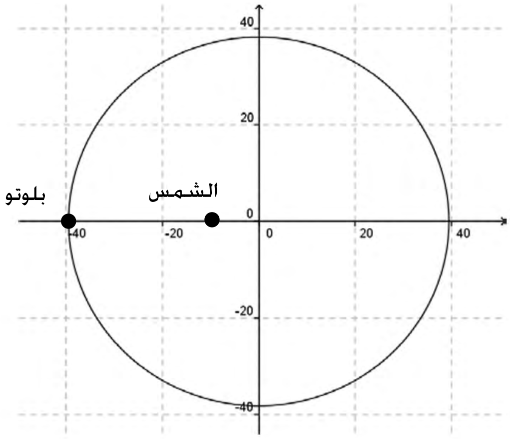
تقع البؤرة على مسافة

$$\sqrt{39.48^2 - 38.24^2} = 9.82$$

وحدة فلكية من المركز ومن ثم نضع علامة تمثل الشمس عند هذه المسافة. نقوم بعد ذلك بوضع علامة تمثل كوكب بلوتو وتكون هذه العلامة واقعة في نقطة الحضيض الشمسي وهي النقطة الواقعة على المحور الأكبر وتكون أقرب مسافة بين الكوكب والشمس.

يجب على الطلاب العمل على هذه المهمة بمستوى عال من الدقة لكي يتم الحصول على رسم مشابه للشكل في أعلى الصفحةالتالية:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	38.24	38.23	38.19	38.13	38.04	37.93	37.80	37.63	37.45	37.23
x	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
y	36.99	36.73	36.43	36.11	35.75	35.37	34.96	34.51	34.03	33.52
x	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
y	32.97	32.38	31.75	31.08	30.36	29.60	28.78	27.90	26.96	25.95
x	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
y	24.86	23.68	22.40	20.99	19.44	17.69	15.70	13.34	10.37	5.94



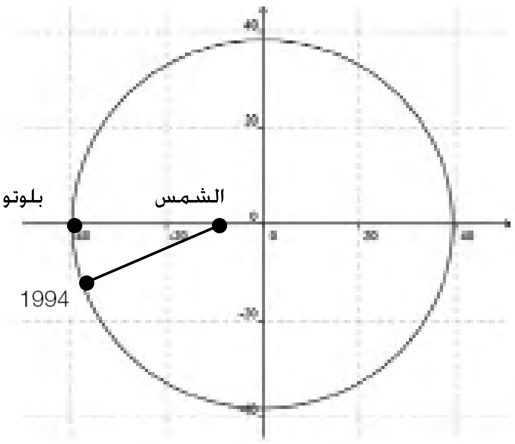
c. عند العمل بمستوى عال من الدقة فإن من المحتمل أن نكون قادرين على الحصول على تمثيل لمنطقة على شكل مثلث. كما يمكننا إيجاد تقريب أكثر دقة عن طريق حساب مساحة قطاع دائري من دائرة متوسط نصف قطرها يكون واقعاً بين كل من بلوتو والشمس في بداية ونهاية الفترة، ولكن أي فروقات ستكون طفيفة نسبياً.

فعلى سبيل المثال ، إذا تم تقريب المساحة كقطاع من دائرة طول نصف قطرها R هو متوسط المسافتين فإن الحسابات ستكون كالتالي:

$$R = \frac{29.66+29.79}{2} = 29.725$$

مساحة القطاع الدائري هي

$$\frac{14}{360} \times \pi \times 29.725^2 = 107.9$$



d. من المعروف ومن خلال قانون كبلر أن المساحة التي يحصرها الخط الوهمي سوف تكون مساوية للمساحة التي تم حسابها في الفقرة c. يمكن تقدير موقع بلوتو في نهاية فترة الخمس سنوات عن طريق تحريك نقطة تمثل بلوتو حول القطع الناقص مسافة صغيرة، ومن ثم يتم تقدير المساحة التي تم حصرها. وبتكرار هذه العملية حتى يكون مجموع المساحات مساوياً للمساحة التي تم ايجادها في الفقرة c، فإنه يمكننا تقدير موقع بلوتو في نهاية الخمس سنوات.

يمكننا استخدام حساباتنا على النحو الوارد أعلاه باستخدام قياسات للزاوية ولنصف قطر جديد وكبير وذلك للتأكد الحصول على نفس المساحة.

مساحة القطاع الدائري هي

$$\frac{\text{الزاوية}}{360} \times \pi \times \frac{(360 + \text{نصف القطر الكبير})^2}{2} = 107.9$$

نستمر باستخدام التجريب والتطوير حتى يتم الحصول على النقطة المطلوبة.

e. إلى f.

يجب على الطلاب أن يستمروا، كما في الأعلى، في استخدام طرق حسابتهم المختلفة لإيجاد المساحة التي قاموا بتطويرها. يجب أن نرتكز وبشكل أساسي في سلسلة عملياتنا الحسابية على اثنين فقط من الملاحظات حول موقع بلوتو، لذا لا ينبغي لنا أن نتوقع الحصول على دقة كبيرة في الحساب. ولمزيد من المعلومات، فإن الطول الفعلي لمدار كوكب بلوتو

هو حوالي 248 سنة، ومن المثير للاهتمام أن نلاحظ أن الكوكب لم يكمل إلى الآن نصف المدار منذ اكتشافه. إن حصول الطلاب على أعداد مقاربة للأعداد المعطاه سيكون دليلاً على أدائهم الجيد. الجزء المهم هنا هو أن دقة العمليات الحسابية تمثل الفكرة الرياضية الكامنة خلف تحليل العمليات عند تقسيمها إلى سلسلة من الخطوات. إن الخبرة العملية الناتجة عن مثل هذا النوع من الأنشطة ستشكل إعداداً رياضياً جيداً للعديد من الأفكار المتعلقة بحساب التفاضل والتكامل.

2. يحتاج الطلاب إلى رسم مدار المذنب على ورقة رسم بياني كبيرة بحيث يتم تحديد جميع تفاصيل القياسات المطلوبة لمسار المذنب.

لإيجاد معادلة القطع الناقص، نحتاج أولاً إلى حساب نصف طول المحور الأصغر b.

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

$$0.967 = \sqrt{1 - \frac{b^2}{17.8^2}}$$

$$0.249^2 = \frac{17.8^2 - b^2}{17.8^2}$$

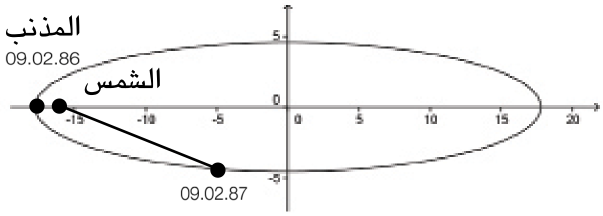
$$b^2 = 17.8^2 - 17.8^2 \times 0.967^2$$

$$b = 4.54$$

وبالتالي فإن قيمة b هي 4.54 وحدة فلكية.

مقدار بعد البؤرة عن المركز هو

$$\sqrt{17.8^2 - 4.54^2} = 17.2$$



a. من الشكل الموضح نجد في الموقع 09.02.87 أن المسافة التقريبية هي 13.5 وحدة فلكية. يجب على الطلاب اخذ القياسات من الرسم الخاص بهم.

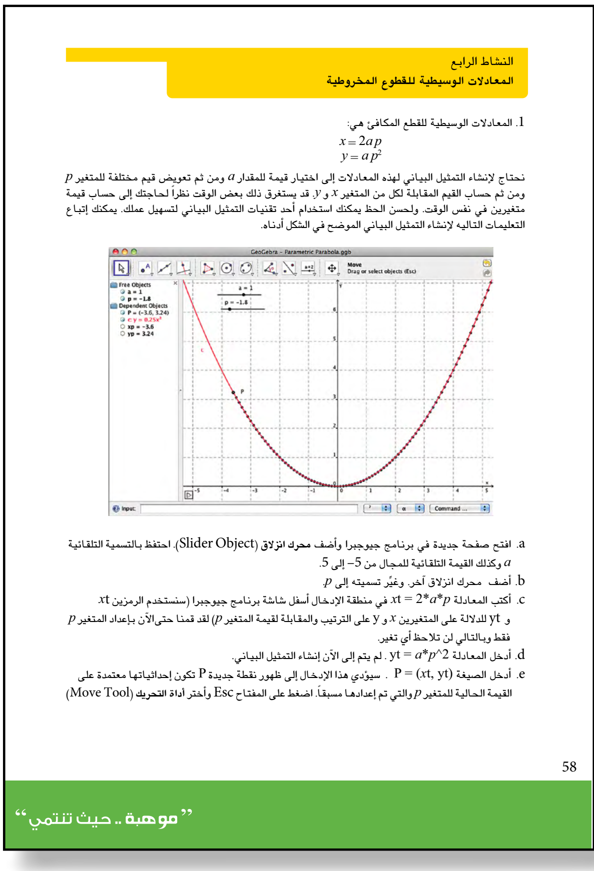
b. يجب على الطلاب اتباع الخطوات الموضحة في المثال السابق. حيث يمكنهم استخدام نفس الطرق المستخدمة في الجزء الأول لحساب المساحة أو محاولة ايجاد طريقة جديدة للمقارنة. إن تقريب القطع الناقص إلى دائرة سوف يعطينا نتائج أقل دقة مع هذا القطع نظراً لكبر معامل التباعد المركزي.

لمزيد من المعلومات، فإن مذنب هالي هو حالياً أبعد من مدار نبتون، وسوف يصل إلى نقطة الأوج عام 2024 م ولنقطة الحضيض المقابلة عام 2061 م.

إن كبر معامل التباعد المركزي للمدار يجعل تقدير المساحات أكثر تحدياً في هذا المثال، ونتوقع أن يبدع الطلاب في حال كانت نتائجهم قريبة من الأرقام الفعلية.

فرص التقويم

يمكن تقييم قدرة الطلاب على التعامل مع الصيغ المختلفة وعمل تمثيلات بيانية دقيقة في هذا النشاط.



النشاط الرابع
المعادلات الوسيطية للقطوع المخروطية

1. المعادلات الوسيطية للقطع المكافئ هي:

$$x = 2ap$$
$$y = ap^2$$

نحتاج لإنشاء التمثيل البياني لهذه المعادلات إلى اختيار قيمة للمقدار a ومن ثم تعويض قيم مختلفة للمتغير p ومن ثم حساب القيم المقابلة لكل من المتغير x و y. قد يستغرق ذلك بعض الوقت نظراً لحاجتك إلى حساب قيمة متغيرين في نفس الوقت. ولحسن الحظ يمكنك استخدام أحد تقنيات التمثيل البياني لتسهيل عملك. يمكنك إتباع التعليمات التاليه لإنشاء التمثيل البياني الموضح في الشكل أدناه.

a. افتح صفحة جديدة في برنامج جيوجبرا وأضف **محرك انزلاق** (Slider Object). احتفظ بالتسمية التلقائية a وكذلك القيمة التلقائية للمجال من -5 إلى 5.
b. أضف محرك انزلاق آخر. وغيِّر تسميته إلى p.
c. أكتب المعادلة $xt = 2*a*p$ في منطقة الإدخال أسفل شاشة برنامج جيوجبرا (سنستخدم الرمزين xt و yt للدلالة على المتغيرين x و y على الترتيب والمقابلة لقيمة المتغير p) لقد قمنا حتى الآن بإعداد المتغير p فقط وبالتالي لن تلاحظ أي تغير.
d. أدخل المعادلة $yt = a*p$^2 . لم يتم إلى الآن إنشاء التمثيل البياني.
e. أدخل الصيغة $P = (xt, yt)$. سيؤدي هذا الإدخال إلى ظهور نقطة جديدة P تكون إحداثياتها معتمدة على القيمة الحالية للمتغير p والتي تم إعدادها مسبقاً. اضغط على المفتاح Esc وأختر **أداة التحريك** (Move Tool)

58

"موهبة .. حيث تنتمي"

خصائص الأداء المتقدم

- **الإبداع** – المقدرة على تمثيل المسألة وتصنيفها بشكل أعمق وربطها بمعرفة الطالب المسبقة.
- **المجازفة** – المقدرة على تحديد القوانين واستخدامها في ايجاد صيغ جديدة وصحيحة.
- **تقدير الروابط** – ربط الخبرات التعليمية المسبقة لإيجاد تعميمات محتملة
- **الدقة** – المقدرة على العمل بفعالية ضمن إطار من القواعد المحددة.

توصيات أسلوب التدريس

يحتاج الطلاب إلى العمل بشكل فردي أو في مجموعات ثنائية على أجهزة الحاسب.

إجابات الأسئلة

1. a. إلى g.

يجب أن تكون متابعة التعليمات لهذا السؤال سهلة ومعقولة نوعاً ما ، وسوف تؤدي إلى تحديد مسار النقاط الموضحة في الشكل الموجود في كتاب الطالب (ولكن ليس القطع المكافئ نفسه، والذي سيتم استخلاصه في الخطوة التالية). النقاط الرئيسة في هذا البناء هي **إظهار الآثار** (Trace On) للنقطة P (انقر بالزر الأيمن على النقطة واختر **إظهار الآثار** (Trace On) من القائمة التي تظهر)، وتفعيل خاصية الرسوم المتحركة لمحرك الانزلاق p (انقر بالزر الايمن على محرك الانزلاق p واختار **الرسوم المتحركة** (animation) من القائمة التي تظهر)،

h. يمكن إعادة ترتيب المعادلات على النحو التالي:

$$x = 2ap \Rightarrow p = \frac{x}{2a} \qquad (i)$$

$$y = ap^2 = a\left(\frac{x}{2a}\right)^2 = \frac{x^2}{4a} \qquad (ii)$$

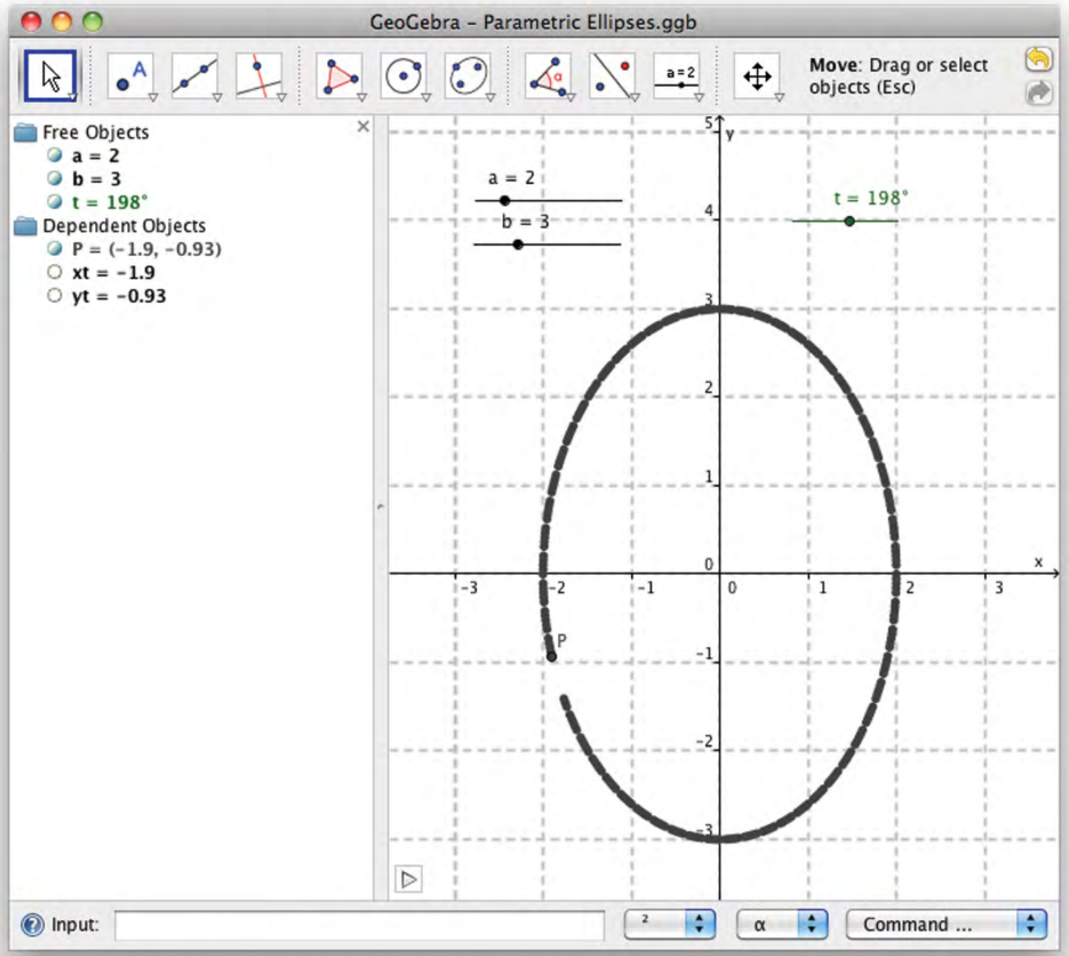
تمثيل المعادلة (ii) بيانياً سوف يكمل الشكل الموجود في كتاب الطالب.

حول هذا النشاط

يستخدم الطلبة في هذا النشاط برنامج جيوجبرا لاستكشاف التمثيلات البيانية للمعادلات الوسيطية لكل من القطع المكافئ والناقص والزائد. حيث يتبع الطلاب تعليمات معينة تتعلق برسم قطع مكافئ باستخدام المعادلات الوسيطية. وبعد ذلك يقوم الطلاب وبشكل مستقل بتمثيل عائلات من القطع الناقص والزائد بيانياً. يتم استخدام البرنامج لدراسة أثر تغيير المتغير الوسيط على التمثيل البياني وكذلك مقارنة التمثيلات الوسيطية وغير الوسيطية.

2. a. و b:

يوضح الشكل التالي التمثيل البياني للمعادلات الوسيطية والمعطاه في كتاب الطالب.



c. من الممكن إعادة ترتيب المعادلات على النحو التالي:

$$x = a\cos t \Rightarrow x^2 = a^2\cos^2 t \Rightarrow \quad (i)$$

$$\frac{x^2}{a^2} = \cos^2 t = 1 - \sin^2 t$$

$$y = b\sin t \Rightarrow \sin t = \frac{y}{b} \qquad (ii)$$

بتعويض المعادلة (ii) في المعادلة (i) نحصل على المعادلة التالية:

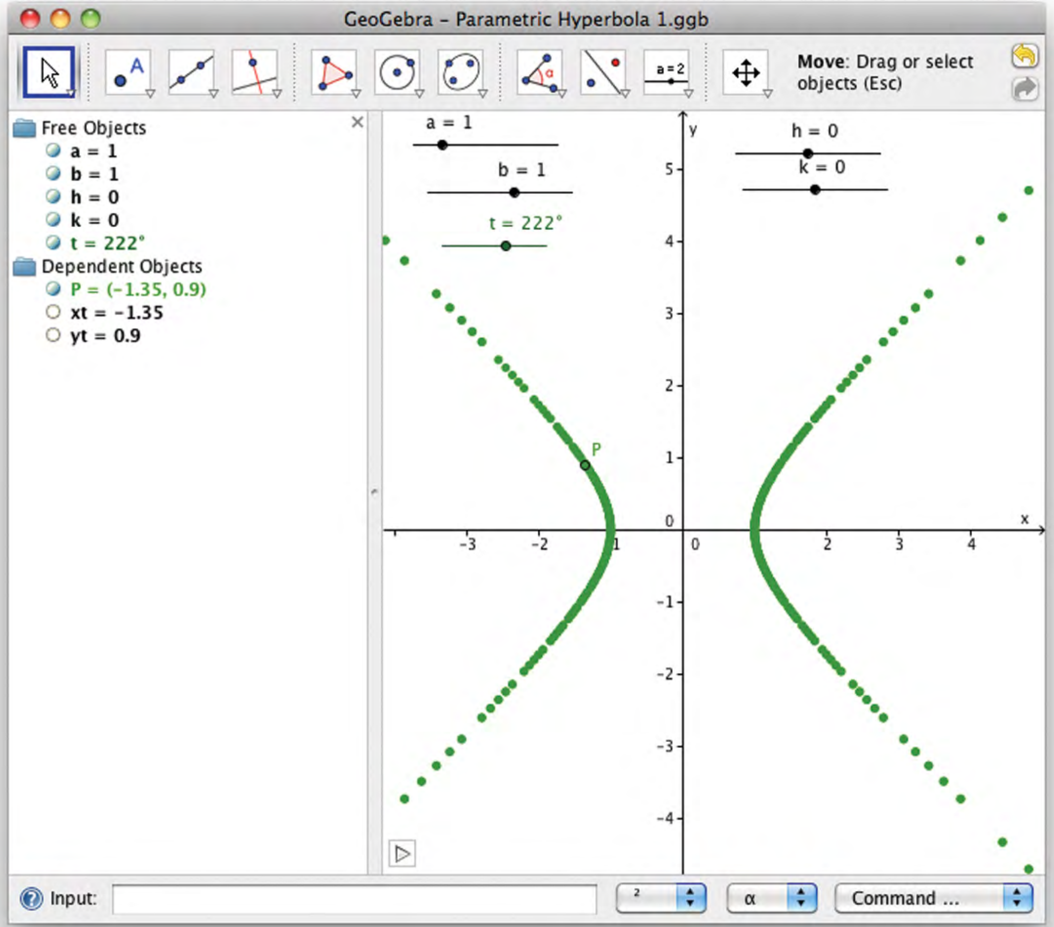
$$\frac{x^2}{a^2} = 1 - \sin^2 x = 1 - \frac{y^2}{b^2} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (iii)$$

تمثل المعادلة (iii) الصيغة القياسية لمعادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل. إن تمثيل هذه المعادلة بيانياً سوف يُكمل الشكل المطلوب لمعادلة القطع الناقص والنقاط التي تم رسمها مسبقاً.

3. a. يمكن اتباع نفس تعليمات تمثيل المعادلات الوسيطية للقطع المكافيء في السؤال 1

مع مراعاة اختلاف المعادلات الوسيطية

يبين الشكل التالي موقع النقطة P بحيث $a = b = 1$ و $h = k = 0$.



يمثل الشكل قطع زائد أفقي.

b. يتحكم الثابتان h و k بموقع مركز القطع أفقياً ورأسياً.

يتحكم الثابتان a و b بمقدار تمدد التمثيل البياني باتجاه المحور x و y على الترتيب.

نعيد ترتيب المعادلات الوسيطية باستخدام المتطابقة

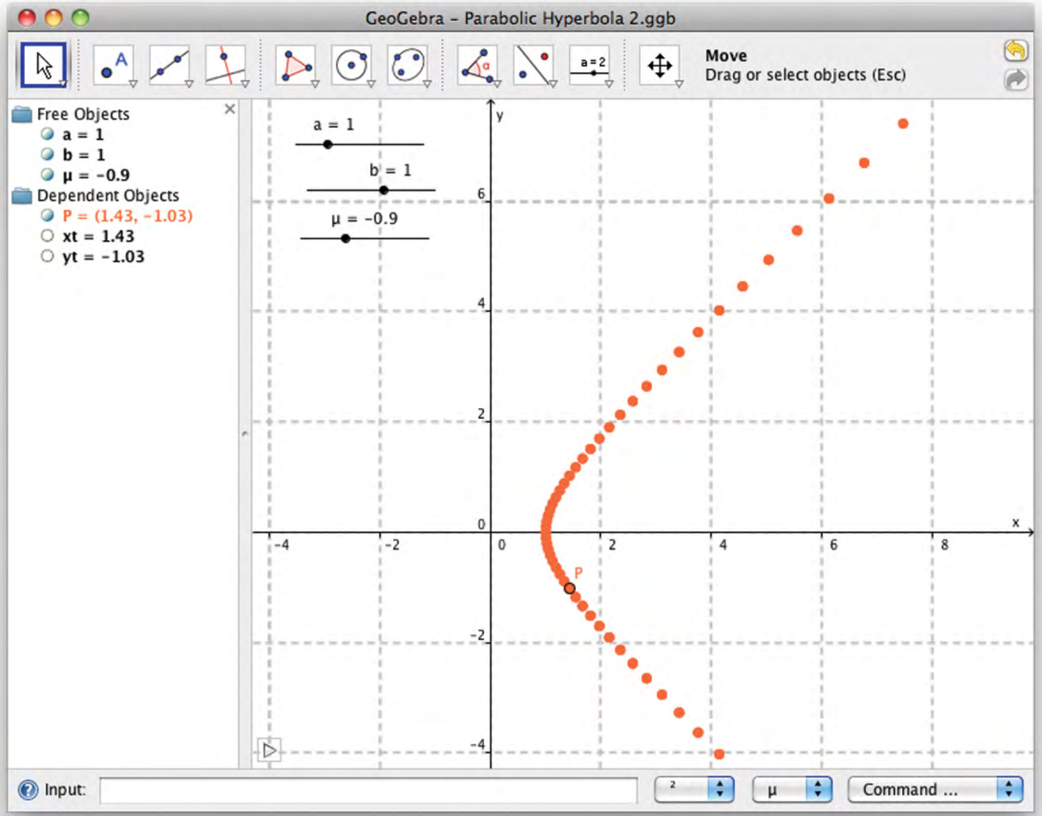
$\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$

لنحصل على المعادلة التالية:

$$\left(\frac{x-h}{a}\right)^2 - \left(\frac{y-k}{b}\right)^2 = 1$$

4. a. يمكن اتباع نفس تعليمات تمثيل المعادلات الوسيطية للقطع المكافيء في السؤال 1 مع مراعاة اختلاف المعادلات الوسيطية.

يبين الشكل التالي موقع النقطة P عندما تكون $a = b = 1$ ، $\mu = -0.9$.



b. الثابتان a و b لهما نفس التأثير كما في السؤال 3.

c. يمكننا اعادة ترتيب المعادلات الوسيطية على النحو التالي:

$$x = a\cosh\mu \Rightarrow \left(\frac{x}{a}\right)^2 = \cosh^2\mu \qquad (i)$$

$$y = b\sinh\mu \Rightarrow \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \sinh^2\mu \qquad (ii)$$

وبتعويض المعادلتين (i) و (ii) في المتطابقة $\cosh^2\theta - \sinh^2\theta = 1$

نحصل على المعادلة

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \qquad (iii)$$

تمثل المعادلة (iii) الصورة القياسية لمعادلة القطع الزائد الأفقي والذي مركزه نقطة الأصل. وبما أن المقدار $\cosh\mu > 0$ لجميع قيم المتغير μ ، فإن الصيغة الوسيطية ستعطينا فقط الجزء الأيمن من القطع الزائد.

فرص التقويم

يعطي هذا النشاط الفرصة للطلبة لمراجعة فهمهم للقطوع المخروطية. وبصرف النظر عن كون هذا النشاط بصري ، فإن النسخ المتحركة من التمثيلات البيانية للمعادلات الوسيطية توفر تقويماً فورياً لمهارات الطلاب الجبرية في التعامل مع المعادلات المتضمنة.

الوحدة السادسة

المتّجهات

نظرة عامّة

توسّع هذه الوحدة موضوع المتّجهات وتعزّزه، وتعمّق فهم الطلاّب للبنيةَ الرياضيّة الأساسيّة المرتبطة بالمتّجهات. ويعتمد جزء كبير من هذه الوحدة على الاستقصاء، حيث يطلب إلى الطلاب أن يستقصوا بأنفسهم كيف يمكن تطبيق المتّجهات في بعض المواقف.

الهدف التعليميّ للوحدة

تطوير فهم أفضل للمتّجهات وتطبيقاتها.

المعرفة السابقة

يتعيّن على الطلاّب أن تكون لديهم معرفة أساسيّة بالعمليات الحسابيّة على المتّجهات، ومتّجهات الوحدة (i، j، k)، والضرب الداخلي، والضرب الاتّجاهي للمتّجهات، وطول القوس، وخطوط الطول ودوائر العرض. كما يتطلّب أن تكون لديهم معرفة بقوانين الاحتمالات الأساسيّة.

خصائص الأداء المتقدم

- الاستقصاء (النشاط الرابع)
- التشارك (النشاطان الأول و الرابع)

الأداءات المتقدّمة

- التخيل (الأنشطة الأول و الثالث و الرابع)
- ربط الرياضيّات بالواقع (النشاط الأول)
- التعميم (الأنشطة الثاني و الثالث و الرابع)
- النمذجة (النشاط الرابع)

المعرفة والفهم المتقدّمان

- تقدير الروابط (النشاطان الأول و الرابع)
- فهم البرهان (النشاط الثالث)

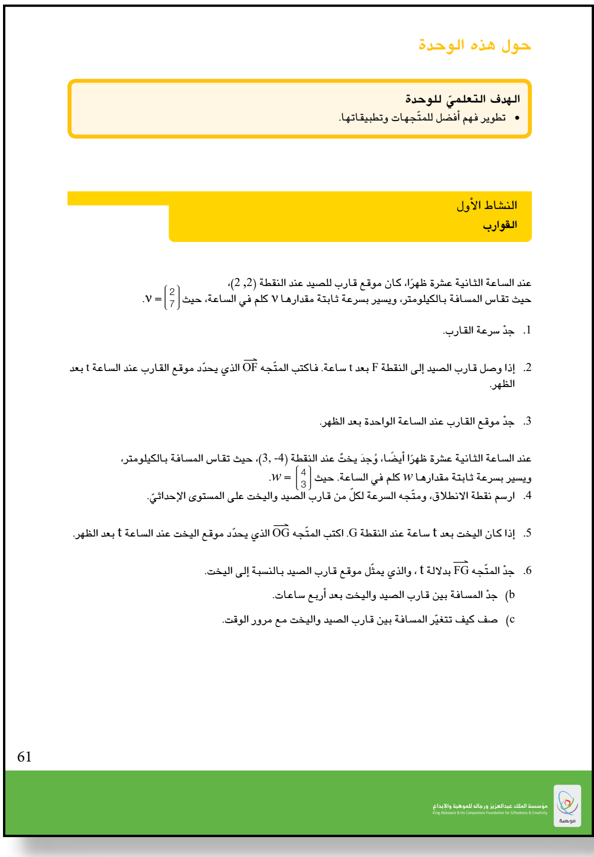
الخطّة الزمنيّة

الزمن المقترح لتنفيذ الوحدة

ستّ ساعات تقريبًا

المصادر

- تقنية تمثيل بياني.
- خريطة العالم تشتمل على خطوط الطول ودوائر العرض. (النشاط الرابع)



حول هذه الوحدة

الهدف التعلميّ للوحدة

- تطوير فهم أفضل للمتّجهات وتطبيقاتها.

النشاط الأول

القوارب

عند الساعة الثانية عشرة ظهرًا، كان موقع قارب للصيد عند النقطة $(2, 2)$،
حيث تقاس المسافة بالكيلومتر، ويسير بسرعة ثابتة مقدارها v كلم في الساعة، حيث $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$.

1. جدْ سرعة القارب.
2. إذا وصل قارب الصيد إلى النقطة F بعد t ساعة. فاكتب المتّجه $\overrightarrow{OF}$ الذي يحدّد موقع القارب عند الساعة t بعد الظهر.
3. جدْ موقع القارب عند الساعة الواحدة بعد الظهر.

عند الساعة الثانية عشرة ظهرًا أيضًا، وُجِدَ يختٌ عند النقطة $(3, -4)$، حيث تقاس المسافة بالكيلومتر،
ويسير بسرعة ثابتة مقدارها w كلم في الساعة. حيث $w = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

4. ارسم نقطة الانطلاق، ومتّجه السرعة لكلّ من قارب الصيد واليخت على المستوى الإحداثيّ.
5. إذا كان اليخت بعد t ساعة عند النقطة G. اكتب المتّجه $\overrightarrow{OG}$ الذي يحدّد موقع اليخت عند الساعة t بعد الظهر.
6. جدْ المتّجه $\overrightarrow{FG}$ بدلالة t ، والذي يمثّل موقع قارب الصيد بالنسبة إلى اليخت.
   b) جدْ المسافة بين قارب الصيد واليخت بعد أربع ساعات.
   c) صف كيف تتغيّر المسافة بين قارب الصيد واليخت مع مرور الوقت.

61

مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع
King Abdulaziz & his Companions Foundation for Giftedness & Creativity
موهبة

حول هذا النشاط

صمّم هذا النشاط لتنمية تفكير الطلاّب فيما يتعلّق باستعمال المتّجهات في الملاحة، متضمنًا استعمال عمليّات جمع المتّجهات، وتحديد متّجهات الموقع، ومقدار المتّجه، ورسم المتّجهات.

لذا قد يكون من المفيد وجود تقنيات تمثيل بياني تساعد على رسم متّجهات ثنائيّة الأبعاد. ويتعيّن على الطلاّب العمل في مجموعات ثنائيّة لتحفيز النقاش وتشجيعه.

يجب تشجيع الطلاّب على رسم مخطّط دقيق عند البدء في هذا النشاط، ويضيفون عليه تفاصيلاً كلّما تقدّموا في تنفيذ النشاط، وبناءً عليه، سيكتمل حلّ المهمّة الثامنة. يعدّ استعمال تقنيات التمثيل البيانيّ مفيدًا لإنجاز الجزء الأخير من المهمّة الثامنة.

ومن الضروريّ استعمال بعض مفردات المتّجهات في أثناء تنفيذ هذا النشاط. مثل، طول المتّجه وكيفيّة حسابه، ومتّجه الموقع (اتّجاه الموقع بالنسبة لنقطة الأصل المعطاة)، والموقع "بالنسبة إلى"، والعلاقة بين السرعة المتجهة والسرعة في النشاط 1 حيث أن السرعة تمثل مقدار متجه السرعة.

خصائص الأداء المتقدم

قد يظهر الطالب في هذا النشاط السمات الآتية:

- القدرة على التخيل.
- القدرة على ربط الرياضيّات بالواقع والتعبير الرياضيّ عن المواقف الحياتيّة.
- التقدير والاعجاب في الربط بين مجالات الرياضيات..

توصيات اسلوب التدريس

وضع الطلاب الموهوبين في مجموعات مناسبة.

إجابات الأسئلة

.1 يميّز الطالب بين السرعة المتّجهة، والسرعة حيث تمثّل السرعة مقدار متّجه السرعة. ومن السياق فإنّ السرعة معطاة على صورة متّجه لذا؛ فإنّنا نحسب مقدار هذا المتّجه ليمثّل سرعة قارب الصيد، وهي: $\sqrt{2^2+7^2}=\sqrt{53}$ km/h

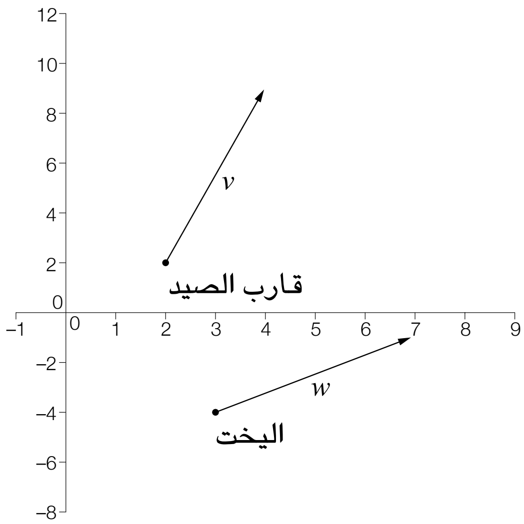
.2 تعدّ إضافة التغيّر في تمثيل الموقع الأصليّ للمتّجه ذات دلالة، وتمثّل الإزاحة النسبيّة لنقطة الأصل. لذا؛ يستعمل متّجه الإزاحة ويُعطي موقع قارب الصيد بالمتّجه:

$$\overrightarrow{OF}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+2t\\2+7t\end{pmatrix}$$

.3 الموقع عند الساعة الواحدة بعد الظهر، هو:

$$\overrightarrow{OF}=\begin{pmatrix}2+2t\\2+7t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+2\\2+7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\9\end{pmatrix}$$

.4



.5

$$\overrightarrow{OG}=\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+4t\\-4+3t\end{pmatrix}$$

.6 a.

$$\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{FO}+\overrightarrow{OG}=-\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OG}$$

$$\overrightarrow{FG}=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2t\\-6-4t\end{pmatrix}$$

b. عندما $t=4$

$$\overrightarrow{FG}=\begin{pmatrix}1+8\\-6-16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\-22\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{FG}=\sqrt{9^2+(-22)^2}=23.77\text{km}$$

c. تزداد المسافة بين اليخت وقارب الصيد تدريجيًّا، ويعبّر عنها بالمعادلة:

$$\overrightarrow{FG}=\sqrt{20t^2+52t+37}$$

.7 عند الساعة السابعة مساءً يُبحر القارب بسرعة ثابتة.

a. موقع قارب الصيد، هو:

$$\overrightarrow{OF}=\begin{pmatrix}16\\51\end{pmatrix},\ \overrightarrow{OM}=\begin{pmatrix}36\\60\end{pmatrix}$$

ولذا؛ فإنّ متّجه الموقع هو:

$$\overrightarrow{MF}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OM}=\begin{pmatrix}16\\51\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}36\\60\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}20\\9\end{pmatrix}$$

b. موقع اليخت هو: $\overrightarrow{OG}=\begin{bmatrix}31\\17\end{bmatrix}$

وبمعرفة متّجه الموقع $\overrightarrow{OM}=\begin{bmatrix}36\\60\end{bmatrix}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MG}&=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OG}\\&=\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OM}\\&=\begin{bmatrix}31\\17\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}36\\60\end{bmatrix}\\&=-\begin{bmatrix}5\\43\end{bmatrix}\end{aligned}$$

8. a.

$$\overrightarrow{OU}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MU}$$

$$\overrightarrow{MU}=\begin{bmatrix}-21\\-25\end{bmatrix},\ \overrightarrow{OM}=\begin{bmatrix}36\\60\end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{OU}=\begin{bmatrix}-21\\-25\end{bmatrix},\begin{bmatrix}36\\60\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15\\35\end{bmatrix}$$

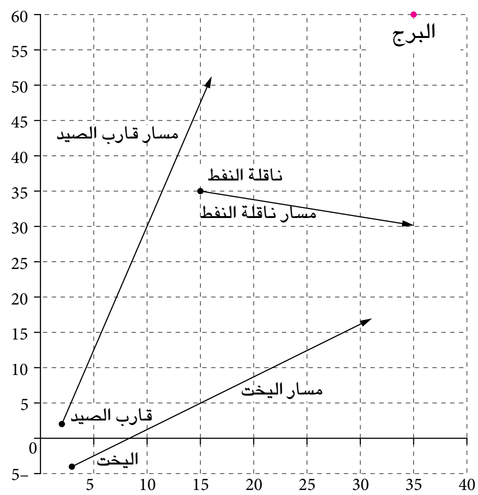
$$\begin{aligned}\overrightarrow{UF}&=UO+OF\\&=-\begin{bmatrix}15\\35\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}16\\51\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\16\end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{UF}=\sqrt{257}\text{ km}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{UG}&=\overrightarrow{UO}+\overrightarrow{OG}\\&=\begin{bmatrix}15\\35\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}31\\17\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}16\\-18\end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{UG}=\sqrt{16^2+(-18)^2}=2\sqrt{145}\text{ km}$$

b.



c. يتّضح من الرسم أنّ اليخت وناقلة النفط يقتربان من بعضهما بعضًا.

d. المعادلة المتجهيّة للمسافة بين اليخت وناقلة النفط هي: $\overrightarrow{UG}=\begin{bmatrix}16+0\\-18+4T\end{bmatrix}$

ويمكن التوصل إليها على النحو الآتي:

اليخت وناقلة النفط يقتربان من بعضهما بعضًا.

متّجه موقع اليخت عند الزمن T هو:

$$\overrightarrow{OG}=\begin{bmatrix}31+4T\\17+3T\end{bmatrix}$$

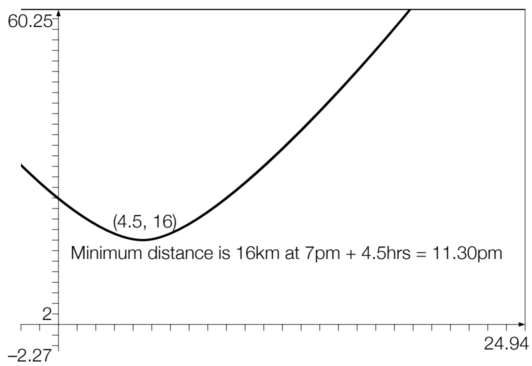
ومتّجه موقع ناقلة النفط عند الزمن T هو:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OU}&=\begin{bmatrix}15+4T\\35-T\end{bmatrix}\\\overrightarrow{UG}&=\overrightarrow{UO}+\overrightarrow{OG}\\&=-\overrightarrow{OU}+\overrightarrow{OG}\\&=-\begin{bmatrix}15+4T\\35-T\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}31+4T\\17+3T\end{bmatrix}\end{aligned}$$

e. معادلة المسافة بين اليخت وناقلة النفط بعد T ساعة من الساعة السابعة مساءً تساوي:

$$\sqrt{16T^2-144T+580}$$

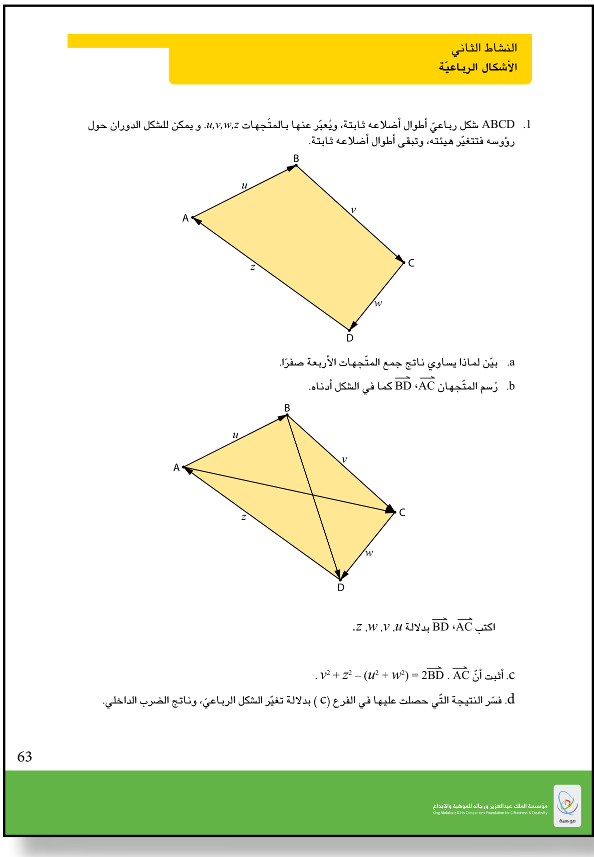
f. عند تمثيل المعادلة بيانيًّا يظهر من الرسم أنّ القاربين لا يلتقيان، ولكن يكونان أقرب ما يمكن إلى بعضهما بعضًا عند الساعة 11:30 مساءً، وعندئذٍ تكون المسافة بينهما 16km.



فرص التقويم

يتيح النشاط فرصًا للحكم على مدى قدرة الطلّاب على ربط الرياضيّات بالواقع عندما يفسّرون النتائج الّتي حصلوا عليها بدلالة حركة القوارب.

النشاط الثاني: الأشكال الرباعيّة



النشاط الثاني
الأشكال الرباعيّة

1. ABCD شكل رباعيّ أطوال أضلاعه ثابتة، ويُعبّر عنها بالمتّجهات u,v,w,z. و يمكن للشكل الدوران حول رؤوسه فتتغيّر هيئته، وتبقى أطوال أضلاعه ثابتة.

a. بيّن لماذا يساوي ناتج جمع المتّجهات الأربعة صفرًا.

b. رُسم المتّجهان $\overrightarrow{AC}$، $\overrightarrow{BD}$ كما في الشكل أدناه.

اكتب $\overrightarrow{AC}$، $\overrightarrow{BD}$ بدلالة u، v، w، z.

c. أثبت أنّ $\overrightarrow{AC} \cdot 2\overrightarrow{BD} = v^2 + z^2 - (u^2 + w^2)$.

d. فسّر النتيجة التّي حصلت عليها في الفرع (c) بدلالة تغيّر الشكل الرباعيّ، وناتج الضرب الداخلي.

63

مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع
King Abdulaziz & his Companions Foundation for Giftedness & Creativity

حول هذا النشاط

يهدف هذا النشاط إلى تنمية تفكير الطلاّب بالمتّجهات من منظور هندسيّ. ويتضمّن استعمال عمليّات جمع المتّجهات ومتّجهات الموقع، والضرب الداخلي للمتّجهات.

يتمثّل الهدف الأساسيّ في إعطاء الطلاّب مثالاً على أنّ لغة المتّجهات تسمح بتنفيذ برهان محدّد وواضح للعلاقات الهندسيّة. يجب حث الطلاب على العمل فرادى، مع شرح استدلالاتهم في كلّ المهمّة لزملائهم.

في المهمّة الثانية، من المهمّ أن يناقش الطلاّب فكرة البرهان الرئيسة قبل البدء في الحلّ، وأن يكونوا قادرين على توضيح توازي القطعتين المستقيمتين EH ، FG ، وكذلك القطعتين المستقيمتين EF، HG ليكون الشكل EFGH متوازي أضلاع.

ومن الأخطاء المفاهيميّة الشائعة التي يجب تجنبها هي تمثيل المتّجهات بأضلاع الشكل المرسوم أكثر من كونها مقدارًا واتّجاهًا.

خصائص الأداء المتقدم

قد يظهر الطالب في هذا النشاط السمات الآتية:

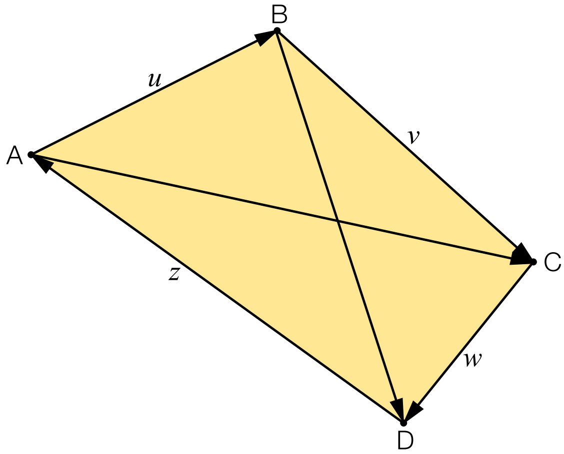
- القدرة على التعميم.
- القدرة على فهم البرهان وبنائه.

توصيات أسلوب التدريس

العمل في مجموعات ثنائيّة تشاركيّة / متعاونة.

إجابات الأسئلة

.1



a. بما أنّ الشكل الرباعيّ مغلق فإنّ المجموع

$u + v + w + z = 0$

b. $\overrightarrow{AC} = u + v$

$\overrightarrow{BD} = v + w$

c. $\overrightarrow{AC} = u + v \ ,\ \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC} = w + z$

$\overrightarrow{BD} = v + w \ ,\ \overrightarrow{DB} = -\overrightarrow{BD} = z + u$

$v^2 + z^2 - (u^2 + w^2) = v^2 + z^2 - u^2 - w^2$

$= v^2 - w^2 + z^2 - u^2$

$= (v - w)(v + w) + (z - u)(z + u)$

$= \overrightarrow{BD}\,(v - w) - \overrightarrow{BD}\,(z - u)$

$= \overrightarrow{BD}\,(v - w - z + u)$

$= \overrightarrow{BD}\,((u + v) - (w + z))$

$= \overrightarrow{BD}\,(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC})$

$= 2\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC}$

d. ناتج الضرب الداخلي ثابت دائمًا مهما تغيّر الشكل الرباعيّ شريطة عدم تغيّر أطوال المتّجهات .u, v, w, z

.2

a. المعطيات: $\overrightarrow{OH} = a, \overrightarrow{OB} = 2a$ and $\overrightarrow{OG} = c$

$\overrightarrow{OA} = 2a, \overrightarrow{OC} = 2c$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -2a + 2b$

$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OB} = -2c + 2b$

b. $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$= 2a + \frac{1}{2}(-2a + 2b)$

$= a + b$

$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

$= 2c + \frac{1}{2}(-2c + 2b)$

$= b + c$

c. بإيجاد أضلاع الشكل الرباعيّ:

$\overrightarrow{HE} = \overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OE}$

$= -a + (a + b)$

$= b$

$\overrightarrow{GF} = \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OF}$

$= -c + (b + c)$

$= b$

إذن، $\overrightarrow{HE}$ يوازي $\overrightarrow{GF}$

$\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{EO} + \overrightarrow{OF}$

$= -(a + b) + (b + c)$

$= -a + c$

$\overrightarrow{EF} = -c + a$

$= -(-a + c)$

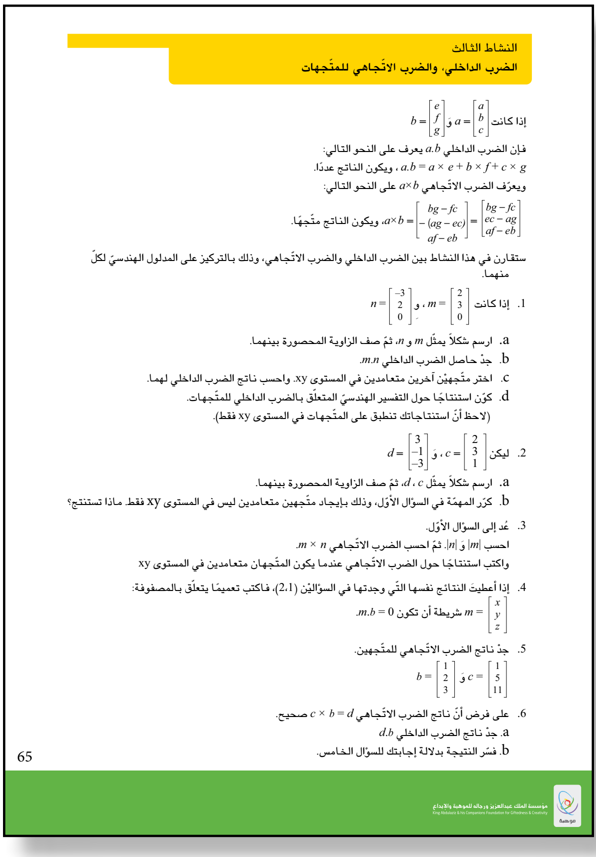
إذن، $\overrightarrow{EF}$ يوازي $\overrightarrow{HG}$.

وبما أنّ $\overrightarrow{EF}$ يوازي $\overrightarrow{HG}$، و $\overrightarrow{HE}$ يوازي $\overrightarrow{GF}$، فإنّ الشكل $EFGH$ متوازي أضلاع.

فرص التقويم

تعدّ إجابات الطلاّب على المهمّة الثانية دليلاً على قدرتهم على البرهان، وعلى الرغم من أنّ خطوات البرهان مباشرة إلاّ أنّه يتعيّن على الطلاّب ترتيب الخطوات بعناية وفق تسلسل منطقيّ.

النشاط الثالث: الضرب الداخلي والضرب الاتّجاهي للمتّجهات



النشاط الثالث
الضرب الداخلي، والضرب الاتّجاهي للمتّجهات

إذا كانت $a=\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$ وَ $b=\begin{bmatrix}e\\f\\g\end{bmatrix}$

فإن الضرب الداخلي $a.b$ يعرف على النحو التالي:

$a.b = a\times e + b\times f + c\times g$ ، ويكون الناتج عددًا.

ويعرّف الضرب الاتّجاهي $a\times b$ على النحو التالي:

$a\times b=\begin{bmatrix}bg-fc\\-(ag-ec)\\af-eb\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}bg-fc\\ec-ag\\af-eb\end{bmatrix}$، ويكون الناتج متّجهًا.

ستقارن في هذا النشاط بين الضرب الداخلي والضرب الاتّجاهي، وذلك بالتركيز على المدلول الهندسيّ لكلّ منهما.

1. إذا كانت $m=\begin{bmatrix}2\\3\\0\end{bmatrix}$ ، و $n=\begin{bmatrix}-3\\2\\0\end{bmatrix}$
   a. ارسم شكلاً يمثّل m و n، ثمّ صف الزاوية المحصورة بينهما.
   b. جدْ حاصل الضرب الداخلي $m.n$.
   c. اختر متّجهيْن آخرين متعامدين في المستوى xy. واحسب ناتج الضرب الداخلي لهما.
   d. كوّن استنتاجًا حول التفسير الهندسيّ المتعلّق بالضرب الداخلي للمتّجهات.
   (لاحظ أنّ استنتاجاتك تنطبق على المتّجهات في المستوى xy فقط).
2. ليكن $c=\begin{bmatrix}2\\3\\1\end{bmatrix}$ ، وَ $d=\begin{bmatrix}3\\-1\\-3\end{bmatrix}$
   a. ارسم شكلاً يمثّل c ، d، ثمّ صف الزاوية المحصورة بينهما.
   b. كرّر المهمّة في السؤال الأوّل، وذلك بإيجاد متّجهين متعامدين ليس في المستوى xy فقط. ماذا تستنتج؟
3. عُد إلى السؤال الأوّل.
   احسب $|m|$ وَ $|n|$. ثمّ احسب الضرب الاتّجاهي $m\times n$.
   واكتب استنتاجًا حول الضرب الاتّجاهي عندما يكون المتّجهان متعامدين في المستوى xy
4. إذا أعطيتَ النتائج نفسها التّي وجدتها في السؤاليْن (2،1)، فاكتب تعميمًا يتعلّق بالمصفوفة: $m=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$ شريطة أن تكون $m.b=0$.
5. جدْ ناتج الضرب الاتّجاهي للمتّجهين.
   $c=\begin{bmatrix}1\\5\\11\end{bmatrix}$ وَ $b=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$
6. على فرض أنّ ناتج الضرب الاتّجاهي $c\times b=d$ صحيح.
   a. جدْ ناتج الضرب الداخلي $d.b$
   b. فسّر النتيجة بدلالة إجابتك للسؤال الخامس.

65

مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع
King Abdulaziz & his Companions Foundation for Giftedness & Creativity
موهبة

حول هذا النشاط

يهدف هذا النشاط إلى تنمية تفكير الطلاّب في المتّجهات بصورتها التجريديّة. كما يتضمّن استعمال عمليتيْ الضرب الداخليّ والاتّجاهيّ للمتّجهات. وصمّمت الأنشطة لتوضيح التمايز بين الضرب الداخلي والاتّجاهي بتمثيلها هندسيًّا. وقد تستفيد المهامّ من النقاشات، ويشجّع الطلاّب على تشارك النتائج. تتطلّب المهمّتان 1 ، 2 من الطلاّب اختيار الأمثلة للتحقّق من نتائجهم. ونوصي أن يختار الطلاّب الأمثلة بصورة فرديّة ويختبرونها، ومن ثمّ مناقشة زملائهم بالاستنتاجات التّي توصّلوا إليها.

خصائص الأداء المتقدم

قد يظهر الطالب في هذا النشاط السمات الآتية:

- القدرة على التخيل الواضح.
- القدرة على التعميم.
- فهم البرهان وبنائه.

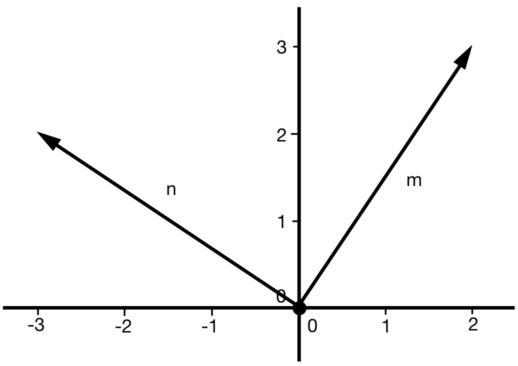
توصيات أسلوب التدريس

العمل في مجموعات تشاركيّة / متعاونة.

إجابات الأسئلة

.1

a. يُمثَّل المتّجهان هندسيًّا كما في الشكل الآتي:



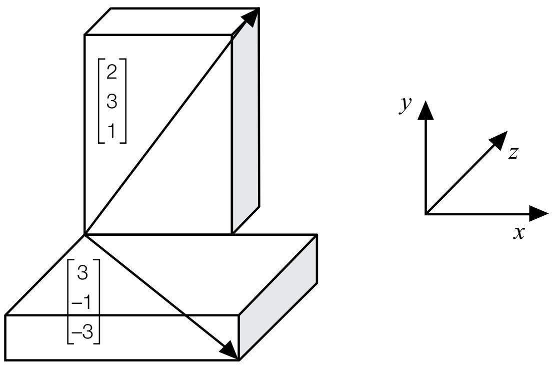
b. $n=\begin{bmatrix}-3\\2\\0\end{bmatrix}$ ، $m=\begin{bmatrix}2\\3\\0\end{bmatrix}$

ويكون $m.n = 2\times -3 + 3\times 2 = 0$ بما أنّ ناتج الضرب الداخلي يساوي صفرًا، فإنّ المتّجهين a، b متعامدان.

c. عندما يقع المتّجهان بالكامل في المستوى xy فإنّ تمثيلهما هندسيًّا يبيّن أنّ المتّجهيّن متعامدان. يشجّع الطلّاب على اختبار عدد من أزواج المتّجهات ليتحقّقوا من أنّ الضرب الداخلي يساوي صفرًا دائمًا. ويطلب إلى أحد الطلّاب المتميزين صياغة تخمين أو تعميم يتعلّق بالتمثيل الهندسيّ للضرب الداخلي.

d. بما أنّ الضرب الداخلي لمتجهين يساوي صفرًا، فإنّ المتجهيْن a، b متعامدان.

.2



a. المتّجهان c، d متعامدان.

b. من المهمّ أن يكون الطلّاب قادرين على اختيار أزواج من المتّجهات المتعامدة، وأن يستنتجوا أنّه:

إذا كان حاصل الضرب الداخلي للمتّجهين a، b يساوي صفرًا فإنّهما متعامدان.

.a.3

$$|m| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 0^2} = \sqrt{13}$$

$$|n| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{13}$$

$$m \times n = \begin{bmatrix}2\\3\\0\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}-3\\2\\0\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}3 \times 0 - 2 \times 0\\ 2 \times 0 - -3 \times 0\\ 2 \times 2 - -3 \times 3\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}0\\0\\13\end{bmatrix}$$

يتعيّن على الطلّاب استنتاج أنّ حاصل الضرب الاتّجاهيّ هو متّجه في اتّجاه محور z. حيث إنّ m وَ n تقعان بالكامل من المستوى xy. وأنّ حاصل الضرب الاتّجاهي هو متّجه عموديّ على كلّ من m، n. وطول المتّجه $m \times n$ يساوي 13 وهو يساوي $|m| \times |n|$.

.4

$$m = \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$$

$$m \cdot b = \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$$

$$m \cdot b = x + 2y + 3z$$

إذا كان $m.b = 0$ فإنّ المتّجه m يعامد المتّجه b.

يوجد عدد لا نهائيّ من الحلول للمعادلة .

$$m \cdot b = x + 2y + 3z$$

وعلى الرغم من ذلك، فإنّه عند إعادة ترتيب المعادلة يمكن أن تحصل على $x = -(2y + 3z)$ وعند تحديد قيم لكلّ من y، z يمكن إيجاد قيمة x ،وستكون نتيجة الضرب الداخليّ صفرًا.

.5

$$c \times b = \begin{bmatrix}1\\5\\11\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}(5 \times 3) - (2 \times 11)\\ -((1 \times 3) - (1 \times 11))\\ (1 \times 2) - (1 \times 5)\end{bmatrix}$$

$$c \times b = \begin{bmatrix}-7\\8\\-3\end{bmatrix}$$

6. a.

$$c \times b = d = \begin{vmatrix} -7 \\ 8 \\ -3 \end{vmatrix}$$

$$d.b = \begin{bmatrix} -7 \\ 8 \\ -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

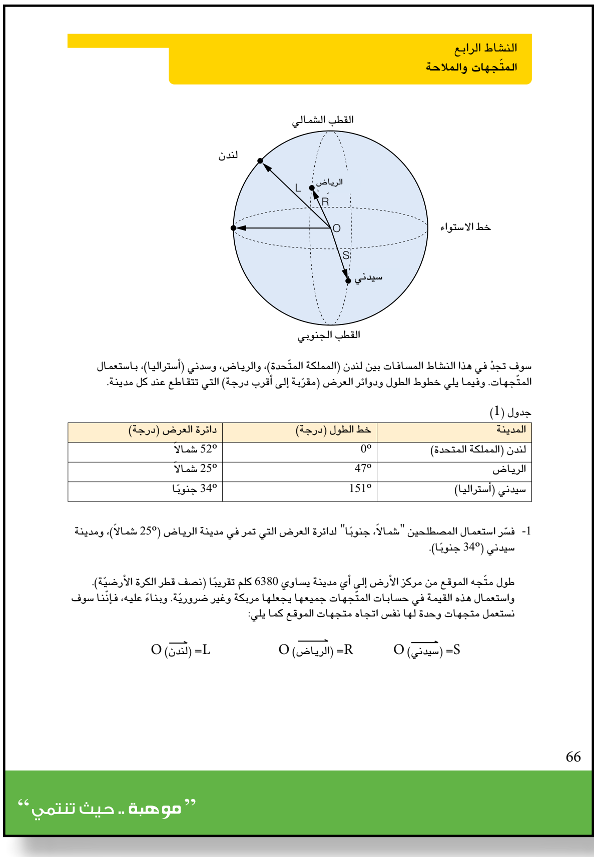
$$= -7 \times 1 + 8 \times 2 + -3 \times 3$$

$$= -7 + 16 - 9$$

b. الإجابة متوقّعة من المهمّة 5 لأنّ ناتج الضرب الاتّجاهي هو متّجه يعامد المستوى المكوّن من المتجهين c و b، وعلى الرغم من ذلك فإنّ المستوى المكوّن من المتّجهين c، b يعامد المتّجه d ، وبناء عليه يكون ناتج الضرب الاتّجاهي متّجهًا يوازي المتّجه d.

فرص التقويم

يحتاج الطلاّب إلى تصوّر جيّد في هذا النشاط كي يتمكّنوا من فهم العناصر المختلفة، والمحافظة على الوضوح بالمعالجات التجريديّة. إنّ الطلاّب الذين لديهم القدرة على الاستدلال في المهمّة 6، يقدّمون دليلاً على امتلاك هذا الجانب.


النشاط الرابع
المتّجهات والملاحة

سوف تجدْ في هذا النشاط المسافات بين لندن (المملكة المتّحدة)، والرياض، وسدني (أستراليا)، باستعمال المتّجهات. وفيما يلي خطوط الطول ودوائر العرض (مقرّبة إلى أقرب درجة) التي تتقاطع عند كل مدينة.

جدول (1)

المدينة	خط الطول (درجة)	دائرة العرض (درجة)
لندن (المملكة المتحدة)	0^{o}	52^{o} شمالاً
الرياض	47^{o}	25^{o} شمالاً
سيدني (أستراليا)	151^{o}	34^{o} جنوبًا

1- فسّر استعمال المصطلحين "شمالاً، جنوبًا" لدائرة العرض التي تمر في مدينة الرياض (25^{o} شمالاً)، ومدينة سيدني (34^{o} جنوبًا).

طول متّجه الموقع من مركز الأرض إلى أي مدينة يساوي 6380 كلم تقريبًا (نصف قطر الكرة الأرضيّة). واستعمال هذه القيمة في حسابات المتّجهات جميعها يجعلها مربكة وغير ضروريّة. وبناءً عليه، فإنّنا سوف نستعمل متجهات وحدة لها نفس اتجاه متجهات الموقع كما يلي:

$L= \overrightarrow{O\,(\text{لندن})}$ $\quad R= \overrightarrow{O\,(\text{الرياض})}$ $\quad S= \overrightarrow{O\,(\text{سيدني})}$

66

"موهبة .. حيث تنتمي"

حول هذا النشاط

صُمّم هذا النشاط لتنمية تفكير الطلاّب فيما يتعلّق بالمتّجهات في الحياة اليوميّة في مجال الملاحة. ويتضمّن النشاط استعمال جمع المتّجهات، ومتّجهات الوحدة، بالإضافة إلى طول القوس، وخطوط الطول والعرض. ويتعيّن على الطلاّب أن يألفوا العمل مع المواقع على سطح الكرة الأرضيّة، وكذلك مع خطوط الطول والعرض للتعامل مع هذا النشاط. لذا يتعيّن على الطلاّب أن يعملوا في مجموعات ثنائيّة، أو مجموعات صغيرة لتشجيع المناقشة.

خصائص الأداء المتقدم

قد يظهر الطالب في هذا النشاط السمات الآتية:

- الاستقصاء باتّباع الطريقة المنهجيّة.
- القدرة على التخيل.
- القدرة على التعميم.
- القدرة على إنشاء نماذج رياضيّة.
- الربط بين مواضيع الرياضيّات.

توصيات أسلوب التدريس

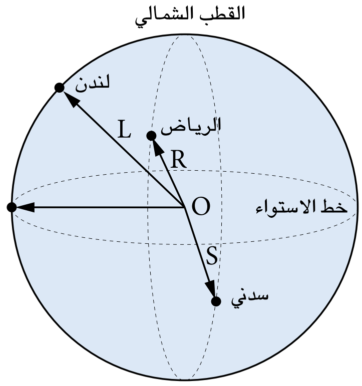
العمل في مجموعات ثنائيّة أو صغيرة، العمل التشاركيّ.

إجابات الأسئلة

ملاحظة

- يمكن حساب الزاوية بين المتّجهين A، B باستعمال الضرب الداخلي. أيْ أنّ $\cos\theta=\frac{A\cdot B}{|A||B|}$
- الأرض كرويّة تقريبًا، وبمعرفة خطّي الطول والعرض لمدينة معيّنة، يمكن تحديد متّجه الموقع بالنسبة إلى مركز الأرض (O).
- يتطلّب النشاط متّجهات ثلاثيّة الأبعاد.

.1



تقع الرياض على خطّ عرض 25^{o} شمالاً أيْ 25^{o} شمال خطّ الاستواء.
في حين تقع سدني على خطّ عرض 34^{o} جنوب خطّ الاستواء.

.2 المتّجه L مُعطى بـ :

$$L = (\cos\theta \sin\varphi)i + (\sin\theta \sin\varphi)j + (\cos\varphi)k$$
$$= (\cos 0^{o} \sin 38^{o})i + (\sin 0^{o} \sin 38^{o})j + \cos 38^{o} k$$
$$= \sin 38^{o} i + \cos 38^{o} k$$
$$L = 0.616i + 0.788k$$

.3

$$R = (\cos\theta \sin\varphi)i + (\sin\theta \sin\varphi)j + \cos\varphi k$$
$$= (\cos 47^{o} \sin 65^{o})i + (\sin 47^{o} \sin 65^{o})j + \cos 65^{o}k$$
$$R = 0.618i + 0.663j + 0.423k$$

$$S = (\cos\theta \sin\varphi)i + (\sin\theta \sin\varphi)j + \cos\varphi k$$
$$= (\cos 151^{o} \sin 124^{o})i + (\sin 151^{o} \sin 124^{o})j + \cos 124^{o}k$$
$$S = -0.725i + 0.402j - 0.559k$$

.4

$$\cos\alpha = \frac{L \cdot R}{|L|\,|R|}$$

$$\frac{(\sin 38^{o}i + \cos 38^{o}k) \cdot ((\cos 47^{o} \sin 65^{o})i + (\sin 47^{o} \sin 65^{o})j + \cos 65^{o}k)}{1}$$

$$\cos\alpha = 0.7135683541514$$

$$\alpha = 44.474^{o}$$

.5 المسافة بين لندن والرياض= طول القوس

طول القوس $= 2\pi \times r \times \alpha$

$$= 2\pi \times 6380 \times \frac{44.474}{360}$$
$$= 4953 \text{ km}$$

6. $\cos\beta = \frac{L \cdot S}{|L|\,|S|}$

$$\frac{(\sin 38^\circ i + \cos 38^\circ k) \cdot ((\cos 151^\circ \sin 124^\circ)\, i + (\sin 151^\circ \sin 124^\circ)\, j + \cos 124^\circ k)}{1}$$

$\cos\beta = -0.8871$

$\beta = 152.506^\circ$

7. المسافة بين لندن وسدني= طول القوس

طول القوس $= 2\pi \times r \times \beta$

$= 2\pi \times 6380 \times \frac{152.506}{360}$

$16982 \text{ km} =$

8. $\cos\delta = \frac{R \cdot S}{|R|\,|S|}$

$$= \frac{(\cos 47^\circ \sin 65^\circ)i + (\sin 47^\circ \sin 65^\circ)j + \cos 65^\circ k) \cdot ((\cos 151^\circ \sin 124^\circ)i + (\sin 151^\circ \sin 124^\circ)j + \cos 124^\circ k)}{1}$$

$\cos\delta = -0.4181$

$\delta = 114.714^\circ$

المسافة بين الرياض وسدني= طول القوس

طول القوس $= 2\pi \times r \times \delta$

$= 2\pi \times 6380 \times \frac{114.714}{360}$

$= 12774 \text{ km}$

9. سوف تختلف الإجابات. ويعتمد ذلك على المدينة التّي تمّ اختيارها. وأحد الاختيارات الممكنة مدينة في نيوزلندة مثل دندن.

دندن

خطّ الطول = 170°

خطّ العرض = 46° جنوب

الزاوية القطبيّة = 136°

المسافة بين لندن ودندن = 19055 km

فرص التقويم

تعدّ الإجابات على المهامّ الثلاث الأولى دليلاً على فهم الطلاّب للموقف (قدرتهم على النمذجة). وتوفّر المهمّتان 4، 7 دليلاً على قدرة الطلاّب على التعميم، في حين تبيّن المهمّة 8 قدرتهم على الاستقصاء بصورة مستقلّة.

الوحدة السابعة

الإحداثيات القطبية والأعداد المركّبة

مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع
King Abdulaziz & his Companions Foundation for Giftedness & Creativity

نظرة عامّة

يتعرّف الطلاب من خلال هذه الوحدة على الأعداد المركبّة وتمثيلها بأشكال مختلفة حيث ينظر إلى الأعداد المركبّة على أنها امتداد لشبكة المحاور ولنظام الأعداد. توفّر الأنشطة الفرص للطلاب لتطوير وعيهم عن الخلفية التاريخية للأعداد المركبّة. كما سيتم الربط بين الأعداد المركبة والعديد من المجالات المألوفة في الرياضيات.

الأهداف التعلميّة للوحدة

- فهم أن الاختيار الأمثل لنظام الإحداثيات يعتمد على الأشياء المراد دراستها.
- فهم مبدأ الأعداد المركبة كإمتداد لنظام الأعداد.
- ملاحظة الروابط بين الأعداد المركبة والمجالات الأخرى المألوفة في الرياضيات.

المعرفة السابقة

سوف تكون المعرفة السابقة واضحة من سياق المهام الفردية، وباختصار:

- يتطلب النشاط 1 تطبيق نظرية فيثاغورس وعلم المثلثات.
- يتطلب النشاط 2 بعض المعرفة بتمثيل الدوال التربيعيّة بيانياًوحل المعادلات التربيعيّة.
- يتطلب النشاط 3 استخدام متسلسلات القوى في النشاط 3 لتطوير صيغة إيلر (Euler)؛ ومع ذلك فإنه يمكن التعامل مع هذا بدون معرفة مسبقة لمتسلسلات القوى.
- يعتمد النشاط 4 على ما تم عمله على الأعداد المركبة في النشاط 3 ويتطلب كذلك تحليل عبارات تمثل كثيرات حدود من الدرجة الثالثة.

خصائص الأداء المتقدم

- الإبداع (الأنشطة 1، 2، و 3)
- المجازفة (النشاطان 1 و 2)
- التعاون (النشاطان 1 و 4)
- الإهتمام بالمجتمع – المقدرة على إنتاج أفكار جديدة مبنية على أفكار موجودة أو مشتقة منها (النشاطان 2 و 3)

المهارات المتقدّمة

- التخيل والقدرات فوق المعرفية – المقدرة على الاستخلاص والإفتراض، والإستدلال والبحث عن أدلة داعمة (النشاط 3)
- الدقة – المقدرة على العمل بفعالية ضمن قواعد محددة (الأنشطة 1، 3، و4).

المعرفة والفهم المتقدّمان

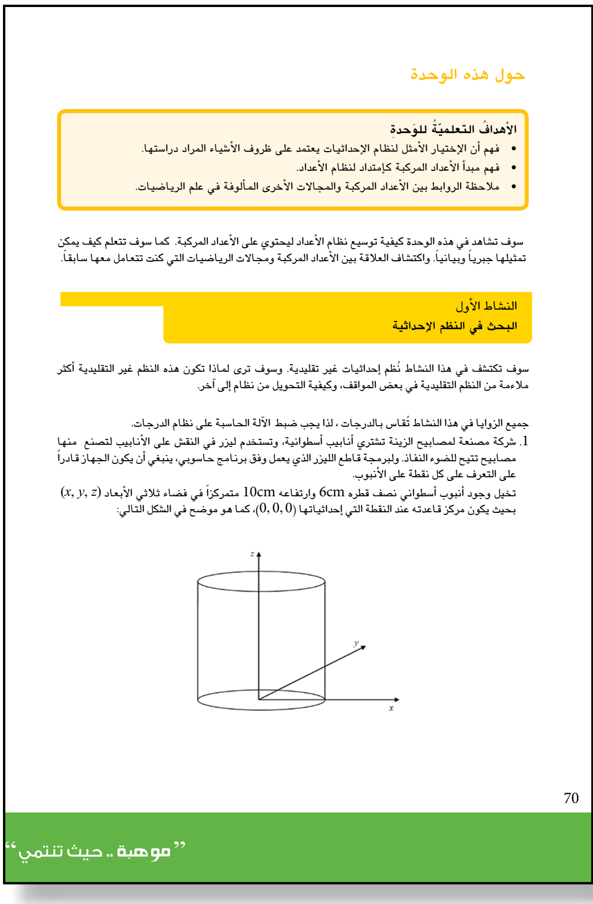
- فهم البرهان (النشاط 4)
- التقدير والإعجاب في الربط بين موضوعات الرياضيات المختلفة (النشاطان 2 و3)
- فهم "الأفكار الكبيرة" ووضوح المفاهيم (النشاطان 2 و3).
- التبصر في البنية الرياضية الأساسية (النشاط 4).

الخطّة الزمنيّة

ست ساعات تقريباً. تتطلب الأنشطة وقتاً متساوياً تقريباً.

المصادر

- إن استخدام نماذج لأشكال أسطوانية ومخروطية قد يكون مفيداً للنشاط الأول.



حول هذه الوحدة

الأهدافُ التعلميّةُ للوَحدةِ

- فهم أن الإختيار الأمثل لنظام الإحداثيات يعتمد على ظروف الأشياء المراد دراستها.
- فهم مبدأ الأعداد المركبة كإمتداد لنظام الأعداد.
- ملاحظة الروابط بين الأعداد المركبة والمجالات الأخرى المألوفة في علم الرياضيات.

سوف تشاهد في هذه الوحدة كيفية توسيع نظام الأعداد ليحتوي على الأعداد المركبة. كما سوف تتعلم كيف يمكن تمثيلها جبرياً وبيانياً. واكتشاف العلاقة بين الأعداد المركبة ومجالات الرياضيات التي كنت تتعامل معها سابقاً.

النشاط الأول
البحث في النظم الإحداثية

سوف تكتشف في هذا النشاط نُظم إحداثيات غير تقليدية. وسوف ترى لماذا تكون هذه النظم غير التقليدية أكثر ملاءمة من النظم التقليدية في بعض المواقف، وكيفية التحويل من نظام إلى آخر.

جميع الزوايا في هذا النشاط تُقاس بالدرجات ، لذا يجب ضبط الآلة الحاسبة على نظام الدرجات.

1. شركة مصنعة لمصابيح الزينة تشتري أنابيب أسطوانية، وتستخدم ليزر في النقش على الأنابيب لتصنع منها مصابيح تتيح للضوء النفاذ. ولبرمجة قاطع الليزر الذي يعمل وفق برنامج حاسوبي، ينبغي أن يكون الجهاز قادراً على التعرف على كل نقطة على الأنبوب.
تخيل وجود أنبوب أسطواني نصف قطره 6cm وارتفاعه 10cm متمركزاً في فضاء ثلاثي الأبعاد (x, y, z) بحيث يكون مركز قاعدته عند النقطة التي إحداثياتها $(0, 0, 0)$، كما هو موضح في الشكل التالي:

70

"موهبة .. حيث تنتمي"

خصائص الأداء المتقدم

- **الإبداع** – القدرة على التخيل في 3 أبعاد
- **المجازفة** – النظر في مميزات أنظمة الإحداثيات المختلفة في مدى واسع من السياقات.
- **التعاون**
- **الدقة** – استخدام القوانين لتعريف أنظمة إحداثيات بصورة متناسقة ودقيقة.
- يجب أن يكون لدى الطلاب فهم عميق في علم المثلثات ونظرية فيثاغورس.
- قد يكون من المفيد وجود نماذج لأسطوانات ومخروطات.

توصيات أسلوب التدريس

ينبغي أن يعمل الطلاب في مجموعات صغيرة، كما ينبغي عليهم مناقشة النتائج التي توصلوا إليها مع بعضهم البعض كلما تقدموا في الحل. يحتاج الطلبة إلى استخدام أجهزة الحاسب لحل السؤال 2.

حول هذا النشاط

يتيح هذا النشاط للطلاب استكشاف طرق مختلفة لتحديد موقع نقطة في شبكة ثنائية وثلاثية الأبعاد. "الفكرة الكبيرة" هي أنه يمكن تحقيق ذلك من خلال نطاق واسع من الطرق المختلفة وأن اختيار النظام الإحداثي يجب ان يعتمد على خصائص الموقف الذي يجري تحليله. سيتم تقديم نظام الإحداثيات القطبية في الجزء الثالث من هذا النشاط.

إجابات الأسئلة

1. ليس من الضروري محاولة رسم الشكل إذ يعتبر الشكل المعطى في كتاب الطالب كافياً للتخيّل.

أمعن النظر في المحاور وتخيّل أن المستوى xy هو عبارة عن مسطّح على الأرض. ويمكن اعتبار سطح الأرض هو المستوى المتشكل عندما $z = 0$ وبما أن حافة قاعدة الأسطوانة دائرة مركزها $(0,0)$ ونصف قطرها 6cm. لذلك فجميع النقاط عليها تعطى كالتالي:

$$\left(x, \sqrt{36-x^2}\right)$$

a. (i) أي نقطة لها الإحداثيات $\left(x, \sqrt{36-x^2}, 0\right)$ أو ما يكافئها

(ii) أي نقطة لها الإحداثيات $\left(x, \sqrt{36-x^2}, 10\right)$ أو ما يكافئها

(iii) أي نقطة لها الإحداثيات $\left(x, \sqrt{36-x^2}, 5\right)$ أو ما يكافئها

b. $-6 \le x \le 6,\ -6 \le y \le 6,\ 0 \le z \le 10$ أو ما يكافئها

c. (i) $((\tan^{-1}(\frac{y}{x}), 0, 6))$

(ii) $(\tan^{-1}(\frac{y}{x}), 59.0, \sqrt{136})$

(iii) $(\tan^{-1}(\frac{y}{x}), 39.8, \sqrt{61})$

لاحظ أن الإحداثيات السالبة تتسبب بتعقيدات، وحيث أن دورة دالة tan هي $180°$، فأن كل قيمة من قيم $\tan(\alpha)$ لها قيمتين ممكنتين من $\frac{y}{x}$ في المجال من $0°$ إلى $180°$. يوفرّ هذا نقطة نقاش مفيدة وفرصة لمراجعة علم المثلثات للزوايا في المجال من $0°$ إلى $360°$.

d. $(70.53, 59.0, 11.66)$

e. ثلاث نقاط لها الإحداثيات $(x, \sqrt{36-x^2}, 8)$

أو $(\alpha, 53.1, 10)$

f. $0° \le \alpha \le 360°,\ 0° \le \beta \le 59.0°,\ 0° \le \ell \le 11.66°$

$\ell = \sqrt{36 + 36\tan^2\beta}$

2. a. هنالك حقيقتان يجب ان تكونا واضحتان وهما، $x^2 + y^2 \le 7$ و $0 \le z \le 9$. (بالنسبة للطلاب الذين يواجهون صعوبة في التخيّل، فيجب أن يحاولوا تخيلّ عملية ضغط مخروط بحيث تصبح $z = 0$ لجميع النقاط على سطحه).

إن إيجاد العلاقة بين المتغيرات x، y، z يعتبر أكثر صعوبةً. بالنسبة للمثلثات المتشابهة، فإن النسبة تكون $9 - z : \sqrt{x^2 + y^2} = 9:7$

وهذا ينطبق على أي نقطة على المخروط.

إن ممّا يساعد على التخيلّ، أخذ قيمة tan للزاوية عند رأس المخروط.

b. $\ell = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},\ \alpha = \tan^{-1}(\frac{y}{x})$

$\beta = \sin^{-1}(\frac{z}{l})$

c. قد يلقى النقاش هنا الضوء على أن نظام "زاوية – طول" الذي استخدم هنا يناسب الأسطوانة أكثر من المخروط. قد يكون النظام أكثر فعالية للمخروط عندما يكون المركز عند رأس المخروط. قد تكون هنالك فرص أيضا لتقديم الإحداثيات القطبية. سيتم تطوير ذلك في الجزء الثالث من هذا النشاط. النتيجة المهمة من هذا النقاش هي الخروج بفهم أنه يوجد أكثر من طريقة لتعريف مكان النقاط في الفضاء، وأن إختيار النظام الإحداثي يكون مبنياً على خصائص الموقف الذي يجري تحليله.

3. a. قد تكون هذه فرصة لمراجعة مفهوم الإتجاهات. يجب تشجيع الأفكار الإبداعية والخلّاقة.

b. A (3.16,18.4)

B (4.47,116.6)

C (1.5, 270)

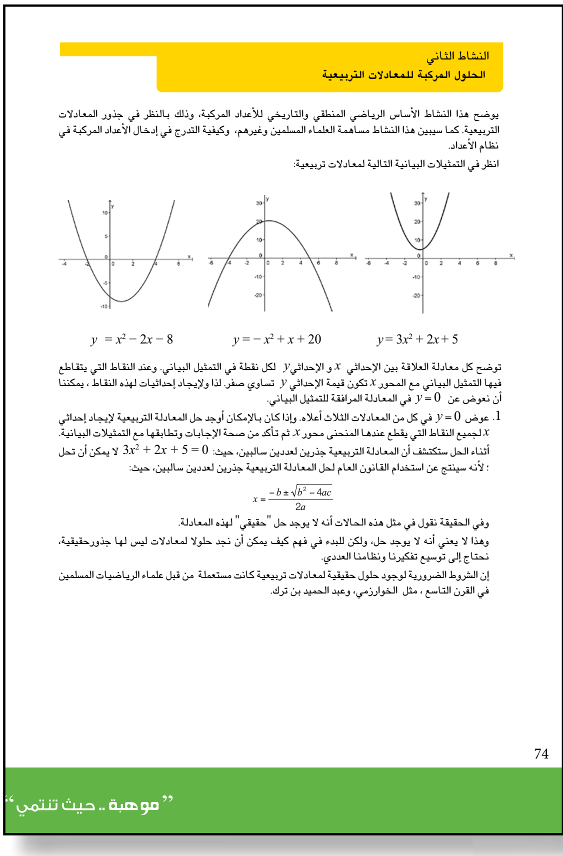
D (2.24,206.6)

d. إذا كان $x > 0, y > x$,

$\sqrt{(x^2 + y^2)} < 1.5$

إذا كان $x < 0, y > -x$,

$\sqrt{(x^2 + y^2)} < 1.5$



النشاط الثاني
الحلول المركبة للمعادلات التربيعية

يوضح هذا النشاط الأساس الرياضي المنطقي والتاريخي للأعداد المركبة، وذلك بالنظر في جذور المعادلات التربيعية. كما سيبين هذا النشاط مساهمة العلماء المسلمين وغيرهم، وكيفية التدرج في إدخال الأعداد المركبة في نظام الأعداد.

انظر في التمثيلات البيانية التالية لمعادلات تربيعية:

$y = x^2 - 2x - 8$ $\quad$ $y = -x^2 + x + 20$ $\quad$ $y = 3x^2 + 2x + 5$

توضح كل معادلة العلاقة بين الإحداثي x و الإحداثي y لكل نقطة في التمثيل البياني. وعند النقاط التي يتقاطع فيها التمثيل البياني مع المحور x تكون قيمة الإحداثي y تساوي صفر. لذا ولإيجاد إحداثيات لهذه النقاط ، يمكننا أن نعوض عن $y = 0$ في المعادلة المرافقة للتمثيل البياني.

1. عوض $y = 0$ في كل من المعادلات الثلاث أعلاه. وإذا كان بالإمكان أوجد حل المعادلة التربيعية لإيجاد إحداثي x لجميع النقاط التي يقطع عندها المنحنى محور x. ثم تأكد من صحة الإجابات وتطابقها مع التمثيلات البيانية.

أثناء الحل ستكتشف أن المعادلة التربيعية جذرين لعددين سالبين، حيث: $3x^2 + 2x + 5 = 0$ لا يمكن أن تحل ؛ لأنه سينتج عن استخدام القانون العام لحل المعادلة التربيعية جذرين لعددين سالبين، حيث:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

وفي الحقيقة نقول في مثل هذه الحالات أنه لا يوجد حل "حقيقي" لهذه المعادلة.

وهذا لا يعني أنه لا يوجد حل، ولكن للبدء في فهم كيف يمكن أن نجد حلولا لمعادلات ليس لها جذورحقيقية، نحتاج إلى توسيع تفكيرنا ونظامنا العددي.

إن الشروط الضرورية لوجود حلول حقيقية لمعادلات تربيعية كانت مستعملة من قبل علماء الرياضيات المسلمين في القرن التاسع ، مثل الخوارزمي، وعبد الحميد بن ترك.

74

"موهبة .. حيث تنتمي"

حول هذا النشاط

صمّم هذا النشاط لكي يكون مناسباً لجميع الطلاب في هذا المستوى. ولكن طريقة التدريس الأكثر فعالية تعتمد على خبرة الطلاب، إن وجدت، في الجذور غير الحقيقية للمعادلات التربيعية. ما سيميز النقاش والتوسع المحتمل فيه هو تعريف $\sqrt{-1}$ واستخدام i ليرمز إليه وكذلك النظر في الخلفية التاريخية.

- **الإبداع** – التوسع في نظام الأعداد ليشمل 3أبعاد.
- **المجازفة** – تخيلّ أسطح ثلاثية الأبعاد.
- **الاهتمام بالمجتمع.**
- **التقدير والاعجاب في الروابط** – ربط التفكير الجديد بالمعرفة السابقة لتمثيلات الدوال التربيعية بيانياً.
- **فهم "الأفكار الكبيرة" ووضوح المفاهيم**– مفهوم i
- **الكفاءة في حل المعادلات التربيعية عن طريق التحليل وباستخدام القانون العام**

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

توصيات أسلوب التدريس

يناسب هذا النشاط جميع الطلاب في الفصل. يجب تشجيع الطلاب على مناقشة نتائجهم والتأكد من أعمال بعضهم البعض.

إجابات الأسئلة

.1 $x^2-2x-8=0\ ,\ (x-4)(x+2)=0\ ,\ x=\{4,-2\}$

$-x^2+x+20=0,\ (-x+5)(x+4)=0\ ,\ x=\{5,-4\}$

$3x^2+2x+5=0\ ,\ x=\frac{-2\pm\sqrt{4-60}}{6}=-\frac{1}{3}\pm\frac{\sqrt{-14}}{3}$

التمثيل البياني للمعادلة $y=3x^2+2x+5$ لا يتقاطع مع المحور x لأنه لا يوجد جذور حقيقية للمعادلة

$3x^2+2x+5=0$. إن محاولة حل المعادلة باستخدام القانون العام سوف يعطي التالي

$$x=\left\{-\frac{1}{3}\pm\frac{\sqrt{-14}}{3},-\frac{1}{3}\pm i\frac{\sqrt{14}}{3}\right\}$$

حيث $i=\sqrt{-1}$. بما أن قيمة b^2-4a (المميز) سالبة، فإنه لا يوجد جذور حقيقية للمعادلة.

يحتاج الطلاب في هذه المرحلة أن يكون لديهم فكرة واضحة عن تعريف واستخدام $i=\sqrt{-1}$

.2

$i=i$	$i^4=1$
$i^2=-1$	$i^5=i$
$i^3=-i$	$i^6=-1$

إن إيجاد تعميم يحتاج إلى استخدام البواقي (Modulo) وهذا باقي قسمة $\frac{n}{4}$.

إذا كان	فإن
$n \bmod (4)=0$	$i^n=1$
$n \bmod (4)=1$	$i^n=i$
$n \bmod (4)=2$	$i^n=-1$
$n \bmod (4)=3$	$i^n=-i$

.3 $y=0$

.4 الإحداثيات هي على الشكل $(\mathrm{Re}(x), \mathrm{Im}(x), y)$

لدينا $1=3x^2+2x+5$ أو بشكل آخر

$0=3x^2+2x+4$ وبحل المعادلة باستخدام

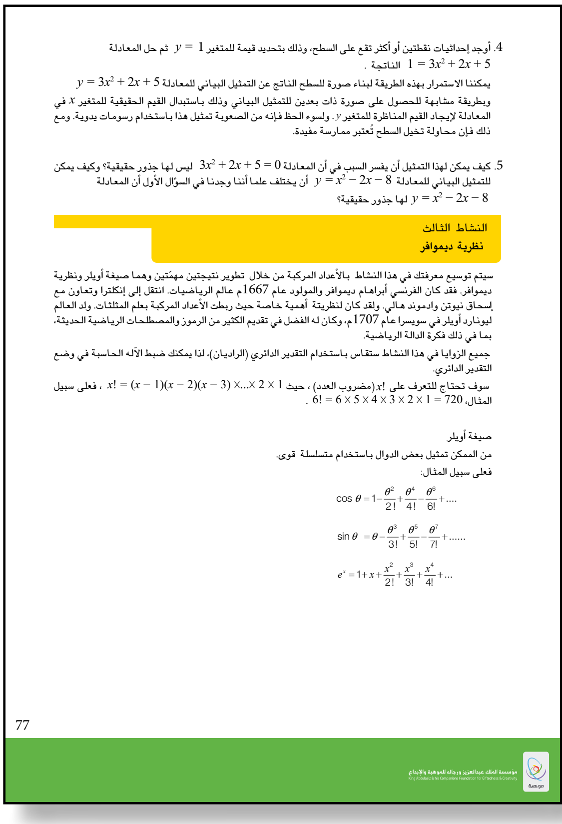
القانون العام تحصل على الحل التالي:

$$x=\left\{-\frac{1}{3}+i\frac{\sqrt{-11}}{3},-\frac{1}{3}-i\frac{\sqrt{-11}}{3}\right\}$$

وبما أن $y=1$ ، فأن مجموعة الحل هي

$$\left\{\left(-\frac{1}{3},\frac{\sqrt{11}}{3},1\right),\left(-\frac{1}{3}\ ,\ -\frac{\sqrt{11}}{3},1\right)\right\}$$

.5 يجب أن يتقاطع السطح مع المستويات $\mathrm{Im}(x)=0$ و $y=0$ حتى يكون للمعادلة جذور حقيقية.



4. أوجد إحداثيات نقطتين أو أكثر تقع على السطح، وذلك بتحديد قيمة للمتغير $y = 1$ ثم حل المعادلة الناتجة $1 = 3x^2 + 2x + 5$.

يمكننا الاستمرار بهذه الطريقة لبناء صورة للسطح الناتج عن التمثيل البياني للمعادلة $y = 3x^2 + 2x + 5$ وبطريقة مشابهة للحصول على صورة ذات بعدين للتمثيل البياني وذلك باستبدال القيم الحقيقية للمتغير x في المعادلة لإيجاد القيم المناظرة للمتغير y. ولسوء الحظ فإنه من الصعوبة تمثيل هذا باستخدام رسومات يدوية. ومع ذلك فإن محاولة تخيل السطح تُعتبر ممارسة مفيدة.

5. كيف يمكن لهذا التمثيل أن يفسر السبب في أن المعادلة $3x^2 + 2x + 5 = 0$ ليس لها جذور حقيقية؟ وكيف يمكن للتمثيل البياني للمعادلة $y = x^2 - 2x - 8$ أن يختلف علما أننا وجدنا في السؤال الأول أن المعادلة $y = x^2 - 2x - 8$ لها جذور حقيقية؟

النشاط الثالث
نظرية ديموافر

سيتم توسيع معرفتك في هذا النشاط بالأعداد المركبة من خلال تطوير نتيجتين مهمّتين وهما صيغة أويلر ونظرية ديموافر. فقد كان الفرنسي أبراهام ديموافر والمولود عام 1667م عالم الرياضيات. انتقل إلى إنكلترا وتعاون مع إسحاق نيوتن وادموند هالي. ولقد كان لنظريته أهمية خاصة حيث ربطت الأعداد المركبة بعلم المثلثات. ولد العالم ليونارد أويلر في سويسرا عام 1707م، وكان له الفضل في تقديم الكثير من الرموز والمصطلحات الرياضية الحديثة، بما في ذلك فكرة الدالة الرياضية.

جميع الزوايا في هذا النشاط ستقاس باستخدام التقدير الدائري (الراديان)، لذا يمكنك ضبط الآله الحاسبة في وضع التقدير الدائري.

سوف تحتاج للتعرف على $x!$(مضروب العدد) ، حيث $x! = (x-1)(x-2)(x-3) \times ... \times 2 \times 1$ ، فعلى سبيل المثال، $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$.

صيغة أويلر

من الممكن تمثيل بعض الدوال باستخدام متسلسلة قوى.

فعلى سبيل المثال:

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + ...$$

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + ...$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ...$$

77

حول هذا النشاط

يبني هذا النشاط أفكاراً حول الأعداد المركبّة تم تطويرها في النشاط الثاني. سيتم توجيه الطالب في السؤال الأول لتفسير صيغة إيلر والمبنية على متسلسلات القوى. يستخدم السؤال الثاني صيغة إيلر لإثبات نظرية ديموافر.

خصائص الأداء المتقدم

- **الإبداع** – تخيّل الأعداد المركبّة في رسم أرجاند (Argand)
- **الاهتمام بالمجتمع** – استخدام المعرفة السابقة لتطوير نتائج تكون جديدة بالنسبة إلى الطلاب.
- **التقدير والاعجاب في الروابط بين موضوعات الرياضيات المختلفة**– العلاقة مع علم المثلثات.
- **التخيل والقدرة وراء المعرفية**– استخدام المعرفة في مجالات مختلفة من الرياضيات لتطوير نتيجةً جديدةً.
- **فهم "الأفكار الكبيرة" ووضوح المفاهيم**– تطوير نتائج مهمة رياضياً.
- **الدقة** – استخدام دقيق لنطاق e^x و $\cos\theta$ و $\sin\theta$

استخدام متسلسلات القوى للدوال ، ، في السؤال الأول. هذه المتسلسلات معطاة للطالب والنشاط لا يعتمد على الخبرة السابقة فيها، وبشكل مماثل، تم استخدام الصيغة القطبية للأعداد المركبّة: بالنسبة للطلاب الغير معتادين على هذا الرمز، فإنه لا زال بإمكانهم دراسة النشاط ولكنهم سيكونون بحاجة إلى مساعدة إضافية.

توصيات أسلوب التدريس

يمكن وضع الطلاب الموهوبين في مجموعات مناسبة.

إجابات الأسئلة

1. a. يوفر النشاط الفرصة للطلاب لاستكشاف متسلسلة القوى. يمكن التوسع لدراسة متسلسلات قوى أخرى إذا رغبنا في ذلك.

b.

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \dots.$$

$$1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots$$

$$\left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots\right)$$

$$= \cos\theta + i\sin\theta$$

2. a. $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

ومن صيغة إيلر مباشرة نجد أن $z = re^{i\theta}$

b. $zw = (ax - by) + i(bx + ay)$

c. $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}\,,\ |w| = \sqrt{x^2 + y^2}$

d. $|zw|^2 = (ax - by)^2 + (bx + ay)^2$

$$= a^2x^2 + b^2y^2 - 2abxy + b^2x^2 + a^2y^2 + 2abxy$$
$$= (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$$
$$= |z|^2|w|^2$$

ولذلك $|zw| = |z||w|$

e.

$$\arg(zw) = \arg(r_1e^{i\theta} \times r_2e^{i\phi})$$
$$= \arg(r_1r_2e^{i\theta}\,e^{i\phi})$$
$$= \arg(r_1r_2e^{i\theta + i\phi})$$
$$= \arg(z) + \arg(w)$$

وهذا هو المطلوب

لاحظ أن هذا المنطق يمكن أن يستخدم أيضاً كطريقة بديلة لإظهار أن مقياس حاصل ضرب عددين مركبين يساوي حاصل ضرب مقياسيهما.

f.

$$z^2 = (r \times r,\ \theta + \theta)$$
$$= (r^2,\ 2\theta)$$

g.

$$z^2 = (r^2, 2\theta),\ z^3 = (r^3, 3\theta),$$
$$z^4 = (r^4, 4\theta), \dots\ z^n = (r^n, n\theta)$$

h.

$$(1+i) = \left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$$

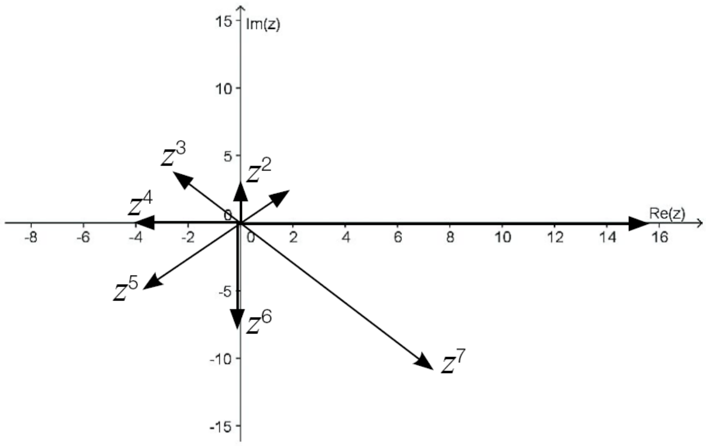
وبالتالي، $(1+i)^8 = \left(\sqrt{2}^8, \frac{8\pi}{4}\right)$

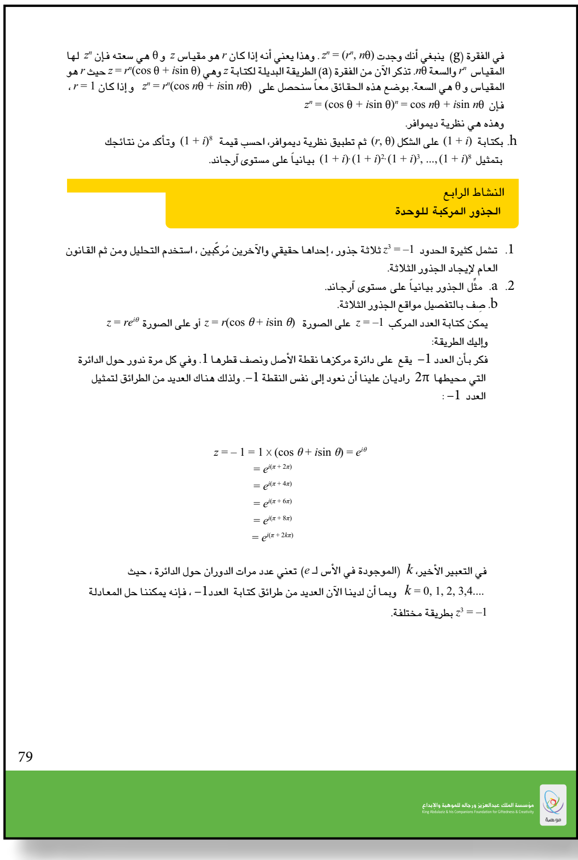
$= (16, 2\pi)$

ولذلك

$$(1+i)^8 = 16$$

تظهر مواقع القوى على مستوى أرجاند أدناه.




في الفقرة (g) ينبغي أنك وجدت $z^n = (r^n, n\theta)$. وهذا يعني أنه إذا كان r هو مقياس z و θ هي سعته فإن z^n لها المقياس r^n والسعة $n\theta$. تذكر الآن من الفقرة (a) الطريقة البديلة لكتابة z وهي $z = r^n(\cos\theta + i\sin\theta)$ حيث r هو المقياس و θ هي السعة. بوضع هذه الحقائق معاً سنحصل على $z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$ و إذا كان $r = 1$، فإن $z^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

وهذه هي نظرية ديموافر.

h. بكتابة $(1+i)$ على الشكل (r, θ) ثم تطبيق نظرية ديموافر، احسب قيمة $(1+i)^8$ وتأكد من نتائجك بتمثيل $(1+i), (1+i)^2, (1+i)^3, \dots, (1+i)^8$ بيانياً على مستوى آرجاند.

النشاط الرابع
الجذور المركبة للوحدة

1. تشمل كثيرة الحدود $z^3 = -1$ ثلاثة جذور، إحداها حقيقي والآخرين مُركّبين، استخدم التحليل ومن ثم القانون العام لإيجاد الجذور الثلاثة.

2. a. مثِّل الجذور بيانياً على مستوى آرجاند.

b. صِف بالتفصيل مواقع الجذور الثلاثة.

يمكن كتابة العدد المركب $z = -1$ على الصورة $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ أو على الصورة $z = re^{i\theta}$

وإليك الطريقة:

فكر بأن العدد -1 يقع على دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 1. وفي كل مرة ندور حول الدائرة التي محيطها 2π راديان علينا أن نعود إلى نفس النقطة -1. ولذلك هناك العديد من الطرائق لتمثيل العدد -1:

$$\begin{aligned} z = -1 = 1 \times (\cos\theta + i\sin\theta) &= e^{i\theta} \\ &= e^{i(\pi+2\pi)} \\ &= e^{i(\pi+4\pi)} \\ &= e^{i(\pi+6\pi)} \\ &= e^{i(\pi+8\pi)} \\ &= e^{i(\pi+2k\pi)} \end{aligned}$$

في التعبير الأخير، k (الموجودة في الأس لـ e) تعني عدد مرات الدوران حول الدائرة، حيث $k = 0, 1, 2, 3, 4 \dots$ وبما أن لدينا الآن العديد من طرائق كتابة العدد -1، فإنه يمكننا حل المعادلة $z^3 = -1$ بطريقة مختلفة.

79

حول هذا النشاط

يعطي هذا النشاط الفرصة للطلبة لإستكشاف طرق مختلفة في إيجاد الجذور المركبة لكثيرات حدود وتمثيل هذه الحلول بيانياًعلى مستوى آرجاند.

خصائص الأداء المتقدم

- الإبداع– تمثيل الأعداد المركبة على مستوى آرجاند.
- وضوح المفاهيم – تطوير العديد من النتائج الرياضية.
- **التقدير والاعجاب في الربط بين مجالات الرياضيات المختلفة – الربط مع حساب المثلثات**
- فهم "الأفكار الكبيرة" والوضوح المفاهيمي– أساسيات العدد المركب i
- مهارات حل معادلات كثيرات حدود من الدرجة الثانية بالتحليل وباستخدام القانون العام.

توصيات أسلوب التدريس

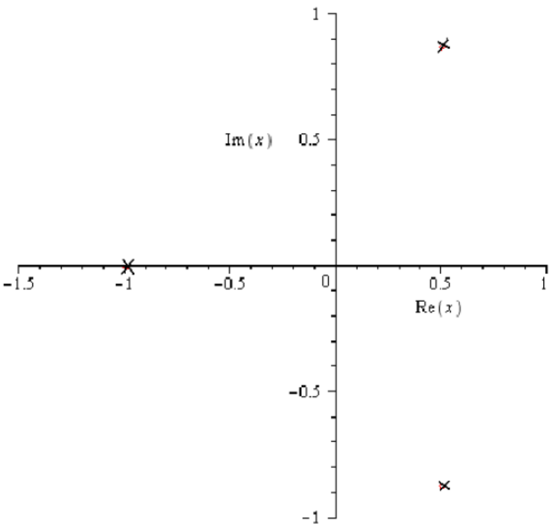
يمكن وضع مجموعة الطلاب الموهوبين في مجموعات مناسبة

إجابات الأسئلة

1. من الواضح أن المقدار $z = \sqrt[3]{-1} = -1$ يمثل أحد الجذور وبالتالي فإن المقدار $(z+1)$ يمثل عامل مشترك لكثيرة الحدود $z^3 + 1 = (z+1)(z^2 - z + 1)$ يمكننا استخدام القانون العام لحل المعادلة التربيعية $z^2 - z + 1 = 0$ والتي جذراها هما:

$$z = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i = 0.5 \pm 0.87i$$

2.



3.a يمثل المقدار $z = \sqrt[3]{1} = 1$ أحد الجذور وبالتالي فإن المقدار $(z-1)$ يمثل عامل مشترك لكثيرة الحدود $z^3 - 1 = (z-1)(z^2 + z + 1)$ استخدم الآن القانون لحل المعادلة التربيعية وإيجاد الجذور الأخرى وهي:

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i = -0.5 \pm 0.87i$$

.b

$$z = 1 = 1(\cos\theta + i\sin\theta) = e^{i\theta}$$

وبالتالي فإن $z = e^{i(0+2\pi k)}$ المعادلة

$z^3 = 1 = e^{i(0+2\pi k)}$ سوف تعطينا المقدار

إذا كان $z = e^{i(0+2\pi k)/3}$

$$k = 0, \quad z = e^{0i} = 1$$

$$k = 1, \quad z = e^{\frac{2\pi i}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$k = 2, \quad z = e^{\frac{4\pi i}{3}} = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

وهذه تمثل الجذور الثلاث المطلوبة.

.a.4 فيما يلي حل الفرعين a و c ، وتُحل بقية الأفرع بالطريقة نفسها

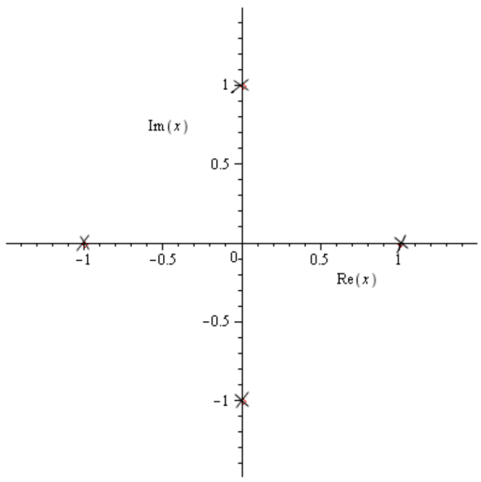
$$z = e^{i(0+2\pi k)/4} = e^{i(0+\pi k)/2}$$

إذا كان $k = 0, \quad z = e^{0i} = 1$

$$k = 1, \quad z = e^{\frac{\pi i}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = 0 + i = i$$

$$k = 2, \quad z = e^{\pi i} = \cos\pi + i\sin\pi = -1 + 0i = -1$$

$$k = 3, \quad z = e^{\frac{3\pi i}{2}} = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = 0 - i = -i.$$



.c يمكننا إعادة صياغة المعادلة على الصورة

$$z^4 = i = 0 + i = e^{i(\frac{\pi}{2}+2\pi k)}$$

وبالتالي فإن $e^{i(\frac{\pi}{2}+2\pi k)/4} = e^{i(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2})}$

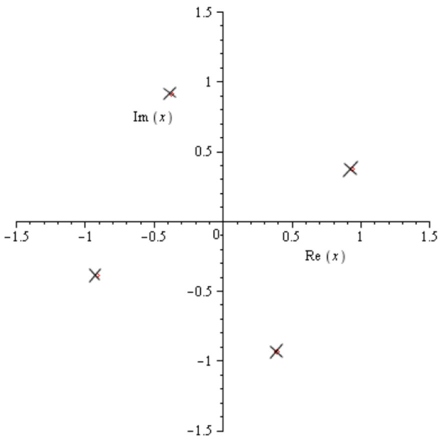
$$k = 0, \quad z = e^{\frac{\pi i}{8}} = \cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8} = 0.924 + 0.382i$$

$$k = 1, \quad z = e^{\frac{5\pi i}{8}} = \cos\frac{5\pi}{8} + i\sin\frac{5\pi}{8} = -0.383 + 0.924i$$

$$k = 2, \quad z = e^{\frac{9\pi i}{8}} = \cos\frac{9\pi}{8} + i\sin\frac{9\pi}{8} = -0.924 - 0.383i$$

$$k = 3, \quad z = e^{\frac{13\pi i}{8}} = \cos\frac{13\pi}{8} + i\sin\frac{13\pi}{8} = 0.383 - 0.924i$$

وتمثل هذه الأعداد المركبة الجذور الأربعة المطلوبة.



.5 حيث أن $i = e^{i(\frac{\pi}{2}+2\pi k)}$ فإن

$z^3 = 8i = 8e^{i(\frac{\pi}{2}+2\pi k)}$ وبالتالي نحصل على الصيغة:

$$z = 2e^{i(\frac{\pi}{2}+2\pi k)/3} = 2e^{i(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi k}{3})}$$

$$k = 0, \quad z = 2e^{\frac{\pi i}{6}} = 2\cos\frac{\pi}{6} + 2i\sin\frac{\pi}{6} = \sqrt{3} + i$$

$$k = 1, \quad z = 2e^{\frac{5\pi i}{6}} = 2\cos\frac{5\pi}{6} + 2i\sin\frac{5\pi}{6} = -\sqrt{3} + i$$

$$k = 2, \quad z = 2e^{\frac{9\pi i}{6}} = 2\cos\frac{9\pi}{6} + 2i\sin\frac{9\pi}{6} = 0 - 2i$$

فرص التقويم

يوفّر هذا النشاط فرص جيدة لتقييم مدى طلاقة الطلاب في التعامل مع النماذج الجبرية والتمثيلات البيانية للدوال، ومدى قدرتهم على استخدام تقنيات التمثيل البياني للإستكشاف. إن استخدام تقنيات التمثيل البياني للتأكد من صحة التمثيلات البيانية التي أنتجها الطلاب على الورق (أو عدم صحتها) يمكّن من التقييم الذاتي ومن تقييم الزملاء وهذا بدوره يعزز من استقلالية الطالب.

يجب أن يرتكز تقييم الطلاب على الوضوح والدقة الرياضية في استنتاجاتهم.

الوحدة الثامنة

الإحصاء والإحتمالات

مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع
King Abdulaziz & his Companions Foundation for Giftedness & Creativity
موهبة

نظرة عامّة

تهدف هذه الوحدة الى تطوير بعض الطرق التي يمكن للطلاب تطبيقها عند تحليل البيانات ووضع الاستنتاجات باستعمال الإحصاء والاحتمالات . سوف يقوم الطلاب بحساب الاحتمال في مواقف معقدة، من ثم سوف يقومون بتحليل مجموعات من البيانات في متغير واحد وفي متغيرين باستعمال بعض الطرق الاحصائية. بينما يجمع النصف الثاني من هذه الوحدة بين الاحتمالات و الاحصاءات من خلال تطوير تطبيقات للتوزيعات الاحتمالية تتضمن نمذجة مجموعات من البيانات والتوصل إلى استنتاجات من خلالها. وفي النشاطين الأخيرين، سيتم دراسة التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات العشوائية المنفصلة والمتصلة.

الأهداف التعلمية للوحدة

- تطوير بعض أساليب تحليل البيانات باستعمال الاحصاء والاحتمالات.
- استعمال بعض النماذج الاحتمالية و الاحصائية المعقدة للتوصل الى استنتاجات حول البيانات.

المعرفة السابقة

يجب ان يكون الطلاب على دراية بفكرة الاحتمالات الاساسية. يجب عليهم ايضا تذكر نموذج ذو الحدين من الصف الثاني ثانوي مع استعمال التباديل بطلاقة. يجب ان تكون لديهم الثقة في حساب المقاييس الاساسية للنزعة المركزية والتشتت. يجب ان يكون لديهم معرفة اساسية بالتوزيعات الاحتمالية.

خصائص الأداء المتقدم

القيم والاتّجاهات والسمات

- الاستقصاء (الأنشطة 1،2،3،4)
- المجازفة (النشاط 2)
- الاهتمام بالمجتمع (النشاطان 3 و 4)

المهارات المتقدّمة

- الربط مع واقع الحياة (الأنشطة 1،2،3،4)
- النمذجة (النشاطان 3 و 4)

المعرفة والفهم المتقدّمان

- الموضوع المفاهيمي في الاستدلال النسبي (النشاط 1)
- التبصر في البنية الرياضية الأساسية (الأنشطة 2،3،4)

الخطّة الزمنيّة

ست ساعات تقريباً. تتطلب الأنشطة وقتاً متساوياً تقريباً.

المصادر

- آلة حاسبة عادية مع وسائل احصائية.
- يعد استخدام برنامج الجيوجبرا أو أي تقنية تمثيل بياني والجداول الإلكترونية اساسيا.

حول هذه الوحدة

الأهداف التعلميّة للوحدة

- تطوير بعض أساليب تحليل البيانات باستعمال الإحصاء والاحتمالات.
- استعمال بعض النماذج الاحتمالية والاحصائية المعقدة للتوصل إلى استنتاجات حول البيانات.

في هذه الوحدة سوف تقوم بتطبيق بعض طرق الإحصاء والاحتمالات في مواقف مختلفة. النشاط الأول هو حول الاحتمال وهنا سوف تقوم بحساب الاحتمالات في بعض المواقف المعقدة. النشاط الثاني يتيح لك الفرصة لتطبيق مجموعة كاملة من المقاييس الاحصائية التي تعلمتها في مواقف تحتوي مجموعات من البيانات ذات متغير أو متغيرين. وسوف تقوم في النشاطين الأخيرين بإيجاد نماذج تمثل مجموعات مختلفة من البيانات، وهذه النماذج هي توزيعات احتمالية وهي مصنفة بحسب البيانات فإما أن تكون منفصلة أو

النشاط الأول
حساب الاحتمالات

عائلات لديها ثلاثة أطفال

1. a. أُجريت دراسة على عيّنة من العائلات لدى كل منها ثلاثة أطفال. استعمل جدولاً إلكترونيًا (أو حاسبة) لحساب احتمالات جميع التراتيب الممكنة لوجود أولاد وبنات في العائلة ذات الثلاثة أطفال، ثمّ اكتبها وحدّد بوضوح أيّ افتراضات تريد وضعها.

b. إذا كان 40%من عيّنة الدراسة مكوّنة من عائلات لديها أطفال من جنس واحد، فما الذي يمكنك استنتاجه؟

c. يظنّ بعض الباحثين أنّ احتمال أن يكون الطفل ولدًا أو بنتًا في بعض المجتمعات غير متساوٍ. لذا؛ عدّل المَعلَمة في (الجدْول الإلكترونيّ/الحاسبة) لإيجاد احتمال تقريبيّ لأن يكون المولود ولدًا يفسّر على نحوٍ أفضل المعطيات المتعلّقة بالعيّنة الواردة في الفرع b.

مسألة تاريخ الميلاد

2. a. أثبت ما يلي: إذا اختير شخصان على نحو عشوائيّ، فإنّ احتمال أن يكون لهما تاريخ الميلاد نفسه هو: $1-\frac{365}{365}\times\frac{364}{365}$. ما الافتراضات التّي وضعتها؟

b. **أثبت ما يلي**: احتمال أن يكون لشخصين على الأقلّ من بين ثلاثة أشخاص تاريخ الميلاد نفسه هو: $1-\frac{365}{365}\times\frac{364}{365}\times\frac{363}{365}$.

c. وسّع الصيغة في الجدول الإلكترونيّ لإكمال الجدول التالي:

عدد الأشخاص في العيّنة	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
احتمال أن يكون لشخصين منهم على الأقلّ تاريخ الميلاد نفسه										

82

"موهبة .. حيث تنتمي"

حول هذا النشاط

يشتمل هذا النشاط على ثلاثة أنشطة منفصلة تعتمد على الاحتمالات هي: العائلات ذات الثلاثة أطفال، وتاريخ الميلاد، والأعداد العشوائيّة. وبما أنّ هذه المهامّ تتطلّب حسابات مكثّفة فمن الأفضل استعمال الجداول الإلكترونيّة لحلّها.

عائلات لديها ثلاثة أطفال

تعتمد المهمّة الأولى على نظريّة ذات الحدّين حول توزيع الذكور والإناث في العائلة التّي لديها ثلاثة أطفال. ويتعيّن على الطلاّب أن تكون لديهم قدرة على التعامل مع المسألة وذلك بتجزئتها إلى 8 خيارات ممكنة لترتيب الذكور والإناث. والهدف من ذلك هو تشجيع الطلاّب على التفكير بعناية في الفرضيّات الأساسيّة التّي يحتاجونها لنمذجة المسألة. إنّ استعمال الجداول الإلكترونيّة يتيح للطلاّب إمكانيّة نمذجة التغير في احتمال أن يكون الطفل ولدًا أو بنتًا إلى أيّ قيمة احتمالية غير 0.5، وإيجاد قيمة لهذا الاحتمال تناسب البيانات في الأجزاء التالية.

تاريخ الميلاد

المهمّة الثانية هي سؤال تقليديّ في الاحتمالات. ويكون الحلّ على الأغلب مدهشًا؛ نظرًا لصعوبة حسابه حيث إنّك تحتاج إلى مجموعة من 23 شخصًا فقط ليكون احتمال أن يشترك اثنان (أو أكثر) منهم في تاريخ الميلاد يساوي $\frac{1}{2}$. وتتطلّب هذه المهمّة أفكارًا أساسيّة في الاحتمالات (الحوادث المستقلّة والمتتامّة)، غير أنّ المحتوى يتطلّب فهمًا عميقًا للمفاهيم التّي تتضمّنها المسألة.

الأعداد العشوائيّة

من المحتمل أن يكون الطلاّب قد تعاملوا مع مسائل ذات فضاءات عينيّة مشابهة للمهمّة الثالثة، ولكن بمستوى أبسط. لذا؛ يتعيّن عليهم إيجاد القاعدة أو النمط ليساعدهم على حصر عدد نواتج كلّ حادثة. ويمكن حلّ الأجزاء الأولى منها بوساطة الجداول الإلكترونيّة إنْ توافرت. وتتضمّن الأجزاء التالية تعميمات، لكنّ خيارات ICT وحدها غير كافية.

خصائص الأداء المتقدم

قد يظهر الطالب في هذا النشاط السمات الآتية:

- ربط الرياضيّات بالواقع والتعبير عن المواقف الحياتيّة باستعمال الرياضيّات.
- القدرة على إيجاد نماذج رياضيّة.
- وضوح المفاهيم.
- التبصّر العميق للبنية الرياضيّة الأساسيّة.

توصيات أسلوب التدريس

يمكن وضع الطلاب الموهوبين في مجموعات مناسبة.

إجابات الأسئلة

1. **عائلات لديها ثلاثة**

a. قد يكوّن الطلاب جدولاً مثل الجدول 1 أدناه والفرضيّات التّي يتطلّب وضعها هي:

$p(b) = p(g) = 0.5$، حيث الرمز b يعني ولد و الرمز g يعني بنت، وأنّ جنس الطفل الجديد لا يعتمد على أيّ ولادة سابقة في العائلة.

b. إذا كان $p(b) = p(g) = 0.5$ فإنّ احتمال أن يكون الأطفال الثلاثة من جنس واحد هو

$0.25 = 0.125 + 0.125$ ، أيّ 25%. إذن، قد يستنتج الشخص أنّ الفرض غير صحيح لهذه العيّنة الخاصّة.

أو أنّ العيّنة اختيرت بطريقة غير عشوائيّة، ممّا يعني أنّ العائلات التّي لديها ثلاثة أطفال من جنس واحد ممثلّة أكثر في العيّنة، مقارنة بالمجتمع كاملاً.

c. بالتجريب والتحسين $p(b) = 0.276$ أو 0.724 .

تعطي $p(bbb \text{ or } ggg) = 0.4$. المعادلة الحقيقيّة التّي يتعيّن حلّها هي المعادلة التكعيبيّة:

$$p^3 + (1-p)^3 = 0.4$$

2. **مسألة تاريخ الميلاد**

a و b نحصل على الجزأين الأوّل والثاني على افتراض أنّه لا يشترك اثنان في تاريخ ميلاد واحد، وهذا يعطي: $\frac{364}{365} \times \frac{365}{365}$ لمجموعة من شخصين، و $\frac{363}{365} \times \frac{364}{365} \times \frac{365}{365}$ لمجموعة مكوّنة من ثلاثة أشخاص. ولقد أهملنا إمكانيّة وجود سنوات كبيسة، وافترضنا أنّ تواريخ الميلاد موزّعة بصورة متساوية على السنة (التّي لا تكون دائمًا صحيحة في العالم كلّه).

c. الإجابات موجودة في الجدول 2 إلى أقرب جزء من ألف. لذا يتعيّن تشجيع الطلاّب الذين يستعملون الجداول الإلكترونيّة، على استقراء معادلة يمكن بوساطتها إجراء الحسابات بالسحب إلى آخر الجدول. فمثلاً يمكن أن تكون الصفوف الأولى من الجدول الإلكترونيّ على غرار المثال المبيّن أدناه.

الجدول 1

	ثلاثة أولاد	ولدان			ولد واحد			لا يوجد أولاد	المجموع
التراتيب	bbb	bbg	bgb	gbb	bgg	gbg	ggb	ggg	
الاحتمال	0.125	0.125	0.125	0.125	0.125	0.125	0.125	0.125	1.000
مجموع الاحتمالات	0.125	0.375			0.375			0.125	1.000

الجدول 2

عدد الأشخاص في العيّنة.	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
احتمال أن يكون اثنان منهم على الأقلّ لهما تاريخ الميلاد نفسه.	0.117	0.411	0.706	0.891	0.970	0.994	0.999	1.000	1.000	1.000

الجدول الإلكترونيّ 1

	عمود			
C	B	A		
1-p	p	n	1	صف
=1-B2	=365/365	1	2	
=1-B3	=B2*(365-A2)/365	2	3	
=1-B4	=B3*(365-A3)/365	3	4	

24	23	22	21	عدد الأشخاص في العيّنة
0.538	0.507	0.476	0.444	احتمال أن يكون اثنان منهما لهما تاريخ الميلاد نفسه

d. توجد نسخة أخرى من الجدول الموجود في فرع c تتضمّن تفصيلات أكثر، وتتضمّن أيضًا الجدول أعلاه. وتبيّن أنّنا بحاجة إلى 23 شخصًا لضمان فرصة أكبر من 0.50 ليكون لاثنين منهم على الأقلّ تاريخ الميلاد نفسه.

e. يسمح استعمال جدول إلكترونيّ بتغيير الأيّام في أثناء الحسابات، ويُظهر الإجابة تلقائيًّا. الإجابة هي: 32، وهذا مدهش أيضًا؛ لأنّ عدد أيّام سنة المريخ يساوي مثليْ عدد أيام السنة على الأرض.

3. الأعداد العشوائيّة

a. إذا كان متوسط عددين (للأعداد من 1 إلى 10) هو 10 فعندئذٍ يجب أن يكون كلّ من العددين 10. وهذا يحدث في حالة واحدة من بين الحوادث التّي عددها $100 = 10^2$، فتكون الإجابة 0.01، أو $\frac{1}{100}$. اعتمد على الجدول 10×10 والذي يكون في كلّ خليّة منه ناتج جمع العددين المناظرين في الصف الأول و العمود الأول.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

يوجد مجموع واحد فقط أكبر من 10 في العمود الأوّل، واثنان في العمود الثاني وثلاثة في الثالث، ....، 10 في العمود العاشر. لذا؛ فإنّ عدد المجاميع الأكبر من 10 هو

$1+2+3+\ldots+10 = 55$ فيكون الاحتمال المطلوب هو:

$\frac{55}{100} = 0.55$

والجدول الآتي يمثّل هذه الفروق:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7
4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6
5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5
6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4
7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3
8	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2
9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1
10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

يوجد قطران من الخلايا التي تحتوي العدد 1،
وعدد هذه الخلايا يساوي 18، لذا فاحتمال أن
يكون الفرق 1 هو $0.18 = \frac{18}{100}$

b. إذا كان متوسط عددين (للأعداد من 1 إلى 100) يساوي 100 فإنّ كلاً منهما يساوي 100. وهذا يحدث في حالة واحدة فقط من الحالات التّي عددها $100^2 = 10000$ ، فيكون الاحتمال $\frac{1}{10000}$ أو 0.0001.

اعتمد على جدول 100×100 يكون في كلّ خليّة منه ناتج جمع العددين في الصف والعمود المناظرين.

يوجد مجموع واحد فقط من المجاميع أكبر من 100 في العمود الأوّل هو $100 + 1 = 101$، واثنان في العمود الثاني هما $99 + 2 = 101$

و $100 + 2 = 102$ وثلاثة في العمود الثالث، ....، و100 في العمود المئة. لذا؛ فإنّ عدد المجاميع الأكبر من 100 هو: $1 + 2 + 3 + \ldots + 100$

وقد ابتكر العالم الألماني غاوس الطريقة التالية لحساب هذا المجموع عندما كان طالباً في المدرسة

$$= (1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + \ldots + (50 + 51)$$

$$= 50 \times 101$$

$$= 5050$$

و بذلك يكون الاحتمال المطلوب هو:

$\frac{5050}{10000} = 0.505$.

وفي جدول الفروق يوجد قطران على جانبيْ القطر الرئيس في خلايا كلّ منهما العدد 1.
يحتوي القطر الرئيس على 100 مدخلة، لذا؛ يحتوي كلّ من القطرين على جانبيْ القطر الرئيس على 99 مدخلة. ويكون عدد الخلايا التّي تحتوي على العدد واحد يساوي $2 \times 99 = 198$

لذا؛ فإنّ احتمال أن يكون الفرق 1 يساوي:

$\frac{198}{10000} = 0.0198$

c. بتعميم الجزء الأول من الفرعين a و b تكون الإجابة $\frac{1}{n^2}$

بتعميم الجزء الثاني من الفرعين a و b يكون مجموع واحد فقط من المجاميع في العمود الأوّل أكبر من n، واثنان في العمود الثاني، وثلاثة في الثالث، ...، و n في العمود رقم n. لذا؛ فإنّ عدد المجاميع الأكبر من n في الجدول كلّه هو:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n}{2}(n + 1)$$

ويكون الاحتمال المطلوب هو:

$$\frac{\frac{n}{2}(n+1)}{n^2} = \frac{n+1}{2n}$$

كما هو الحال في الجزء الثالث من الفرعين a و b فإنّ الفرق 1 الموجود في القطرين على جانبي القطر الرئيس وكل منهما يحوي $n-1$ من المدخلات ومجموعهما هو $2(n-1) = 2n - 2$

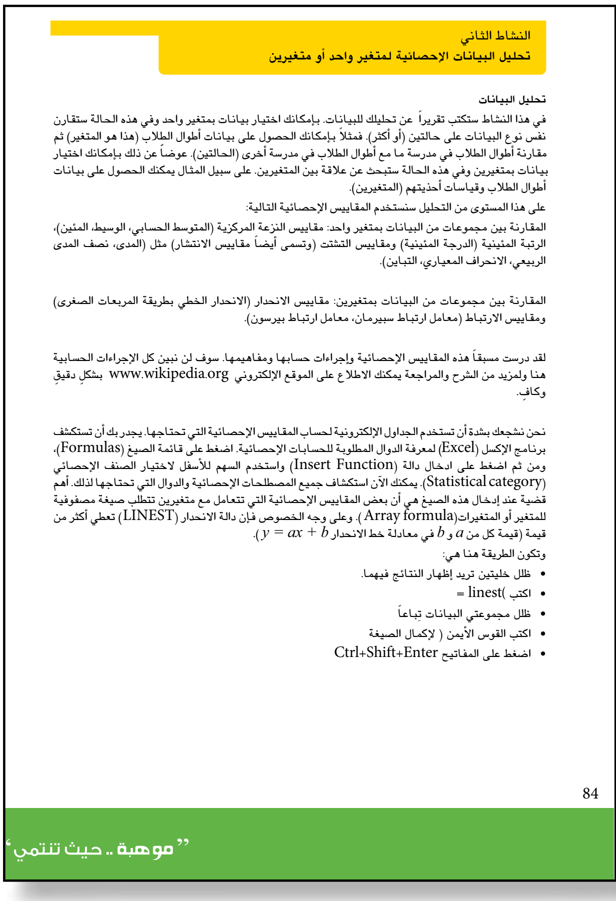
وبذلك يكون الاحتمال هو $\frac{2n - 2}{n^2}$

d. ليس من الصعب على الطلاّب ملاحظة أنّه في الجزأين الأول والثالث من الفرع c فإنّ المقام لقيم n الكبيرة هو n^2 ، وأنّ النهاية في الحالتين تساوي صفرًا . وأمّا في الجزء الثاني من فرع c فإنّ العدد 1 الموجود في البسط ليس له قيمة عندما تزداد قيمة n فتصبح قيمة النهاية 0.5 .

التقويم

تتيح المهمّتان الأولى والثانية للطلاّب فرصة اختبار فهمهم للمبادئ الاحتماليّة، وإلى أيّ مدى يمكن تطبيقها في مواقف مختلفة. وهاتان المهمّتان تختبران أيضًا مستوى ثقة الطلاب في تكنولوجيا ICT (الجداول الإلكترونيّة)، ومدى إمكانيّة استعمالهم هذه الأدوات بطرق فعّالة. وأمّا المهمّة الأخيرة فتبيّن مدى تطوّر مهارة التخيُّل لدى الطلاّب، وتمنحهم فرصةً للتعامل مع الجبر بطلاقة وثقة.

النشاط الثاني: تحليل البيانات الإحصائية لمتغير واحد أو متغيرين


النشاط الثاني
تحليل البيانات الإحصائية لمتغير واحد أو متغيرين

تحليل البيانات

في هذا النشاط ستكتب تقريراً عن تحليلك للبيانات. بإمكانك اختيار بيانات بمتغير واحد وفي هذه الحالة ستقارن نفس نوع البيانات على حالتين (أو أكثر). فمثلاً بإمكانك الحصول على بيانات أطوال الطلاب (هذا هو المتغير) ثم مقارنة أطوال الطلاب في مدرسة ما مع أطوال الطلاب في مدرسة أخرى (الحالتين). عوضاً عن ذلك بإمكانك اختيار بيانات بمتغيرين وفي هذه الحالة ستبحث عن علاقة بين المتغيرين. على سبيل المثال يمكنك الحصول على بيانات أطوال الطلاب وقياسات أحذيتهم (المتغيرين).

على هذا المستوى من التحليل سنستخدم المقاييس الإحصائية التالية:

المقارنة بين مجموعات من البيانات بمتغير واحد: مقاييس النزعة المركزية (المتوسط الحسابي، الوسيط، المئين)، الرتبة المئينية (الدرجة المئينية) ومقاييس التشتت (وتسمى أيضاً مقاييس الانتشار) مثل (المدى، نصف المدى الربيعي، الانحراف المعياري، التباين).

المقارنة بين مجموعات من البيانات بمتغيرين: مقاييس الانحدار (الانحدار الخطي بطريقة المربعات الصغرى) ومقاييس الارتباط (معامل ارتباط سبيرمان، معامل ارتباط بيرسون).

لقد درست مسبقاً هذه المقاييس الإحصائية وإجراءات حسابها ومفاهيمها. سوف لن نبين كل الإجراءات الحسابية هنا ولمزيد من الشرح والمراجعة يمكنك الاطلاع على الموقع الإلكتروني www.wikipedia.org بشكلٍ دقيقٍ وكافٍ.

نحن نشجعك بشدة أن تستخدم الجداول الإلكترونية لحساب المقاييس الإحصائية التي تحتاجها. يجدر بك أن تستكشف برنامج الإكسل (Excel) لمعرفة الدوال المطلوبة للحسابات الإحصائية. اضغط على قائمة الصيغ (Formulas)، ومن ثم اضغط على ادخال دالة (Insert Function) واستخدم السهم للأسفل لاختيار الصنف الإحصائي (Statistical category). يمكنك الآن استكشاف جميع المصطلحات الإحصائية والدوال التي تحتاجها لذلك. أهم قضية عند إدخال هذه الصيغ هي أن بعض المقاييس الإحصائية التي تتعامل مع متغيرين تتطلب صيغة مصفوفية للمتغير أو المتغيرات(Array formula). وعلى وجه الخصوص فإن دالة الانحدار (LINEST) تعطي أكثر من قيمة (قيمة كل من a و b في معادلة خط الانحدار $y = ax + b$).

وتكون الطريقة هنا هي:

- ظلل خليتين تريد إظهار النتائج فيهما.
- اكتب)linest =
- ظلل مجموعتي البيانات تِباعاً
- اكتب القوس الأيمن (لإكمال الصيغة
- اضغط على المفاتيح Ctrl+Shift+Enter

84

”موهبة .. حيث تنتمي“

يعتبر هذا النشاط إستكشافي، بمعنى أن الطلاب يمكنهم عمل ما يرغبونه. سيكون مطلوباً من الطلاب البحث في موقع (Gapminder)، وهذا مشروع غير ربحي لتشجيع التطور العالمي المحتمل لتحقيق أهداف التطور التي وضعتها الأمم المتحدة من خلال زيادة استخدام وفهم الإحصاءات والمعلومات الأخرى الإجتماعية والإقتصادية والبيئية على المستويات المحلية والوطنية والعالمية يمكنك الإطّلا ع على الرابط الإلكتروني:

Http://gapminder.org/aboutgapminder/

خصائص الأداء المتقدم

قد يظهر الطالب في هذا النشاط السمات الآتية:

- **الإستقصاء** – استخدام العديد من المقاييس الاحصائية للحصول على استنتاجات.
- **الإستقصاء** – الاستقلال في اتخاذ القرار عن طريق إعداد مواضيع مثيرة للإهتمام لمناقشتها.
- **المجازفة** – القدرة على تحمل إمكانية عدم اليقين من الطريقة أو النتائج.
- القدرة على ربط الرياضيات بالواقع والعكس.
- **التبصر في البنية الرياضية الأساسية** – القدرة على استخدام نطاق واسع من المقاييس الاحصائية واستخدامها في سياق مناسب.

توصيات أسلوب التدريس

الهدف من هذا النشاط هو كتابة تقرير جماعي. لذلك يوصى بالعمل في مجموعات صغيرة. يجب على الطلاب توزيع العمل فيما بينهم حتى يكون لكل واحد منهم عمل محدّد يقوم به. تحديداً، الكتابة والعرض والعمل من خلال صيغ الجداول الإلكترونية هي مجالات مناسبة ليبدأ بها الطلاب.

حول هذا النشاط

الهدف من هذا النشاط هو مساعدة الطلاب على فهم وتفسير بيانات مُركَّبة وكذلك عرض فهمهم لما تقدمه هذه البيانات موضّحاً في تقرير واضح ومختصر.

من المأمول أن يبدأ الطلاب بتقدير حقيقة أن طريقة عرض البيانات هي المفتاح الرئيسي للحصول على نظرة متبصرة لما يجري. علاوةً على ذلك، فليس كافياً تقديم تحليل إحصائي، ولكن يجب أن يكون الإحصائي القدير أو محلّل البيانات ذو مقدرة على توضيح نتائج تحليل البيانات على مستوى يتناسب مع مستمعيه.

إجابات الأسئلة

صمّم هذا النشاط لإعطاء الطلاب مدخل إلى مجموعات غنية من البيانات وذلك للتحقق منها باستخدام مقاييس إحصائية هم على معرفة بها. يعطي كتاب الطالب ملخص عن المقاييس الاحصائية بمتغير واحد ومتغيرين المناسبة في هذا المستوى. ننصح وبقوة باستخدام الجداول الإلكترونية حيث أن جميع الدوال الإحصائية موجودة ضمن الجداول الإلكترونية. يعطي كتاب الطالب بعض الدعم والخلفية عن استخدام الجداول الإلكترونية.

نقترح أن يقوم المعلم بالتدرُّب على استخدام دوال مختلفة في هذه الجداول حيث أن البرنامج يقوم بتقديم مساعدة مفصّلة حول استخدام جميع هذه الدوال.

سيكون التركيز في هذا النشاط على استخدام موقع (Gapminder) حيث أن (Trendanalyzer) تمثّل أداة رسم لتمثيل البيانات الإحصائية على شكل رسوم متحركة، يعمل على توضيح أنماط التغير في الصحة، والدخل ومؤشرات أخرى عديدة حدثت في العالم خلال 100 إلى 200 سنة الماضية. الرابط الإلكتروني لموقع Gapminder هو http://graphs.gapminder.org/world

هناك مثال أخر، (مع وجود تعليق باللغة الإنجليزية)، وهو الفيديو الموجود على الرابط: http://gapminder.org/video/crisis-narrows-china-uk-gap/ حيث يشرح هانز روزلينغ، أحد مطورّي البرنامج الأصليين، كيف أن الفجوة بين بريطانيا والصين من ناحية متوسط العمر قد ضاقت بشكل كبير خلال السنوات المائتين الماضية.

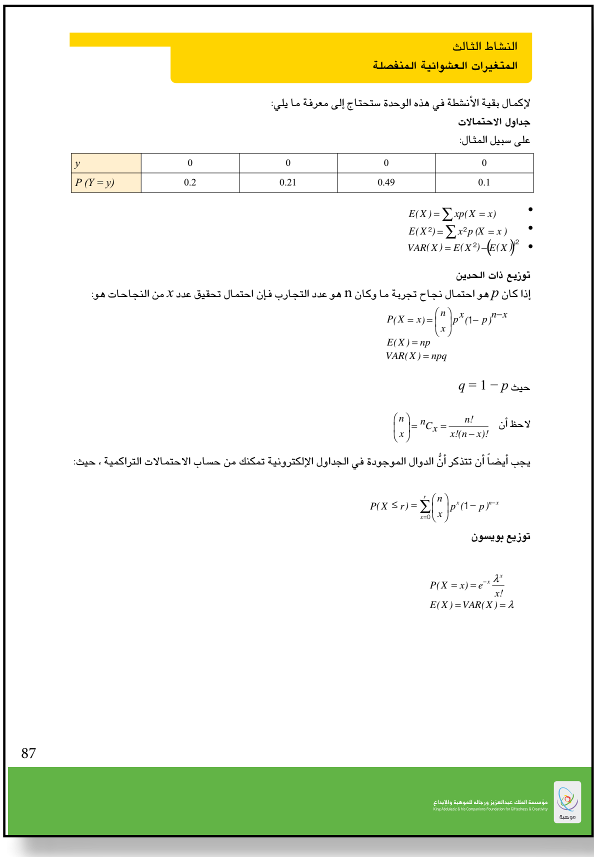
توفر الرسوم البيانية فرص ممتازة للتواصل مع البيانات وطرح أسئلة بخصوصها. يجب أن ينتقل الطلاب بعد ذلك من الرسوم البيانية إلى البيانات الخام (بالضغط على زر البيانات (DATA) في الموقع الإلكتروني). سيكون بإمكانهم إيجاد ونسخ ولصق مجموعات كبيرة من البيانات على الجداول الإلكترونية. يجب تشجيع الطلاب على اختيار مجموعات جزئية من البيانات (على سبيل المثال: سنتين مختلفتين، دول شبه الجزيرة العربية مقارنةً مع بقية دول العالم، وهكذا). يجب تشجيعهم كذلك على استخدام ما أمكنهم من المقاييس الإحصائية، وبشكل خاص استخدام مقاييس إحصائية بمتغير واحد أو متغيرين.

يجب أن تبيّن تقارير الطلاب جمل واضحة حول المواضيع المطروحة والقياسات المستخدمة. كما يجب تشجيعهم على تقديم تقارير واضحة حول تحليلهم والذي يمكن دعمه بالبيانات الإحصائية التي استخدموها من خلال الموقع Gapminder.

نقترح أن يبدأ الطلاب بعمل تقارير أولية حتى يستطيعوا مشاركة نتائجهم مع بقية الطلاب في مجموعتهم . كما ينبغي على بقية الطلاب تقديم نقد بنّاء حول الحجّة المقدمة والتحاليل المرافقة. يقوم الطلاب بعد ذلك بكتابة تقرير نهائي وبشكل رسمي.

فرص التقويم

يعتبر هذا تمرين استكشافي يسمح للطلاب بتقديم عرض لشيءٍ ما من خلال تحقيق مفتوح. يجب على الطلاب استخدام نطاق واسع من المقاييس الإحصائية بحيث يتم تقييمهم على العلاقة بين استخدام الإحصاء وما تم استنتاجه من ذلك. يجب تقييمهم على مدى الدقة في الفروقات بين نتائج التحاليل باستخدام مقاييس إحصائية بمتغير واحد أو متغيرين.



النشاط الثالث

المتغيرات العشوائية المنفصلة

لإكمال بقية الأنشطة في هذه الوحدة ستحتاج إلى معرفة ما يلي:

جداول الاحتمالات

على سبيل المثال:

y	0	0	0	0
$P(Y=y)$	0.2	0.21	0.49	0.1

- $E(X)=\sum xp(X=x)$
- $E(X^2)=\sum x^2 p(X=x)$
- $VAR(X)=E(X^2)-(E(X))^2$

توزيع ذات الحدين

إذا كان p هو احتمال نجاح تجربة ما وكان n هو عدد التجارب فإن احتمال تحقيق عدد x من النجاحات هو:

$$P(X=x)=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$$
$$E(X)=np$$
$$VAR(X)=npq$$

حيث $q=1-p$

لاحظ أن $\binom{n}{x}={}^nC_x=\frac{n!}{x!(n-x)!}$

يجب أيضاً أن تتذكر أنَّ الدوال الموجودة في الجداول الإلكترونية تمكنك من حساب الاحتمالات التراكمية ، حيث:

$$P(X\le r)=\sum_{x=0}^{r}\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$$

توزيع بويسون

$$P(X=x)=e^{-x}\frac{\lambda^x}{x!}$$
$$E(X)=VAR(X)=\lambda$$

87

مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع
King Abdulaziz & his Companions Foundation for Giftedness & Creativity

حول هذا النشاط

سوف يتعامل الطلاب في هذا النشاط مع مدى من تطبيقات عدة تحتوي على متغيرات عشوائية منفصلة. سيتم النظر في توزيع عدد الوفيات الناتجة عن حوادث المرور باستخدام نموذج

بويسون(Poisson Model). كما سيقوم الطلاب بإعداد برنامج مسابقات تلفزيوني قصير مستخدمين في ذلك توزيع ذات الحدين

(Binomial Distribution) وكذلك توزيع للحيوانات البرية مستخدمين النموذج الطبيعي (Normal Model) وتحديد فترات الثقة كذلك. سيكون التركيز في النشاط، على تطبيقات ذات مصداقية وذات نتائج منطقية.

خصائص الأداء المتقدم

قد يظهر الطالب في هذا النشاط السمات الآتية:

- **الإستقصاء** – سيتعامل الطلاب مع بيانات معقدة ومركبّة من واقع الحياة ثم سيستخدموا أدوات الإحصاء والإحتمالات للخروج باستنتاج جدّي وموثوق به .
- **الاهتمام بالمجتمع** – التعامل مع مواضيع تتعلق بإدارة المرور وإدارة الأمور المتعلقة بالحيوانات البرية.
- **الربط مع واقع الحياة** – يعطي الطلاب معنى لبيانات من واقع الحياة من خلال مسائل عملية.
- **النمذجة** – سيطوّر الطلاب نطاق من النماذج الرياضية التي لديهم لتشمل توزيعات احتمالية.
- **التبصر في البنية الرياضية الأساسية** – تجمع هذه الوحدة ما بين الإحصاء والإحتمالات مع إعطاء الفرصة للطلاب لتحليل البيانات باستخدام نماذج من الإحتمالات.

توصيات أسلوب التدريس

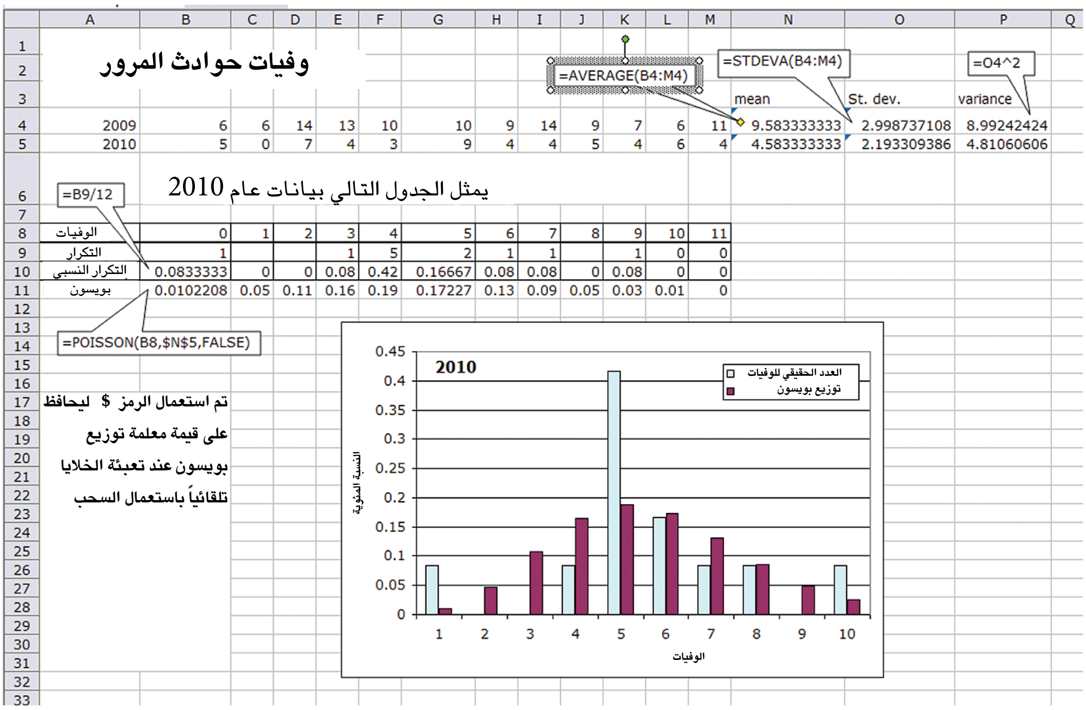
نوصي بأن يعمل الطلاب في مجموعات صغيرة جداً أو في مجموعات ثنائية. سيحتاجون إلى التمكن من التعامل مع مستوى من الرياضيات المعقدّة والتي هي ملخصة في كتاب الطالب. لذلك، فإن وجود دعم تفاعلي سوف يؤدي إلى التأكد من دقة الحسابات ومن مصداقية التحليل.

إجابات الأسئلة

وفيات حوادث المرور

يجب تشجيع الطلاب على التعامل مع البيانات من خلال الجداول الإلكترونية.

يبين الشكل أدناه لقطة من صفحة جداول إلكترونية تم فيها معالجة بيانات عام 2010. يمكن للطلاب استعمال الصيغ المبينة في الجدول الإلكتروني أدناه لعمل نسخة مشابهة.



يجب ملاحظة ما يلي عند وضع البيانات في جداول لعرضها على شكل رسم بياني:

a. يجب على الطلاب عمل جدول تكراري.

b. يجب تحويل البيانات إلى تكرار نسبي.

هذا هو الجدول التكراري لعام 2010:

حالات الوفاة	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
التكرار	1			1	5	2	1	1		1	0	0
التكرار النسبي	0.08	0	0	0.08	0.42	0.17	0.08	0.08	0	0.08	0	0

يمكن حساب التكرار النسبي باستخدام صيغة موجوده في الجدول الإلكتروني (انظر إلى المثال المعطى لمعرفة التفاصيل).

1. يجب مقارنة المتوسط والتباين وذلك بعد حسابهما. حقيقة أن المتوسط = التباين ضرورية ولكن ليست شرطاً كافياً ليكون توزيع بويسون (Poisson Distribution) نموذجاً مناسباً. يمكن حساب المتوسط باستخدام الدوال الظاهرة في لقطة الجدول السابقة.

يمكن استخدام الدالة التالية لحساب الإحتمال لقيمة معينة تحقق توزيع بويسون ولها متوسط معيّن:

= POISSON (x, mean, FALSE)

(لاحظ أنه يمكن حساب الدالة التراكمية إذا أبدلت كلمة (FALSE) بكلمة (TRUE) في الدالة) .

يمكن إنشاء رسم بياني بعد إتمام عملية حساب بعض المقاييس الإحصائية لبيانات عام 2010 ويمكن مقارنة البيانات الحقيقية مع القيمة الحقيقية. يمكن الإدعاء أن نموذج بويسون ينطبق بشكل جيد على بيانات العام 2010 (المتوسط قريب من التباين والشكل متشابه). لكنه ليس منطبقاً على بيانات العام 2009. يمكن أن يتفحص الطلاب ما إذا كانت بيانات العامين معاً تشكل بويسون.

2. يجب أن يأخذ الطلبة في الإعتبار أحوال القيادة للسيارات: يكون المساء مظلماً في الشتاء وتكون الطرقات في الغالب مبتلة. ومن ناحية أخرى فإن حركة السير تكون أكبر في الصيف.

قيم المتوسط مختلفة بشكل كبير لذلك كانت الشرطة ناجحة. غير أن عينة من 12 تعتبر صغيره لذلك فإننا نحتاج إلى بيانات أخرى حتى نكون أكثر تأكداً.

4. a. المتوسط =9.58 (يعتبر متوسط العينة أفضل تقديراً للمعلمة λ من تقدير مربّع الإنحراف المعياري). لذا فإن

$$P\,(x = 0) = \frac{e^{-9.58}\,9.53^0}{0!} = 0.1022$$

b. يمكن تقدير ذلك باستخدام الجداول والتقريب إلى 9.6 أو استخدام الدالة التراكمية في الجدول الإلكتروني (لاحظ أن 4 يجب أن تستخدم).

$P\,(x < 5) = P(x \le 4) = \text{POISSON}\,(4, \text{mean}, \text{TRUE})$

c. $P\,(x > 6) = 1 - P(x \le 6) = 1 - 0.172227 = 0.817773$

5. عادةً ما تكون مجموعات البيانات لوفيات المرور كبيرة ومن غير المعتاد أن تجد مجموعة بيانات كتلك المعطاة حيث يكون المتوسط صغيراً. يمكن للطلاب استخدام "التقريب الطبيعي" عندما يكون المتوسط كبيراً في توزيع بويسون.

يجب تشجيع الطلاب على تطوير تحليل إضافي للبيانات العالمية الموجودة في الموقع الإلكتروني www.gapminder.org

التوزيعات المنفصلة

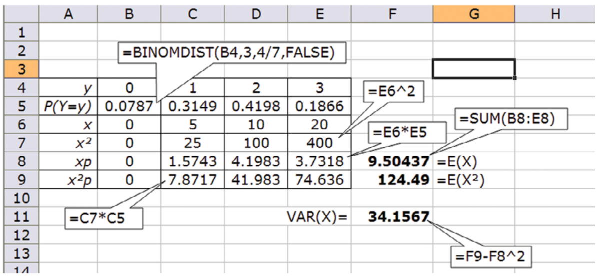
يحتاج الطلاب إلى تكوين التوزيع التالي:

y : عدد الكرات الذهبية

x : عدد النقاط

يبين الشكل أدناه لقطة من صفحة جداول إلكترونية تم فيها حساب المعلمات لتوزيع ذات الحدين الذي يمثل المسألة.

يمكن للطلاب استعمال الصيغ المبينة في الجدول الإلكتروني أدناه لعمل نسخة مشابهة.



	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2								
3								
4	y	0	1	2	3			
5	P(Y=y)	0.0787	0.3149	0.4198	0.1866			
6	x	0	5	10	20			
7	x²	0	25	100	400			
8	xp	0	1.5743	4.1983	3.7318	**9.50437**	=E(X)	
9	x²p	0	7.8717	41.983	74.636	**124.49**	=E(X²)	
10								
11					VAR(X)=	**34.1567**		
12								
13								

نستطيع أن نشاهد من الجدول الإلكتروني ما يلي:

1. عدد النقاط المتوقعة هو 9.5 تقريباً.
2. التباين للتوزيع هو 34.2 تقريباً.
3. تطوير قوانين مختلفة للمسابقة متروك بشكل كامل لقرارات الطلاب الخاصة. يستطيع الطلاب عمل تعديلات على جداولهم الإلكترونية، للبحث في التأثير على عدد النقاط المتوقعة وعلى التباين.

تعداد الحيوانات

يمكن تشجيع الطلاب على البحث في طرق مختلفة لتوزيعات تعداد الحيوانات.

يمكنهم الحصول على مصادر مفيدة على الرابط:

http://adventure.howstuffworks.com/outdoor-activities/hunting/regulations/count-deer-population.htm

يمكن القراءة عن المشاكل التي واجهها العلماء الذين حاولوا تعداد الحيتان على الرابط:

http://news.bbc.co.uk/1/hi/sci/tech/7474637.stm

1. إذا تم الإمساك بعشرين من الغزلان وتم وضع علامة عليها فإننا نعرف الآن عدد الغزلان التي عليها علامة. إذا تم الإمساك بعشرين أخرى من الغزلان عشوائياً وتبيّن أن 6 منها عليها علامة فإنه يمكننا تقدير أن $\frac{6}{20}$ من التعداد الكلي عليه علامة. $\frac{6N}{20} = 20$ لذلك فإن التقدير غير المتحيز لعدد الغزلان هو $\frac{400}{6} \approx 67$

2. يعتبر هذا حساباً تقريبياً وليس دقيقاً، ومع ذلك فإنه يعطي فكرة تقريبية عن مدى دقة التقدير. وهذا مبنياً على حقيقة أننا نقرّب قيمة p . سوف نسمي تقريبنا لقيمة p على صورة θ

$$\theta = \frac{X}{n}$$

$$E(\theta) = E\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n} \quad E(X)$$

$$VAR(\theta) = VAR\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \quad VAR(X)$$

ولكن $E(X) = np$ و $VAR(X) = npq$

ولذلك $E(\theta) = p$ و $VAR(\theta) = \frac{npq}{n^2} = \frac{pq}{n}$

لو افترضنا أن X موزّعة بشكل طبيعي (نستطيع عمل ذلك إذا كانت X كبيرة بما فيه الكفاية)، ومن ثم فإن p موزّعة طبيعياً : $\theta \sim N\left(p, \frac{pq}{n}\right)$

قيمة p بفترة ثقة 90% هي:

$$p = \theta \pm 1.64\sqrt{\frac{\theta(1-\theta)}{n}}$$

$\theta = 0.3$ و $n = 20$

ولذلك $p = 0.3 \pm 1.64\sqrt{\frac{0.3(1-0.3)}{20}}$

وبناءاً عليه فإن فترة ثقة 90% لقيم p هي:

$$p = (0.132, 0.468)$$

عندما نحسب عدد الغزلان الكلي فإننا سنقسم 20 على تقديرنا لقيمة p لذلك فإن أكبر قيمة هي:

$$\frac{20}{0.468} = 43$$

وأصغر قيمة هي: $\frac{20}{0.132} = 152$

يمكنك ملاحظة أن الطريقة غير دقيقة كثيراً. يجب أن تسأل الطلاب عن كيفية جعلها أكثر دقةً.

على سبيل المثال، يمكننا زيادة عدد الغزلان التي نمسك بها.

في الحقيقة وحيث أننا نضرب p بالعدد 20 فإن فترة الثقة أوسع وهذا تقليل من قيم حدود فترة الثقة. ليس مستغرباً أن التعداد يتم الآن باستخدام الطائرات المروحية!

يمكن للطلاب أن يستخدموا طريقة بديلة. أنظر في الجدول وأوجد قيمة p و n=20 والتي تعطي احتمال تراكمي بقيمة 5% و 95% عند حدوث 6 نجاحات:
هذا يعطي قيمة

$p = 0.45$ (94.47%) و $p = 0.15$ (6.73%)

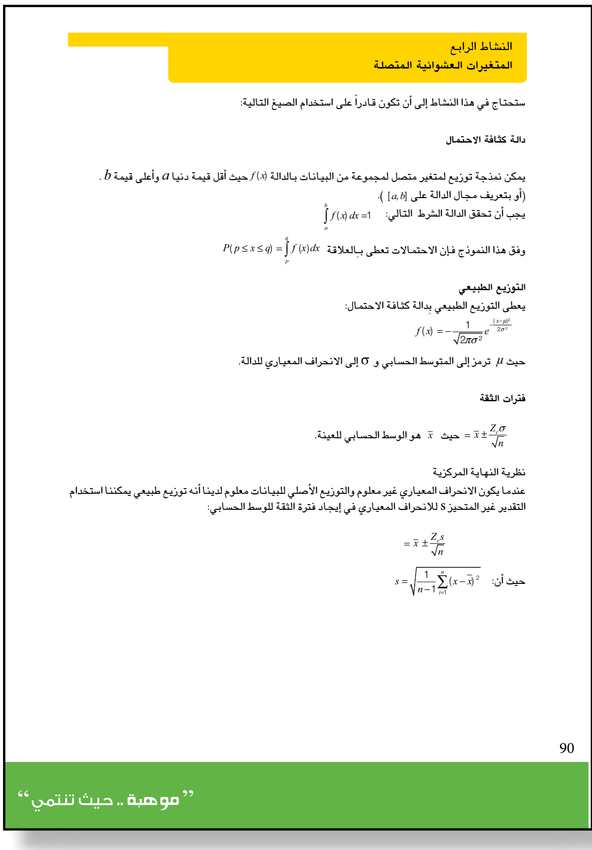
وهذا يتوافق (تقريباً) مع النتائج التي حصلنا عليها أعلاه وتعتبر مناسبة وأكثر سهولةً ضمن سياق هذه المسألة.

3. يمكن للطلاب أخذ بعض هذه العوامل في الإعتبار:

- الغزلان منتشرة بشكل متساوي في الغابة.
- جميع الغزلان لها نفس الفرصة في أن يتم الإمساك بها .
- لم يمت أي من الغزلان بين عملية الإمساك الأولى و الثانية.
- الغزلان لا تتجول في مجموعات عائلية صغيرة.

فرص التقويم

يحتاج الطلاب للعمل بدقة؛ لذلك من المهم جداً أن يتأكد المعلم أن المجموعات الثنائية أو المجموعات الصغيرة تتأكد من عملها بشكل تفصيلي . نتائج العمل في كل جزء توفر فرص ممتازة للطلاب لتقديم عروضهم. يمكن توزيع مجموعات مختلفة للعمل وتقديم تقاريرها عن النتائج لكل الأجزاء الثلاثة.



النشاط الرابع
المتغيرات العشوائية المتصلة

ستحتاج في هذا النشاط إلى أن تكون قادراً على استخدام الصيغ التالية:

دالة كثافة الاحتمال

يمكن نمذجة توزيع لمتغير متصل لمجموعة من البيانات بالدالة $f(x)$ حيث أقل قيمة دنيا a وأعلى قيمة b .
(أو بتعريف مجال الدالة على $[a,b]$).
يجب أن تحقق الدالة الشرط التالي: $\int_a^b f(x)\,dx = 1$

وفق هذا النموذج فإن الاحتمالات تعطى بالعلاقة $P(p \le x \le q) = \int_p^q f(x)dx$

التوزيع الطبيعي

يعطى التوزيع الطبيعي بدالة كثافة الاحتمال:

$$f(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

حيث μ ترمز إلى المتوسط الحسابي و σ إلى الانحراف المعياري للدالة.

فترات الثقة

$= \bar{x} \pm \frac{Z_c\sigma}{\sqrt{n}}$ حيث $\bar{x}$ هو الوسط الحسابي للعينة.

نظرية النهاية المركزية

عندما يكون الانحراف المعياري غير معلوم والتوزيع الأصلي للبيانات معلوم لدينا أنه توزيع طبيعي يمكننا استخدام التقدير غير المتحيز S للانحراف المعياري في إيجاد فترة الثقة للوسط الحسابي:

$$= \bar{x} \pm \frac{Z_c s}{\sqrt{n}}$$

حيث أن: $s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x-\bar{x})^2}$

90

"موهبة .. حيث تنتمي"

حول هذا النشاط

سوف يتعامل الطلاب في هذا النشاط مع نطاق واسع من التطبيقات التي تشتمل متغيرات عشوائية متصلة.

سيتم التركيز خلال النشاط على تطبيقات ذات مصداقية وذات حلول منطقية.

خصائص الأداء المتقدم

قد يظهر الطالب في هذا النشاط السمات الآتية:

- **الاستقصاء** – سيتعامل الطلاب مع بيانات معقدة ومركبّة من واقع الحياة ثم سيستخدموا أدوات الإحصاء والإحتمالات للخروج باستنتاج جدّي وموثوق به .
- **الاهتمام بالمجتمع** – أخذ نظرة معتبرة في قضية الإنحباس الحراري.
- **الربط مع واقع الحياة** – يعطي الطلاب معنى لبيانات من واقع الحياة من خلال مسائل عملية.
- **النمذجة** – سيطوّر الطلاب نطاق من النماذج الرياضية التي لديهم لتشمل توزيعات إحتمالية.
- **التبصر في البنية الرياضية الأساسية** – تجمع هذه الوحدة ما بين الإحصاء والإحتمالات مع إعطاء الفرصة للطلاب لتحليل البيانات باستخدام نماذج من الإحتمالات.

توصيات أسلوب التدريس

نوصي بأن يعمل الطلاب في مجموعات صغيرة أو في مجموعات ثنائية حيث سيحتاجون إلى التمكن من التعامل مع مستوى من الرياضيات المعقدّة والتي هي ملخصة في كتاب الطالب. لذلك، فإن وجود دعم تفاعلي سوف يؤدي إلى التأكد من دقة الحسابات ومصداقية التحليل.

إجابات الأسئلة

يحتاج الطلاب إلى زيارة الموقع http://www.censusatschool.org.uk/

(التعداد في المدارس) حيث يحتوي هذا الموقع على نطاق واسع من البيانات الشخصية التي جمعت من طلاب في المملكة المتحدة، من انجلترا وويلز.

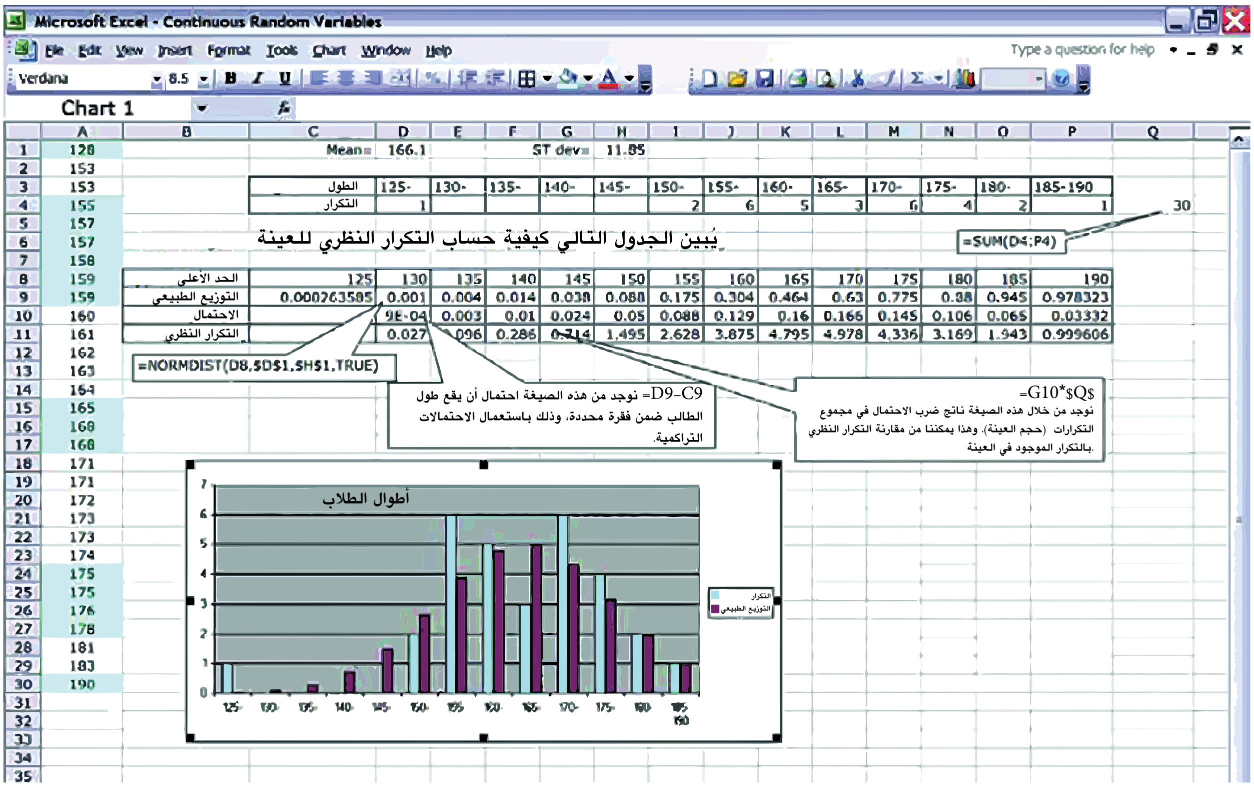
لو كان بالإمكان الحصول على بيانات مشابهة من السعودية، أو تحديداً من المجتمع المدرسي في السعودية فإن ذلك سيكون مثيراً للمقارنة وينبغي تشجيع الطلاب على الحصول على بيانات محلية.

1. يجب عمل هذا النشاط على جدول إلكتروني. يبيّن الشكل أدناه لقطة من جدول إلكتروني مفصل يُبيّن كيف يمكن أن يقوم الطلاب بهذا العمل. إمَا أن يختبر المدرس الجدول الإلكتروني ويوفرّ الدعم للطلاب كي يقوموا بعمل جدولهم الخاص، أو أن يتناقش المدرس والطلاب معاً حول نموذج الجدول الإلكتروني.

2. يجب فحص شكل التوزيعات. نقترح أن يركّز طلاب مختلفون أو مجموعات مختلفة على متغيرات مختلفة ومن ثم يقوموا بعمل تمثيل بياني للتوزيع. يقوم الطلاب بعد ذلك بتمثيل الدالة الطبيعية المرافقة بيانياً والتي لها نفس المتوسط والتباين ثم مقارنتهما. يمكن حساب التكرار النظري الناتج من الدالة الطبيعية بضرب الإحتمال الطبيعي بالعدد الكلي للعينة. (انظر إلى الجدول الإلكتروني للحصول على مزيد من التفاصيل).

3. يعني الفرق في الإجابة أنه إما أن يكون المتوسط لأحد التوزيعين (أو العينة) أكبر من الآخر أو انه إذا كان المتوسطين متساويين فإن هذا يعني أن أحدهما موزّع بشكل أوسع من الآخر.

4. قم بقياس الإرتفاعات واحسب المتوسط والتباين للعينة. لو افترضنا أن التوزيع الأصلي طبيعياً، فإنه يمكننا استخدام قيم المتوسط للعينة والتقدير غير المنحاز للإنحراف المعياري وذلك لحساب فترة الثقة.



ينبغي أن يقوم المعلم بإعداد نسخة من الجدول الإلكتروني قبل الدرس مستخدماً الصيغة الظاهرة في صورة الجدول الإلكتروني المعطاة في الصفحة التالية.

يستطيع الطلاب الحصول على البيانات الخام من الرابط التالي :

http://www.metoffice.gov.uk/hadobs/hadcet/ssn_HadCET_mean.txt

يجب تشجيعهم على عمل الجدول الخاص بهم.

1. يمكنك إيجاد المتوسط والتباين لكل عينة من عام 1660 م إلى 1980 م باستخدام صيغ الجدول الإلكتروني كما هو مبين في الشكل المعطى. تم حساب متوسط درجات الحرارة في فصل الشتاء. يجب تشجيع الطلاب على إعداد الجدول الخاص بهم لعمل ذلك.

يجب استخدام تقدير غير متحيز ولكنه لن يحدث فارقاً لعينة بهذا الحجم. (هذه هي الصيغة STDEVA في الجدول الإلكتروني).

2. a.يمكنك اعتبار أن التوزيع طبيعياً باستخدام نظرية الحد المركزي (Central Limit Theorem) بحيث أن المتوسط يساوي متوسط العينة والانحراف المعياري هو $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

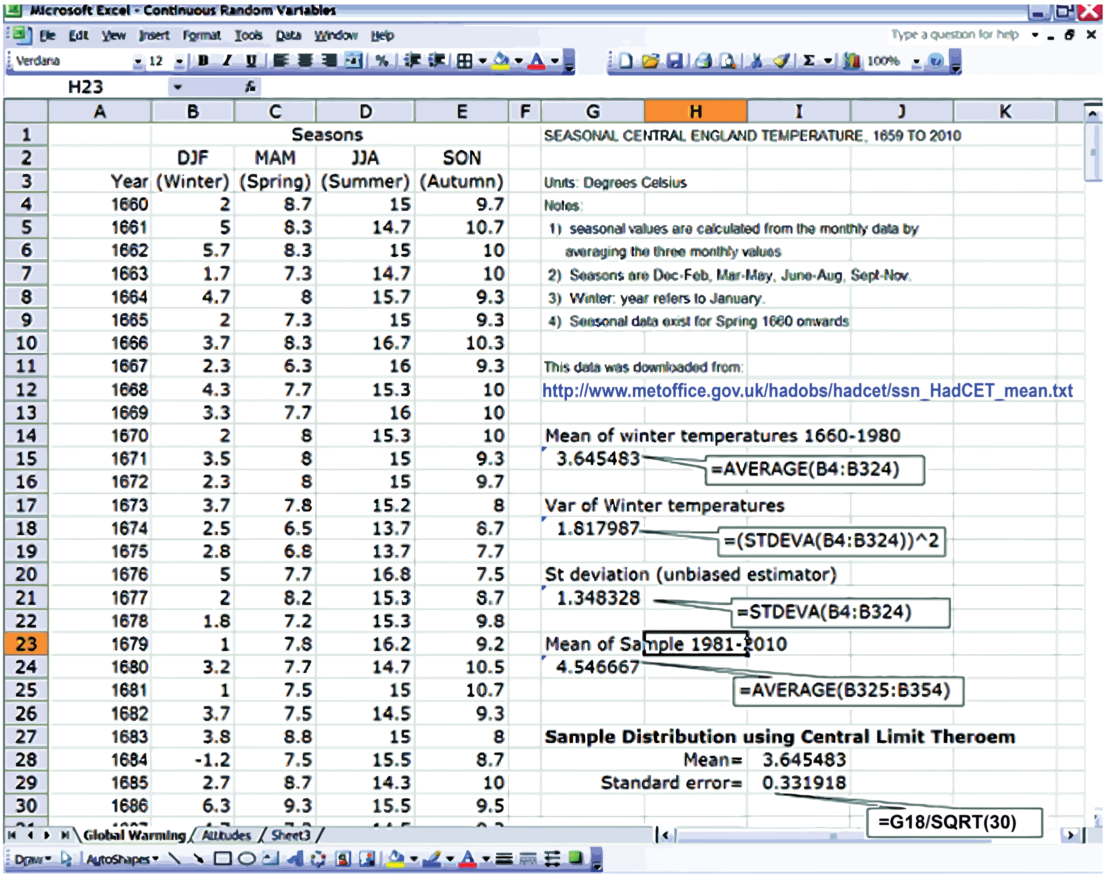
لذلك يمكن صياغة توزيع العينة على النحو التالي:

$$\overline{X} \sim N\left(\overline{x}, \frac{s^2}{n}\right)$$

يُظهر الجدول أدناه النتائج لفصل الشتاء ويجب العمل بصورة مشابهة على بقية الفصول.

b. تم الحساب في الجدول الإلكتروني باستخدام الدالة التراكمية للتوزيع الطبيعي أن فرصة العينة بأن تكون بهذا الدفء أو أكثر دفأً في الشتاء هي 0.3%. (تم استخدام الصيغة NORMDIST).

c. من غير المرجح أننا يجب أن نفترض حدوث الإحتباس الحراري. يجب اختبار الفصول الأخرى كذلك والخروج باستنتاجات حول ما إذا كانت فصول الشتاء تزداد دفأً مقارنةً مع فصول الصيف وهكذا.



	A	B	C	D	E
1		Seasons			
2		DJF	MAM	JJA	SON
3	Year	(Winter)	(Spring)	(Summer)	(Autumn)
4	1660	2	8.7	15	9.7
5	1661	5	8.3	14.7	10.7
6	1662	5.7	8.3	15	10
7	1663	1.7	7.3	14.7	10
8	1664	4.7	8	15.7	9.3
9	1665	2	7.3	15	9.3
10	1666	3.7	8.3	16.7	10.3
11	1667	2.3	6.3	16	9.3
12	1668	4.3	7.7	15.3	10
13	1669	3.3	7.7	16	10
14	1670	2	8	15.3	10
15	1671	3.5	8	15	9.3
16	1672	2.3	8	15	9.7
17	1673	3.7	7.8	15.2	8
18	1674	2.5	6.5	13.7	8.7
19	1675	2.8	6.8	13.7	7.7
20	1676	5	7.7	16.8	7.5
21	1677	2	8.2	15.3	8.7
22	1678	1.8	7.2	15.3	9.8
23	1679	1	7.8	16.2	9.2
24	1680	3.2	7.7	14.7	10.5
25	1681	1	7.5	15	10.7
26	1682	3.7	7.5	14.5	9.3
27	1683	3.8	8.8	15	8
28	1684	-1.2	7.5	15.5	8.7
29	1685	2.7	8.7	14.3	10
30	1686	6.3	9.3	15.5	9.5

SEASONAL CENTRAL ENGLAND TEMPERATURE, 1659 TO 2010

Units: Degrees Celsius

Notes:

1) seasonal values are calculated from the monthly data by averaging the three monthly values

2) Seasons are Dec-Feb, Mar-May, June-Aug, Sept-Nov.

3) Winter: year refers to January.

4) Seasonal data exist for Spring 1660 onwards

This data was downloaded from:

http://www.metoffice.gov.uk/hadobs/hadcet/ssn_HadCET_mean.txt

Mean of winter temperatures 1660-1980

3.645483 =AVERAGE(B4:B324)

Var of Winter temperatures

1.817987 =(STDEVA(B4:B324))^2

St deviation (unbiased estimator)

1.348328 =STDEVA(B4:B324)

Mean of Sample 1981-2010

4.546667 =AVERAGE(B325:B354)

Sample Distribution using Central Limit Theroem

Mean= 3.645483

Standard error= 0.331918 =G18/SQRT(30)

الوحدة التاسعة

النهايات والإشتقاق

نظرة عامّة

تقدم هذه الوحدة الفرصة للطلبة للتعمق في استخدام الإشتقاق واستكشاف بعض التطبيقات المرتبطة به مثل إيجاد حلول مسائل القيم القصوى. سيكون هناك فرصة لدراسة خصائص الدالة الأسية e^x من خلال دراسة الإشتقاق.

الأهداف التعلميّة للوحدة

- تطوير فهم عميق لخصائص الدوال الأسيّة والمثلثيّة.
- تقدير أهمية الاشتقاق في حل مسائل تطبيقية على القيم القصوى.

المعرفة السابقة

يجب أن يكون لدى الطلاب فهم جيد لبعض الأساسيات في النمذجة الرياضية بما في ذلك المقدرة على صياغة المسألة جبرياً.

كما يجب أن يكون لدى الطلاب المقدرة على إيجاد المشتقة لكثيرات الحدود وفهم أهمية النقاط الحرجة وارتباطها بسلوك النظام الذي تم نمذجته. إن معرفة الطلبة باستخدام تقنيات التمثيل البياني مثل جيوجبرا سوف يكون مفيداً لهم مع وجود بعض الارشادات المعطاة في هذه الوحدة.

خصائص الأداء المتقدم

القيم والاتجاهات والسمات

- الإبداع (الأنشطة 2، 3، 4)
- المجازفة (النشاط 1)
- الاستقصاء (النشاط 4)
- الاهتمام بالمجتمع – المقدرة على إنتاج أفكار جديدة مبنية على أفكار موجودة أو مشتقة منها (النشاطان 2، 3)

المهارات المتقدّمة

- الإستدلال – المقدرة على اتباع نهج جديد عن طريق عمل محاولات نشطة في الربط مع المعرفة الموجودة أو تحديد المفاهيم الأساسية وبالتالي تحديد طريقة مناسبة للتفكير في الحل (النشاطان 3 ، 4)
- الدقة (النشاط 4)

المعرفة و الفهم المتقدمان

- فهم البرهان (النشاطان 1 ، 4)
- التقدير والإعجاب في الربط بين مجالات الرياضيات المختلفة. (النشاطان 2، 4)
- التبصر في البنية الرياضية الأساسية (النشاطان 2، 4)

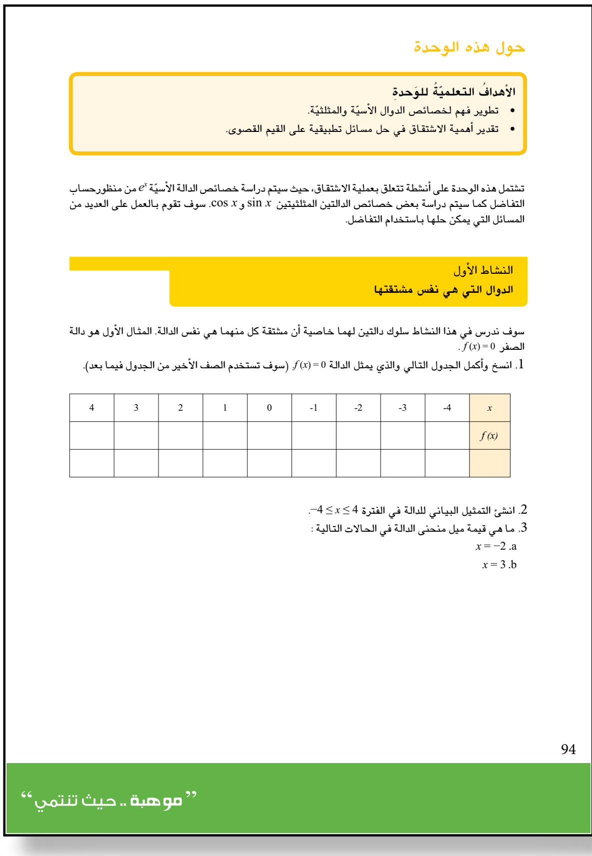
الخطّة الزمنيّة

ست ساعات تقريباً. تتطلب الأنشطة وقتاً متساوياً تقريباً.

التكنولوجيا

يتطلب النشاط الثاني استخدام احد تقنيات التمثيل البياني مثل برنامج جيو جبرا حيث أن استخدام هذه البرامج سيسهل العمل على النشاطين الثالث والرابع.

قد تحتاج كذلك في النشاطان الثالث والرابع إلى استخدام الجداول الإلكترونية.



حول هذه الوحدة

الأهدافُ التعلميّةُ للوَحدةِ

- تطوير فهم لخصائص الدوال الأسيّة والمثلثيّة.
- تقدير أهمية الاشتقاق في حل مسائل تطبيقية على القيم القصوى.

تشتمل هذه الوحدة على أنشطة تتعلق بعملية الاشتقاق، حيث سيتم دراسة خصائص الدالة الأسيّة e^x من منظورحساب التفاضل كما سيتم دراسة بعض خصائص الدالتين المثلثيتين $\sin x$ و $\cos x$. سوف تقوم بالعمل على العديد من المسائل التي يمكن حلها باستخدام التفاضل.

النشاط الأول
الدوال التي هي نفس مشتقتها

سوف ندرس في هذا النشاط سلوك دالتين لهما خاصية أن مشتقة كل منهما هي نفس الدالة. المثال الأول هو دالة الصفر $f(x) = 0$.

1. انسخ وأكمل الجدول التالي والذي يمثل الدالة $f(x) = 0$ (سوف تستخدم الصف الأخير من الجدول فيما بعد).

4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	x
									$f(x)$

2. انشئ التمثيل البياني للدالة في الفترة $-4 \le x \le 4$.
3. ما هي قيمة ميل منحنى الدالة في الحالات التالية :
   a. $x = -2$
   b. $x = 3$

94

"موهبة .. حيث تنتمي"

حول هذا النشاط

سوف يقوم الطلبة في هذا النشاط بدراسة سلوك دالتين لهما خاصية أن مشتقة كل منهما هي نفس الدالة، والدوال هي:

- الدالة الصفرية $f(x) = 0$
- الدالة الأسية $f(x) = e^x$

سيتم أولا دراسة خصائص الدالة الصفرية وبعد ذلك الدالة الأسية.

سوف يتم دراسة الدالة الأسية على شكل متسلسلة وربطها بالخصائص التي قمت بدراستها.

خصائص الأداء المتقدم

- **المجازفة** – المقدرة على تمييز القوانين واستخدامها لإنشاء صيغ جديدة ومحققة
- **فهم البرهان** – المقدرة على الانتقال من المحسوس إلى المجرّد بسرعة.

توصيات أسلوب التدريس

يمكن العمل في مجموعات صغيرة.

اجابات الأسئلة

من 1 إلى 4.

تأكد من فهم الطلبة لحقيقة أن قيم الدالة تكون دائماً صفر لجميع قيم x وأن التمثيل البياني هو جزء من المستقيم $y = 0$ (المحور x) لجميع القيم داخل الفترة $-4 \le x \le 4$

يمكن استخدام حقيقة أن التمثيل البياني أفقي وهذا يعني أن قيمة المشتقة هي صفر لجميع قيم x، مما يساعد على إكمال الجدول التالي:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$f'(x)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0

5. التمثيل البياني يؤكد النتيجة وذلك لأن مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنى والمحور x والخطين العموديين $x = \text{a}$ و $x = \text{b}$ تساوي صفر لجميع قيم a و b.

6. لقد استكشفنا من قبل الحالة التي تكون فيها المشتقة مساوية للصفر لجميع القيم الممكنة. نحتاج الآن إلى اثبات أنه لا يوجد أي دالة تساوي مشتقتها ويمكن أن تتغير إشارة قيمتها من موجب إلى سالب أو العكس.

يمكننا تبرير هذه العبارة على النحو التالي:

- لنفرض وجود قيمة موجبة للدالة عند عدد معين.
- من خلال التعريف نجد أن قيمة الميل موجبة عند هذه القيمة.
- ويترتب على ذلك أنه عند اختيار نقطة اخرى قريبة من النقطة الأولى وواقعة على يمينها فإن قيمة الدالة ستكون أكبر عند النقطة الثانية.
- وبالتالي فإذا كانت قيمة الدالة موجبة عند أي نقطة فإنها تكون موجبة لأي عدد واقع على يمين تلك النقطة، وهذا يعني أن منحنى الدالة لن يتقاطع مع المحور x من الأعلى.

وباستخدام حجة مماثلة لتلك يمكننا إثبات أن منحنى الدالة لن يتقاطع كذلك مع المحور x من الأسفل.

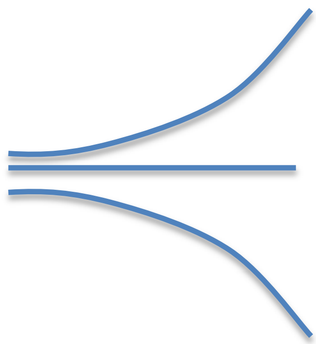
7. يمكننا اعتبار ثلاث حالات وهي:

$f(x) = f^1(x) > 0$ لجميع قيم x.

$f(x) = f^1(x) = 0$ لجميع قيم x.

$f(x) = f^1(x) < 0$ لجميع قيم x.

التمثيل البياني لهذه الحالات الثلاث يمكن تمثيله بالشكل التالي:



في التمثيل البياني نجد أن المستقيم الواقع في المنتصف يمثل الحالة $f(x)= 0$ بينما المنحنيان الواقعان فوق وتحت المستقيم يمثلان الحالتين الموجبة والسالبة.

8. يمثل الجدول التالي جميع النتائج:

n	1	2	3	4	5	6
مجموع أول n من الحدود	1	2	2.5	2.667	2.708	2.717

9. a. باجراء الضرب التالي نحصل على ما يلي:

$$\left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} \ldots\right) \times$$

$$\left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} \ldots\right)$$

$$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} \ldots \quad \text{A}$$
$$+$$
$$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} \ldots \quad \text{B}$$
$$+$$
$$\frac{1}{2!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{2!2!} + \frac{1}{2!3!} + \frac{1}{2!4!} \ldots \quad \text{C}$$
$$+$$
$$\ldots$$

نقوم الآن بجمع حدود المتسلسلة كما يلي:

(الحد 1 للمتسلسلة A) + (الحد 2 للمتسلسلة A + الحد 1 للمتسلسلة B) + (الحد 3 للمتسلسلة A +الحد 2 للمتسلسلة B + الحد 1 للمتسلسلة C) + ...

وهذا يساوي المقدار

$$= 1 + 2 + \frac{(1 + 2 + 1)}{2!} + \frac{(1 + 3 + 3 + 1)}{3!} + \cdots$$

$$= 1 + 2 + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} \ldots$$

b. المتسلسلة متقاربة إلى القيمة الصحيحة ... 7.389 وتكون صحيحة إلى منزلة عشرية واحدة بعد ايجاد حاصل الجمع لأول 6 حدود من المتسلسلة.

10. قيم المقدار e^x مقربة إلى ثلاث منازل عشرية (وعدد حدود المتسلسلة المطلوبة لكي تكون المتسلسلة متقاربة لهذه القيمة) هي كالتالي:

a. 20.1 (9 حدود)

b. 1.65 (3 حدود)

c. 0.368 (5 حدود)

11. يتم عمل النسخة نفسها من المتسلسلة عند اشتقاقها.

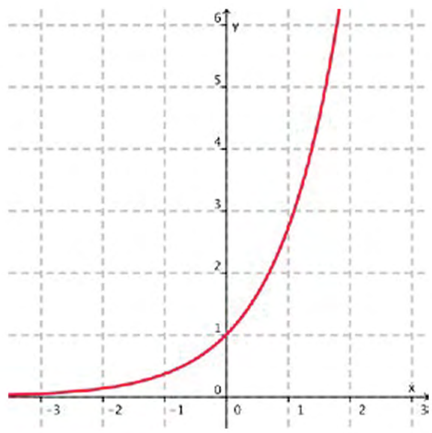
12. يحتاج الطلبة في الإختبار الأول إلى الرجوع إلى النتيجة السابقة (السؤال 11)،

أما في الإختبار الثاني فيكون البرهان كالتالي:

$$\int_a^b e^x dx = [e^x + C]_a^b = e^b - e^a$$

13. جدول القيم والتمثيل البياني المطلوب مُعطى كما يلي:

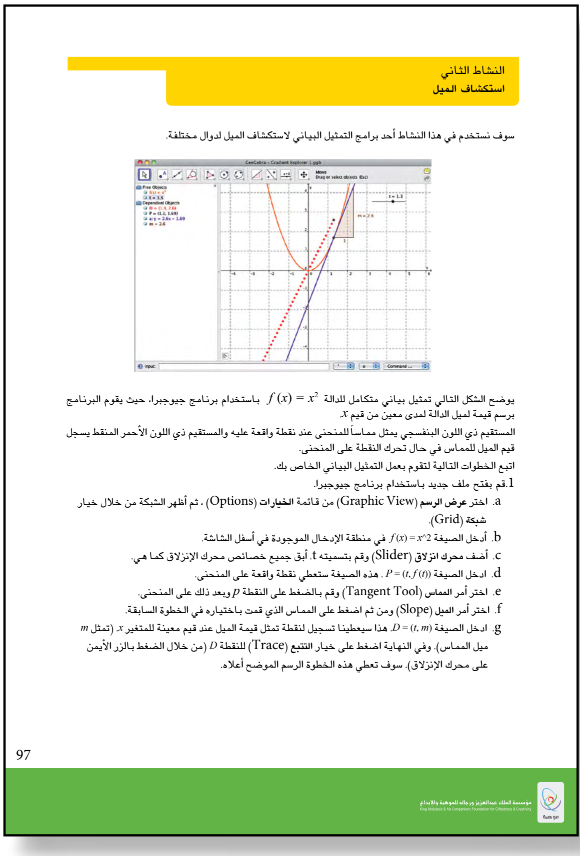
x	-3	-2	-1	0	1	2
e^x	0.0498	0.135	0.368	1	2.72	7.39



14. الدالة المطلوبة هي $y = -e^x$.

فرص التقويم

يعطي هذا النشاط الفرصة للطلبة لمراجعة فهمهم لبعض أساسيات الإشتقاق ومعكوس المشتقة للدوال. هناك مجال جيد لمناقشة هذه الأسئلة وعلى الأخص السؤالان 6 و 7.



النشاط الثاني
استكشاف الميل

سوف نستخدم في هذا النشاط أحد برامج التمثيل البياني لاستكشاف الميل لدوال مختلفة.

يوضح الشكل التالي تمثيل بياني متكامل للدالة $f(x) = x^2$ باستخدام برنامج جيوجبرا، حيث يقوم البرنامج برسم قيمة لميل الدالة لمدى معين من قيم x.

المستقيم ذي اللون البنفسجي يمثل مماساً للمنحنى عند نقطة واقعة عليه والمستقيم ذي اللون الأحمر المنقط يسجل قيم الميل للمماس في حال تحرك النقطة على المنحنى.

اتبع الخطوات التالية لتقوم بعمل التمثيل البياني الخاص بك.

1. قم بفتح ملف جديد باستخدام برنامج جيوجبرا.
   a. اختر **عرض الرسم** (Graphic View) من قائمة **الخيارات** (Options) ، ثم أظهر الشبكة من خلال خيار **شبكة** (Grid).
   b. أدخل الصيغة $f(x) = x$^2 في منطقة الإدخال الموجودة في أسفل الشاشة.
   c. أضف **محرك انزلاق** (Slider) وقم بتسميته t. أبق جميع خصائص محرك الإنزلاق كما هي.
   d. ادخل الصيغة $P = (t, f(t))$. هذه الصيغة ستعطي نقطة واقعة على المنحنى.
   e. اختر أمر **المماس** (Tangent Tool) وقم بالضغط على النقطة p وبعد ذلك على المنحنى.
   f. اختر أمر **الميل** (Slope) ومن ثم اضغط على المماس الذي قمت باختياره في الخطوة السابقة.
   g. ادخل الصيغة $D = (t, m)$. هذا سيعطينا تسجيل لنقطة تمثل قيمة الميل عند قيم معينة للمتغير x. (m تمثل ميل المماس). وفي النهاية اضغط على خيار **التتبع** (Trace) للنقطة D (من خلال الضغط بالزر الأيمن على محرك الإنزلاق). سوف تعطي هذه الخطوة الرسم الموضح أعلاه.

97

حول هذا النشاط

يعطي هذا النشاط الفرصة للطلبة لاستكشاف المزيد من الأفكار المرتبطة بالإشتقاق ومنها دالة الميل.

يستخدم الطلاب في هذا النشاط برنامج جيو جبرا لحساب وتمثيل قيم الميل لدالة من خلال قيم المقدار x وبعد ذلك يتم تحديد دالة الميل المطلوبة والتأكد من إجاباتهم عن طريق تمثيل دوال الميل بيانياً على وجه التحديد.

خصائص الأداء المتقدم

- **الإبداع** – المقدرة على تمثيل المشكلة تصنيفها وربطها بشكل أعمق من خلال الربط مع المعرفة المسبقة لديهم.
- **الاهتمام بالمجتمع** – المقدرة على إنشاء أفكار جديدة من خلال الاعتماد على أفكار موجودة أو مشتقة منها.
- **فهم البرهان** – المقدرة على الإنتقال بسرعة من الملموس إلى المجرّد.
- **التقدير والإعجاب في الروابط** – استخدام الربط بين الخبرات الماضية للعمل على انشاء تعميمات محتملة.

توصيات أسلوب التدريس

يحتاج الطلاب إلى استخدام الحاسب وأحد برامج التمثيل البياني مثل برنامج جيو جبرا. يفضل العمل على هذا النشاط من خلال مجموعات ثنائية تتشارك العمل على حاسوب واحد.

اجابات الأسئلة

1. يجب على الطلاب ملاحظة ما يلي:

- يجب إدخال المعادلة على الشكل $f(x) = x$^2 . وهذا سيعطي الفرصة لتعديل الدالة فيما بعد مع المحافظة على بقية التركيبات ، وببساطة فإن إدخال المعادلة $y = x$^2 لن يسمح بذلك.
- قد يحتاج الطلاب إلى ضبط إعدادات محرك الانزلاق (وعلى الأخص المدى، ومقدار التزايد وسرعة الرسم) للتأكد من جودة العرض.
- أسرع طريقة لايضاح تتبع الموضع هي بتحريك الصورة باستخدام قائمة عرض تحريك الرسم (Move Graphic View).

2. a. النقاط المراد تتبعها تقع على المستقيم الذي معادلته $y=2x$.

b. إن إدخال المعادلة $y=2x$ في منطقة الإدخال سوف يؤكد معادلة دالة الميل.

3. a. تأكد من معرفة الطلبة بكيفية حذف جميع النقاط التي تم تتبعها (انظر السؤال 1) وفي هذه الحالة فإن النقاط المراد تتبعها لن تتغير.

b. دالة الميل سوف تبقى كذلك $y=2x$.

4. b. $y = 3x^2$ يجب أن يكون للطلبة المقدرة على تحديد دالة الميل من خلال تتبع النقاط وانشاء التمثيل البياني المقابل لتلك النقاط.

5. دوال الميل هي كالتالي:

a. $y = 3$

b. $y = 4$

c. $y = x+5$

d. $y = e^x$ تأكد من إدخال الطلاب للصيغة $f(x) = \exp(x)$

e. $y = \frac{-1}{x^2}$

f. $y = \frac{1}{x}$

6. دوال الميل المطلوبة هي كالتالي:

a. $y = \cos x$

b. $y = -\sin x$

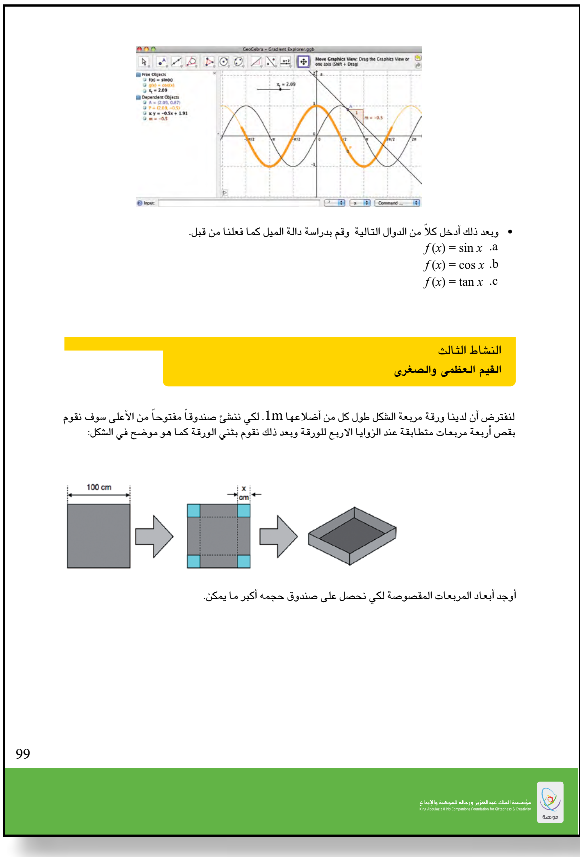
c. $y = \sec^2 x$

تعتبر أول دالتين واضحتين بشكل مقبول ولكن يحتاج الطلاب إلى المساعدة في تحديد التمثيل البياني للدالة $y = \sec^2 x$.

فرص التقويم

قد يكون لدى الطلبة المعرفة بمشتقة معظم الدوال المطلوب دراستها في هذا النشاط، ومع ذلك فإن الطبيعة الإستكشافية التي بني عليها هذا النشاط سوف تخلق العديد من الفرص للتحقق من فهمهم أن المشتقة تعطي قيمة الميل لمجموعة من قيم x.

النشاط الثالث: القيم العظمى والصغرى


وبعد ذلك أدخل كلاً من الدوال التالية وقم بدراسة دالة الميل كما فعلنا من قبل.
a. $f(x) = \sin x$
b. $f(x) = \cos x$
c. $f(x) = \tan x$

النشاط الثالث
القيم العظمى والصغرى

لنفترض أن لدينا ورقة مربعة الشكل طول كل من أضلاعها 1m. لكي ننشئ صندوقاً مفتوحاً من الأعلى سوف نقوم بقص أربعة مربعات متطابقة عند الزوايا الاربع للورقة وبعد ذلك نقوم بثني الورقة كما هو موضح في الشكل:

أوجد أبعاد المربعات المقصوصة لكي نحصل على صندوق حجمه أكبر ما يمكن.

99

حول هذا النشاط

يقوم الطلبة في هذا النشاط بمحاولة حل مسألة تتعلق بإيجاد أقصى حجم ممكن لصندوق مفتوح من الأعلى تم تكوينه باستخدام ورقة مربعة الشكل. سيتم تقديم ارشادات للعمل على هذه المسألة باستخدام جداول الكترونية للحصول على قيمة تقريبية للحل ومن ثم يتم ايجاد الحل الدقيق باستخدام الإشتقاق. ولمزيد من التحدي يتم التوسع في هذه المسألة من خلال العمل بشكل مستقل على حل مسائل مشابهة لذلك.

خصائص الأداء المتقدم

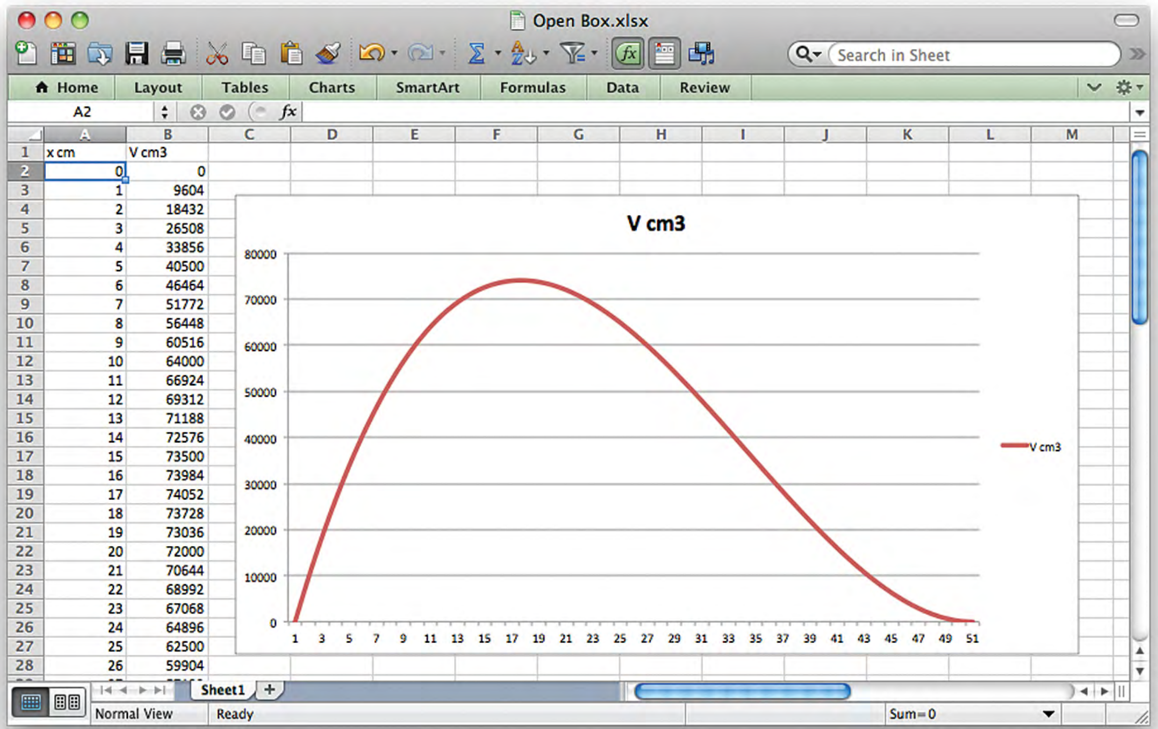
- **فهم البرهان** – المقدرة على الإنتقال بسرعة من المحسوس إلى المجرد.
- **التبصر في البنية الأساسية وفي مسائل متعددة الخطوات** – يمكن تقسيم المهمة إلى عدة أجزاء وتحديد أنسب طريقة لحل كل جزء ومن ثمّ تطبيقها.
- **الاستدلال** – المقدرة على اتباع نهج جديد من خبرات التعلم عن طريق محاولة الربط مع المعرفة أو المفاهيم القائمتين وبالتالي تحديد وسيلة مناسبة للتفكير في العمل
- **الدقة** – المقدرة على العمل بفعالية من خلال قوانين محددة.

توصيات أسلوب التدريس

يمكن وضع الطلاب الموهوبين في مجموعات مناسبة. سوف يستفيد الطلاب من العمل في مجموعات ثنائية أو في مجموعات صغيرة في مشاركة ومقارنة الحلول التي توصلوا إليها.

اجابات الأسئلة

1. $V = x\,(100 - 2x)^2$
2. $0 \le x < 50$
3. الشكل التالي يوضح شكل مبسط لجدول الكتروني يمكن أن ينشئه الطلاب باستعمال المعادلة التي أوجدوها في السؤال 1 ومدى قيم x التي أوجدوها في السؤال 2 .



4. القيمة الصحيحة هي $16\frac{2}{3}$ cm يجب أن يكون لدى الطلاب المقدرة على تحديد هذه القيمة من خلال استخدام تزايدات صغيرة لقيمة x

القيمة الأولى ستعطينا أكبر حجم ممكن للصندوق، بينما القيمة الثانية ستعطينا أقل حجم ممكن وهو صفر. يمكن للطلبة تبرير ذلك بعدة طرق وتشتمل على ما يلي:

- رفض $x = 50$ والتي تعطينا حجم مقداره صفر في هذه الحالة.
- الإشارة إلى شكل المنحنى والمعطى في الشكل السابق والقيمة التقريبية السابقة للحل.
- إيجاد المشتقة الثانية لمعادلة الحجم.

5.
$$\begin{aligned} V &= x(100 - 2x)^2 \\ &= 10000x - 400x^2 + 4x^3 \\ \Rightarrow \frac{dV}{dx} &= 10000 - 800x + 12x^2 \end{aligned}$$

6.
$$\begin{aligned} \frac{dV}{dx} &= 10000 - 800x + 12x^2 = 0 \\ &\Rightarrow 3x^2 - 200x + 2500 = 0 \\ \Rightarrow x &= \frac{200 \pm \sqrt{40000 - 30000}}{6} \end{aligned}$$

وبالتالي فإن قيمة x هي $\frac{100}{6}$ أو 50

7. يجب أن تعطي كلاً من الطريقتين الحل نفسه مع الأخذ في الإعتبار أن الحل المتحصل عليه من طريقة الجداول الإلكترونية قد يكون تقريبياً.

8. إذا كان طول أحد الجوانب هو x فإن قيمة المساحة هي: $A = x\,(50 - x)$

باستخدام الإشتقاق نحصل على ما يلي:

$\frac{dA}{dx} = 50 - 2x = 0$ وهذا يعطينا الحل $x = 25$

9. إذا كان طول الجانبين العمودين على الجدار هو x، فإن المساحة هي: $A = x\,(100 - 2x)$

باستخدام الإشتقاق نحصل على:

$\frac{dA}{dx} = 100 - 4x = 0$ وهذا يعطينا الحل $x = 25$

10. a. من خلال التناظر نجد أن $AP=DP$ و $BP=CP$ وبالتالي نستطيع إيجاد موقع P والذي يعطينا أقل طول للمقدار $DP+CP$.

لنفرض أن $SP= x$ و $DP+CP = L$.

$$L = \sqrt{x^2 + 5^2} + \sqrt{(10 - x)^2 + 5^2}$$
$$\Rightarrow \frac{dL}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 25}} + \frac{x - 10}{\sqrt{(10 - x)^2 + 25}}$$

لنفرض الان أن $\frac{dL}{dx} = 0$ وبضرب طرفي المعادلة بالمقامين فإننا سوف نحصل على الحل $x = 5$.

b. بما أن AP لا يمكن أن يساوي DP وكذلك BP لا يساوي CP، سوف نحتاج الى الصيغة الجديدة التالية لمجموع الطول:

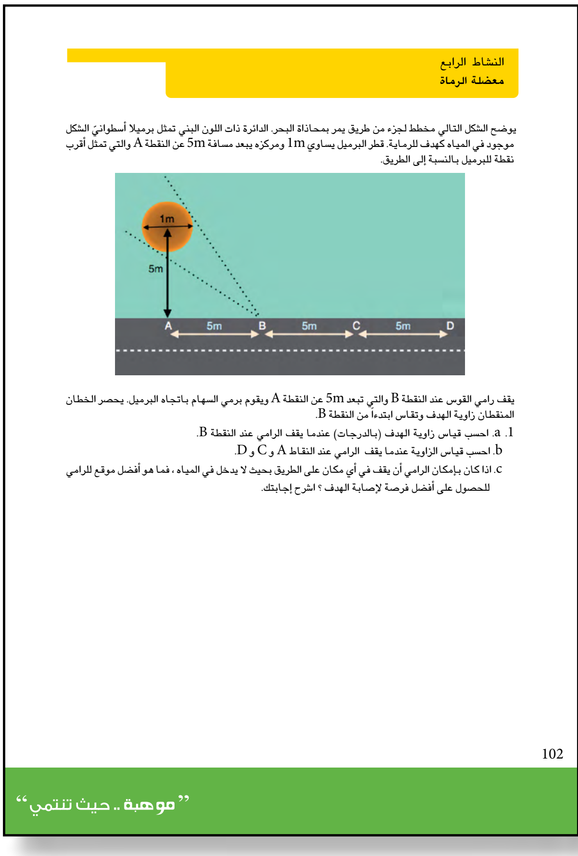
$$L = \sqrt{x^2 + 2^2} + \sqrt{x^2 + 8^2} + \sqrt{(10 - x)^2 + 2^2} + \sqrt{(10 - x)^2 + 8^2}$$

وبإشتقاق المعادلة فإننا سوف نحصل على نفس النتيجة السابقة. أقل طول يمكن الحصول عليه هو عندما تكون P واقعة في منتصف المسافة للطول ST.

فرص التقويم

يُعطي هذا النشاط الفرصة لاختبار مدى ثقة الطلاب في إنشاء صيغ جبرية تمثل نماذج لحالات معينة وكذلك في المقدرة على إعادة الصياغة واستخدام طرق الإشتقاق لايجاد القيم العظمى والصغرى.

النشاط الرابع: معضلة الرماة


النشاط الرابع
معضلة الرماة

يوضح الشكل التالي مخطط لجزء من طريق يمر بمحاذاة البحر. الدائرة ذات اللون البني تمثل برميلا أسطوانيّ الشكل موجود في المياه كهدف للرماية. قطر البرميل يساوي 1m ومركزه يبعد مسافة 5m عن النقطة A والتي تمثل أقرب نقطة للبرميل بالنسبة إلى الطريق.

يقف رامي القوس عند النقطة B والتي تبعد 5m عن النقطة A ويقوم برمي السهام باتجاه البرميل. يحصر الخطان المنقطان زاوية الهدف وتقاس ابتداءاً من النقطة B.

1. a. احسب قياس زاوية الهدف (بالدرجات) عندما يقف الرامي عند النقطة B.

b. احسب قياس الزاوية عندما يقف الرامي عند النقاط A و C و D.

c. اذا كان بإمكان الرامي أن يقف في أي مكان على الطريق بحيث لا يدخل في المياه ، فما هو أفضل موقع للرامي للحصول على أفضل فرصة لإصابة الهدف ؟ اشرح إجابتك.

خصائص الأداء المتقدم

- **الإبداع** – المقدرة على تمثيل المشكلة وتصنيفها وربطها بشكل أعمق مع المعرفة المسبقة لديهم.
- **الإستقصاء** – المقدرة على التخلي عن فكرة واحدة من أجل أخرى أفضل منها أو لإيجاد حلول متعددة
- **التبصر في البنية الأساسية وفي مسائل متعددة الخطوات** – يمكن تقسيم المهمة إلى عدة أجزاء وتحديد أنسب طريقة لحل كل جزء ومن ثمّ تطبيقها.
- **الدقة** – المقدرة على العمل بفعالية من خلال قوانين محددة.

توصيات أسلوب التدريس

يمكن وضع الطلاب الموهوبين في مجموعات مناسبة. إن العمل من خلال مجموعات ثنائية أو مجموعات صغيرة سوف يكون ذو فائدة كبيرة عند استخدام الطلاب لطرق مختلفة لحل المسائل.

حول هذا النشاط

يعطي هذا النشاط الفرصة للطلبة للعمل على مسألتين أخريين تتعلقان بإيجاد القيم القصوى وتشتملان كذلك على استخدام المثلثات في الحل. قد يكون هناك بعض الحاجة إلى تدخل المعلم للمساعدة على العمل على هذه المهام كما ينبغي تشجيع الطلبة على الإستفادة من خبراتهم السابقة والمصادر المتاحة لهم بما في ذلك:

- مقياس للرسم ومعرفتهم بعلم المثلثات
- استخدام تكنولوجيا المعلومات (مثل برنامج إكسل أو جيوجبرا)
- النمذجة الجبرية وحساب التفاضل والتكامل.

اجابات الأسئلة

a. يمكن صياغة زاوية الهدف على الشكل التالي

$$\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{5\sqrt{2}}$$ وبالتالي فإن

$$\theta = 2\tan^{-1}\left(\frac{0.5}{5\sqrt{2}}\right) = 8.09^\circ$$

b. قيم زوايا الهدف هي كالتالي:

$$A: 2\tan^{-1}\left(\frac{0.5}{5}\right) = 11.42^\circ$$

$$C: 2\tan^{-1}\left(\frac{0.5}{5\sqrt{5}}\right) = 5.12^\circ$$

$$D: 2\tan^{-1}\left(\frac{0.5}{5\sqrt{10}}\right) = 3.62^\circ$$

c. أفضل طريقة لإصابة الهدف هي عندما تكون زاوية الهدف أكبر ما يمكن ويكون ذلك عند الموقع A. وبشكل عام فإن مقدار زاوية الهدف من نقطة على الطريق تبعد x عن النقطة A يساوي $2\tan^{-1}\left(\frac{0.5}{\sqrt{x^2+25}}\right)$

يمكننا الحصول على أكبر زاوية هدف عندما يكون المقدار $\sqrt{x^2+25}$ والموجود في المقام أقل ما يمكن. وبالتالي فإن أكبر زاوية هدف تكون عندما $x=0$

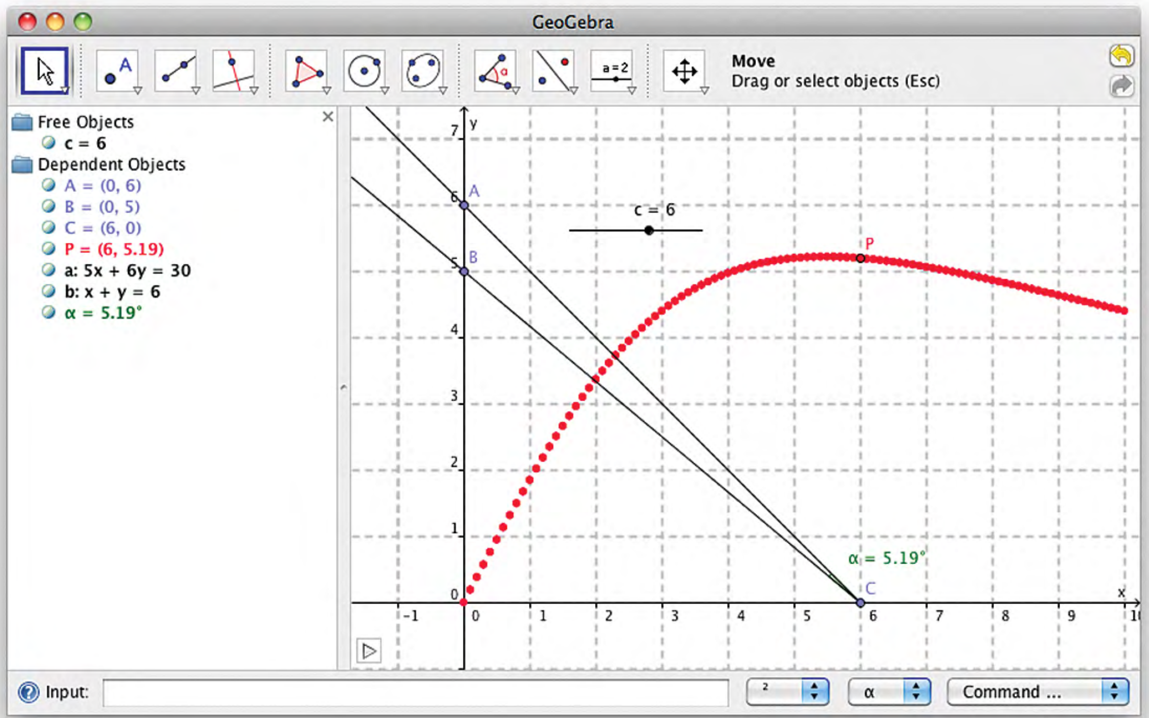
2. إن تبديل الهدف ليكون على شكل مسطح سوف يعطينا مسألة جديدة يطلق عليها مسألة Regiomontanus Problem وهي الترجمة اللاتينية لإسم عالم رياضيات ألماني قام بدراستها بشكل مفصل. على الرغم من أن الطلاب سوف تكون لديهم المقدرة على العثور على العديد من الدراسات المفصلة من خلال البحث في الإنترنت، إلا أنه ينبغي عليهم المحاولة في إيجاد الحلول لهذه المسائل (ربما باستخدام عدد من الطرق المختلفة) قبل طلب المساعدة.

طرق للحل باستخدام التمثيلات البيانية والجداول الإلكترونية

يمكن حل المسألة بشكل فعال باستخدام أحد الطرق التالية:

في برنامج جيوجبرا يمكن للطلبة انشاء نموذج كما هو موضح أدناه وتحريك النقطة التي تمثل موقع زاوية الهدف مع ملاحظة الأثر على الزاوية α.

في النسخة الموضحة أدناه نلاحظ أن محرك الانزلاق يتحكم بموقع نقطة العرض ويمكننا تتبع النقطة لمعرفة قيمة الزاوية لأي موقع أفقي.



وعلى الجانب الآخر، فإن إعداد المسألة كنموذج باستخدام جدول إلكتروني يتطلب من الطلاب القيام بعمل أكثر من ذلك بقليل في انشاء النمذجة للحالة.

المثال التالي أدناه يحسب مقدار الزاوية بين أعلى وأسفل الهدف لمواقع مختلفة، ومن ثم يتم ايجاد زاوية العرض باستخدام الطرح.

ينبغي على المعلمين إعداد هذه الملفات مسبقاً وتزويد الطلاب بها مع الحرص على أن يقوم الطلاب قبل ذلك باستنفاد جميع المحاولات الممكنة من تلقاء أنفسهم أولاً.

النهج الجبري وحساب التفاضل والتكامل:

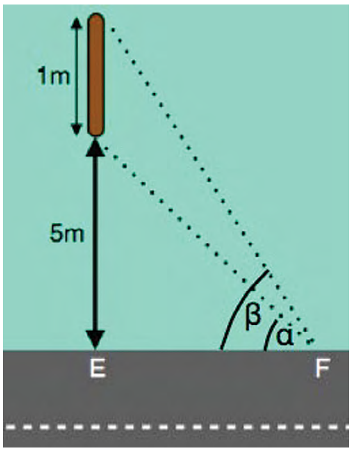
يوجد العديد من الطرق لإيجاد الحل الجبري ويمكننا تلخيص احد هذه الطرق.

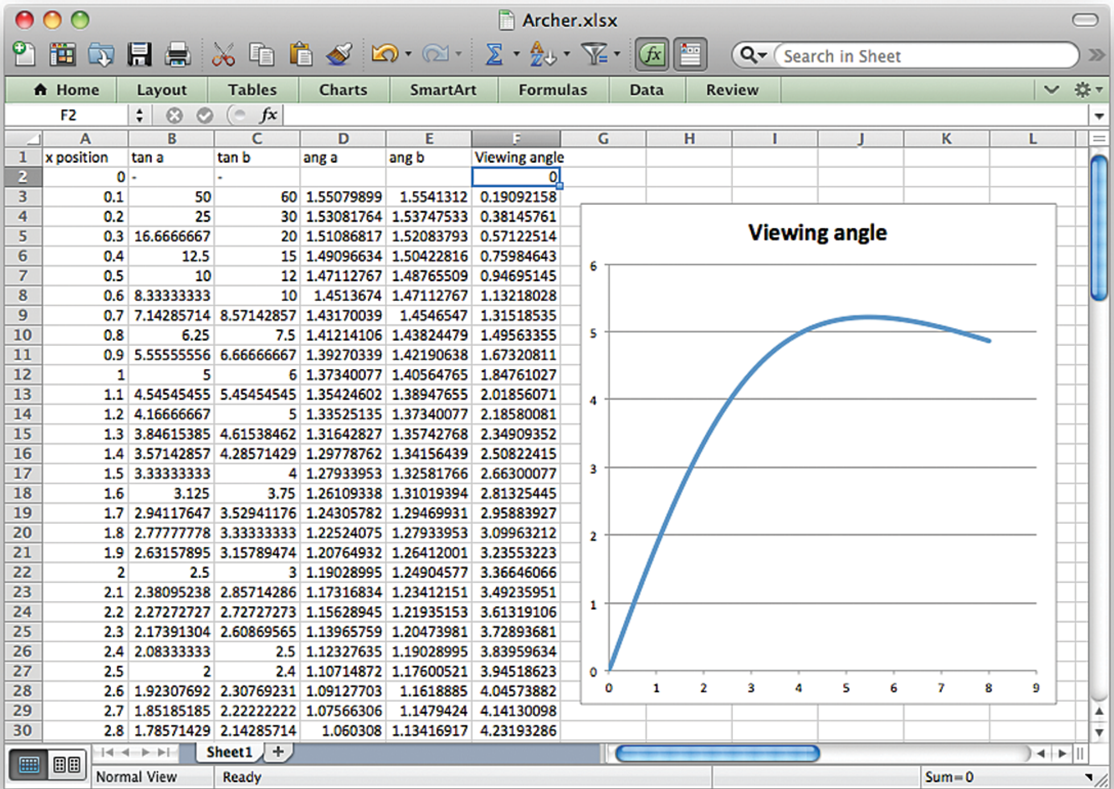
لنفرض أن α و β تمثلان مقدار الزاويتين بين حافة الطريق وكل من المستقيمين الناشئين من نقطة الرؤيا وحافتي الهدف على الترتيب كما هو موضح في الشكل المجاور.

نعلم ان قيمة المقدارين α و β هي كما يلي:

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{6}{x}\right) \text{ و } \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{5}{x}\right)$$

حيث x تمثل المسافة الأفقية بين الهدف ونقطة الرؤيا. نحتاج إلى إيجاد أكبر قياس ممكن للزاوية $\beta - \alpha$. هناك خطوة مهمة هنا يجب ملاحظتها وهي أنه يمكننا الحصول القيمة العظمى لقياس الزاوية عندما يكون المقدار $\tan(\beta - \alpha)$ أكبر ما يمكن.





	A	B	C	D	E	F
1	x position	tan a	tan b	ang a	ang b	Viewing angle
2	0	-	-			0
3	0.1	50	60	1.55079899	1.5541312	0.19092158
4	0.2	25	30	1.53081764	1.53747533	0.38145761
5	0.3	16.6666667	20	1.51086817	1.52083793	0.57122514
6	0.4	12.5	15	1.49096634	1.50422816	0.75984643
7	0.5	10	12	1.47112767	1.48765509	0.94695145
8	0.6	8.33333333	10	1.4513674	1.47112767	1.13218028
9	0.7	7.14285714	8.57142857	1.43170039	1.4546547	1.31518535
10	0.8	6.25	7.5	1.41214106	1.43824479	1.49563355
11	0.9	5.55555556	6.66666667	1.39270339	1.42190638	1.67320811
12	1	5	6	1.37340077	1.40564765	1.84761027
13	1.1	4.54545455	5.45454545	1.35424602	1.38947655	2.01856071
14	1.2	4.16666667	5	1.33525135	1.37340077	2.18580081
15	1.3	3.84615385	4.61538462	1.31642827	1.35742768	2.34909352
16	1.4	3.57142857	4.28571429	1.29778762	1.34156439	2.50822415
17	1.5	3.33333333	4	1.27933953	1.32581766	2.66300077
18	1.6	3.125	3.75	1.26109338	1.31019394	2.81325445
19	1.7	2.94117647	3.52941176	1.24305782	1.29469931	2.95883927
20	1.8	2.77777778	3.33333333	1.22524075	1.27933953	3.09963212
21	1.9	2.63157895	3.15789474	1.20764932	1.26412001	3.23553223
22	2	2.5	3	1.19028995	1.24904577	3.36646066
23	2.1	2.38095238	2.85714286	1.17316834	1.23412151	3.49235951
24	2.2	2.27272727	2.72727273	1.15628945	1.21935153	3.61319106
25	2.3	2.17391304	2.60869565	1.13965759	1.20473981	3.72893681
26	2.4	2.08333333	2.5	1.12327635	1.19028995	3.83959634
27	2.5	2	2.4	1.10714872	1.17600521	3.94518623
28	2.6	1.92307692	2.30769231	1.09127703	1.1618885	4.04573882
29	2.7	1.85185185	2.22222222	1.07566306	1.1479424	4.14130098
30	2.8	1.78571429	2.14285714	1.060308	1.13416917	4.23193286

يمكننا كتابة المقدار على الشكل التالي:

$$\tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1 + \tan\beta\tan\alpha} = \frac{\frac{6}{x} - \frac{5}{x}}{1 + \frac{6}{x}\cdot\frac{5}{x}} = \frac{x}{x^2 + 30}$$

يمكننا ملاحظة أن القيمة العظمى للمقدار $\frac{x}{x^2 + 30}$

تكون مكافئة للقيمة الصغرى لمعكوس المقدار $\frac{x^2+30}{x}$

ويمكننا استخدام الإشتقاق للحصول على أكبر قيمة.

يمكننا الحصول على أقل قيمة باستخدام الإشتقاق:

$$\frac{d}{dx}\ \frac{x^2 + 30}{x} = 1 - \frac{30}{x^2} = 0$$

وبحل هذه المعادلة نحصل على $x = \sqrt{30}$

وبالتالي فإن المسافة الأفقية المطلوبة هي الجذر التربيعي لحاصل ضرب أقرب مسافة وأبعد نقطة للهدف وهي تمثل المتوسط الهندسي لهاتين المسافتين.

فرص التقويم

يمثل أداء الطلاب في هذا النشاط مؤشراً جيداً على مدى قدرتهم على استخدام مجموعة من الأدوات والطرق الرياضية لحل المسائل.

سوف يتم إكتساب أقصى نوعية أداء في هذا النشاط في حال تم اعطاء الطلبة الفرصة للعمل بشكل مستقل.

الوحدة العاشرة

حل مسائل متقدمة

مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع
King Abdulaziz & his Companions Foundation for Giftedness & Creativity
موهبة

نظرة عامّة

تحتوي هذه الوحده على مختارات من التحديات الرياضية والتي سيقوم الطلاب باستكشافها. تغطي الأنشطه المختاره نطاق واسع من المواضيع التي تشتمل على الأعداد والحساب، الهندسة، والتمثيلات البيانيه لأنظمة رياضية

الأهداف التعلميّة للوحدة

معالجة نطاق واسع من المسائل الرياضية ذات محتوى مألوف وغير مألوف.

المعرفة السابقة

سوف تكون المعرفة السابقة واضحة من خلال الأنشطة الفردية، باختصار:

يحتاج النشاط الأول الى القليل من التحضير المتخصص عدا عن وجود الثقة في القدرة من إنشاء بناء هندسي وكذلك على القدرة على المناورة الجبرية.

يحتاج النشاط الثاني إلى معرفة قوية بالتقنيات اللازمة للتحولات في رسوم الدوال.

يحتاج النشاط الثالث إلى طلاقة حسابية إضافية إلى معرفة بالمتقاربات.

خصائص الأداء المتقدم

القيم والاتجاهات والسمات

- المجازفة (النشاطان الثاني والثالث)
- الاهتمام بالمجتمع – المقدرة على إنتاج أفكار جديده مبنية على أفكار موجودة أو عن طريق الإبتعاد عنها (النشاطان الثاني والثالث)

المهارات المتقدّمة

- الإستدلال – المقدرة على اتباع نهج جديد عن طريق عمل محاولات نشطة في الربط مع المعرفة الموجودة أو تحديد المفاهيم الأساسية وبالتالي تحديد طريقة مناسبة للتفكير في الحل (النشاط الثالث)
- الدقة (النشاط الثالث)

المعرفة و الفهم المتقدمان

- التقدير والاعجاب في الربط بين مجالات الرياضيات المختلفة (النشاطان الأول والثاني)
- التبصر في البنية الرياضية (النشاطان الثاني والثالث)

الخطّة الزمنيّة

خمس ساعات تقريباً. تحتاج الأنشطة إلى مدة زمنية متقاربة، مع وجود فرص للتمديد أحياناً.

التكنولوجيا

تستخدم برمجية جيو جبرا في جميع مهام التمثيل البياني التي تتطلب استعمال التقنيات، مع العلم أنه يمكن استخدام برامج أخرى بسهولة. إلا أن برنامج جيوجبرا متوفر مما يجعل تنزيله على أجهزة الحاسب سهلاَ. يستطيع الطلاب بعد ذلك أستكشاف أفكار اخرى بأنفسهم. يتوفر برنامج جيوجبرا وتوابعه على الرابط التالي:

www.geogebra.org

النشاط الأول: متتابعات فيري و دوائر فورد

حول هذه الوحدة

الهدف التعلميّ للوَحدةِ

- معالجة نطاق واسع من المسائل الرياضية ذات محتوى مألوف وغير مألوف.

تحتوي هذه الوحدة على مختارات من التحديات الرياضية والتي ستقوم باستكشافها. تغطي النشاطات نطاق واسع من المواضيع التي تحتوي على الأعداد والحساب، والهندسة، والجبر والتمثيل البياني لأنظمة رياضية. ستكون هناك بعض المواضيع غير المألوفة لديك. ينبغي أن تستغل الفرص المتاحة لاستكشاف الأفكار المثيرة لإهتمامك وكيفية التعامل مع الأسئلة في النشاطات كنقطة انطلاق وليس كنهاية للموضوع.

النشاط الأول

متتابعات فيري و دوائر فورد

1. اكتب جميع الكسور المألوفة التي يمكنك كتابتها باستخدام العددين 1 ، 0 في البسط أو المقام.
2. إن المتتابعة التي تمثلها الكسور في السؤال السابق هي متتابعة فيري الأولى F_1 أوجد متتابعات فيري الثلاث التالية: F_2 و F_3 و F_4
3. يعرف وسيط الكسرين $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ على الشكل التالي: $\frac{a+c}{b+d}$
   بين ان كل المتتابعات التي أنشأتها لها الخاصية التالية:

أي كسر في المتتابعة (عدا الكسرين الأول والأخير) يساوي وسيط الكسرين المجاورين له.

إن خاصية وسيط الكسور في متتابعة فيري توفر طريقة بسيطة لإيجاد المتتابعة F_n

إذا عُلمت المتتابعة F_{n-1} استخدم على سبيل المثال الخطوات التالية لإيجاد F_5 من F_4

- اكتب F_4 مع ترك فراغات بين الحدود.
- أوجد الوسيط لكل حدين متجاورين واكتبه بينهما.
- إحذف الوسيطات التي مقامها لا يساوي 5.

تأكد أن ما ستحصل عليه هو:

$$F_5 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}\right\}$$

105

حول هذا النشاط

يستكشف هذا النشاط جانبين من الرياضيات لهما علاقة عميقة وهما متتابعات فيري ودوائر فورد.

- متتابعات فيري هي مجموعات من الكسور تنتج من عملية تكرار بسيطة.
- دوائر فورد هي تمثيل رياضي مثير للأنماط التي تتكون عند التوسع في متتابعات فيري.

صممّ هذا النشاط لتشجيع الطلاب على تقدير قوة الروابط في الرياضيات وقوة التعميم.

خصائص الأداء المتقدم

- **التقدير والاعجاب في الروابط** – استخدام علاقات من خبرات سابقة واستخدامها في تعاميم محتملة.
- **التعميم** – القدرة على فهم كيفية تطبيق ما يجري في مثال ما على مواقف مشابهة.
- **الطلاقة** – المقدرة على العمل بسرعة ودقة.
- **الدقّة** – المقدرة على العمل بفعالية من خلال قوانين محددة.

توصيات أسلوب التدريس

يمكن وضع الطلاب الموهوبين في مجموعات مناسبة

اجابات الأسئلة

1. تأكد من أن الطلاب حصلوا على $\frac{0}{1}, \frac{1}{1}$

إسأل إذا كان لدى أحد الطلاب كسور أخرى، على سبيل المثال كسور يكون المقام فيها صفراَ. من المفيد إجراء نقاش حول ما إذا يسمح باستخدام مثل هذه الكسور في هذه المرحلة، ولكن يجب عليك تقديم إستنتاج أن القسمة غير معرفة في هذه الحالة، وأننا لن نستخدم كسوراً مقامها صفر بعد الآن.

سنسمي المتتابعة السابقة (ذات الكسرين) متتابعة فيري، ونكتبها على الصورة التالية:

$$F_1 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\right\}$$

بشكل عام، فإن متتابعة فيري النونية F_n ، هي مجموعة من الكسور،في أبسط صورها، بحيث أن كلاً من البسط المقام أقل من n . كشرط إضافي، سوف نبحث فقط عن الكسور التي قيمتها أقل من أو تساوي واحد.

2. يجب أن يحصل الطلاب سريعاً على: .

$$F_2 = \left\{\frac{0}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{1}\right\}$$

$$F_3 = \left\{\frac{0}{1},\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{1}{1}\right\}$$

$$F_4 = \left\{\frac{0}{1},\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{1}{1}\right\}$$

3. تأكد من أن طريقة حساب وسيط كسرين واضحة تماماً للطلاب وكذلك خاصية الوسطية في حساب حدود متتابعة فيري.

(بشكلٍ عام، عدد الحدود التي ستضاف عند تشكيل F_n هو عدد الأعداد التي هي أقل من n والقاسم المشترك بينها وبين n يساوي 1 . هذه تسمى دالة أيلر النونية. يمكنك الرجوع الى الرابط التالي لرؤية ذلك:

http://en.wikipedia.org/wiki/Euler's_totient_function)

واحد من الإستخدامات الرياضية لمتتابعات فيري هو بيان إحدى الطرق لتعداد الأعداد النسبية في فترة معينة (بمعنى وضعها في علاقة واحد لواحد مع مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة)، وهذا يشكل عنصر أساسي في برهان كانتور

(cantor's proof). والمتمثل في أن أصل مجموعة الأعداد النسبية هو نفس أصل مجموعة الأعداد الطبيعية. يمكن التوسع في استخدام طريقة الوسيط أعلاه لإنتاج جميع الكسور، وليس فقط الكسور الحقيقية في الفتره [0 ,1] . لعمل ذلك، فإننا ببساطة نستخدم تعريف رسمي "للمالانهاية"، يتمثل في الكسر $\frac{1}{0}$ ، كحد أعلى بدلاً عن $\frac{1}{1}$ والذي استخدم سابقاً.

.4

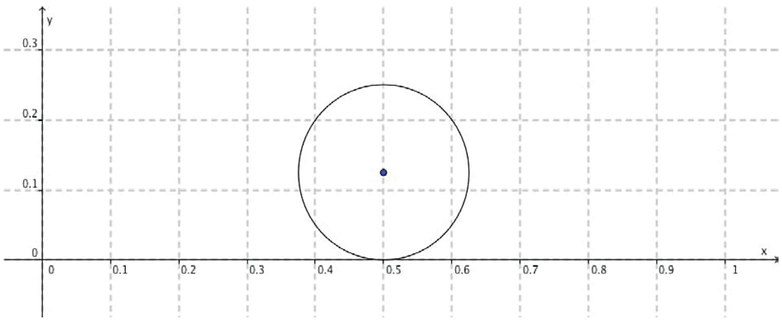
$$F_6 = \left\{\frac{0}{1},\frac{1}{6},\frac{1}{5},\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{2}{5},\frac{1}{2},\frac{3}{5},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{5}{6},\frac{1}{1}\right\}$$

$$F_7 = \left\{\frac{0}{1},\frac{1}{7},\frac{1}{6},\frac{1}{5},\frac{1}{4},\frac{2}{7},\frac{1}{3},\frac{2}{5},\frac{3}{7},\frac{1}{2},\frac{4}{7},\frac{3}{5},\frac{2}{3},\frac{5}{7},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{5}{6},\frac{6}{7},\frac{1}{1}\right\}$$

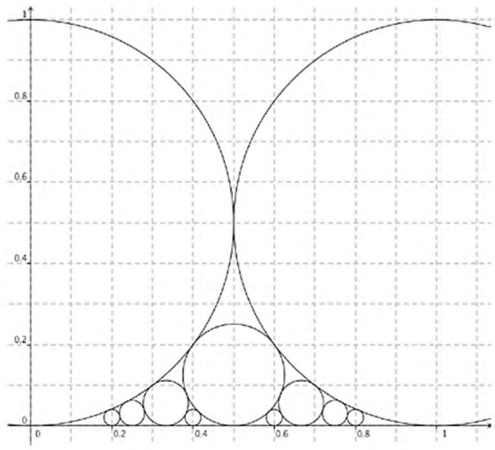
نقطة نقاش: باستخدام طريقة الوسيط هذه، سوف تظهر بعض قيم n في العديد من الحدود الجديدة التي أضيفت إلى المتتابعة، بينما لا تظهر في حدود أخرى. هل هناك نمط في ذلك؟

5. ينتقل هذا النشاط إلى النظر في التفسير الهندسي لمتسلسلات الكسور التي أنتجناها إلى الآن. تعليمات إنشاء ذلك باستخدام قلم رصاص وورقة معطاه هنا . وبالطبع فإن نسخة تقنية يمكن إنتاجها باستخدام تقنية تمثيل بياني مثل جيوجبرا.

يجب أن يظهر البناء على الشكل التالي:



6. يجب أن يكون الرسم البياني على النحو التالي:



7. على الرغم أن دوائر فورد تتصاغر سريعاً، فإن الرسم بحذر يجب أن يوطد حقيقة أن دوائر فورد لكسور الوحده لا تتقاطع.

a. مركزي دائرتي فورد هما :

$$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{8}\right) \text{ و } \left(\frac{1}{3},\frac{1}{18}\right)$$

وبالتالي، فالمسافة بين المركزين هي:

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{18}\right)^2}=\frac{13}{72}$$

والتي تساوي مجموع نصفي قطري الدائرتين

$$\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{18}\right)$$

b. البرهان هو امتداد جبري للنتيجة العددية السابقة.

يقع مركزي الدائرتين على النقطتين:

$$\left(\frac{1}{n+1},\frac{1}{2(n+1)^2}\right) \text{ و } \left(\frac{1}{n},\frac{1}{2n^2}\right)$$

والمسافة بينهما هي:

$$\sqrt{\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)^2+\left(\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{2(n+1)^2}\right)^2}$$

وهذا يمكن تبسيطه إلى:

$$\frac{2n^2+2n+1}{2n^2(n+1)^2}$$

والذي يمكن بسهولة ملاحظة أنه يساوي مجموع نصفي القطرين.

8. دائرة فورد للكسر $\frac{0}{1}$ يقع مركزها على النقطة $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ بينما يقع مركز الدائرة لكسر الوحده العام $\frac{1}{n}$ على النقطة $\left(\frac{1}{n},\frac{1}{2n^2}\right)$.

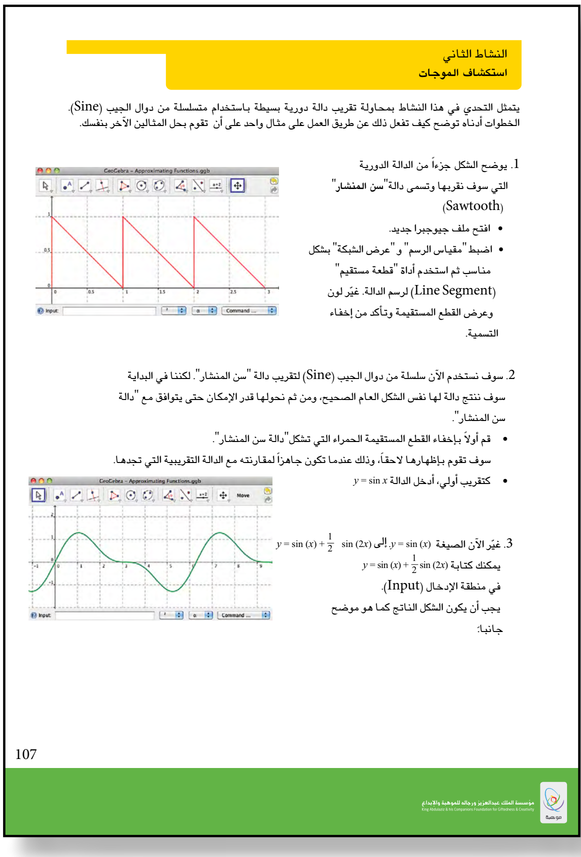
ولذلك فالمسافة بين المركزين هي:

$$\sqrt{\frac{1}{n^2}+\left(\frac{n^2-1}{2n^2}\right)^2}=\frac{n^2+1}{2n^2}$$

يمكن بسهولة ملاحظة أن ذلك يساوي مجموع نصفي القطرين.

فرص التقويم

يوفرّ هذا النشاط فرصه جيدة لمراجعة مهارات الطلاب في الأدوات الجبرية، وكذلك ثقتهم في كيفية ربط حالات هندسية بتمثيلها الجبري الأساسي.



النشاط الثاني
استكشاف الموجات

يتمثل التحدي في هذا النشاط بمحاولة تقريب دالة دورية بسيطة باستخدام متسلسلة من دوال الجيب (Sine). الخطوات أدناه توضح كيف تفعل ذلك عن طريق العمل على مثال واحد على أن تقوم بحل المثالين الآخر بنفسك.

1. يوضح الشكل جزءاً من الدالة الدورية التي سوف نقربها وتسمى دالة"**سن المنشار**" (Sawtooth)
   - افتح ملف جيوجبرا جديد.
   - اضبط "مقياس الرسم" و "عرض الشبكة" بشكل مناسب ثم استخدم أداة "قطعة مستقيم" (Line Segment) لرسم الدالة. غيّر لون وعرض القطع المستقيمة وتأكد من إخفاء التسمية.

2. سوف نستخدم الآن سلسلة من دوال الجيب (Sine) لتقريب دالة "سن المنشار". لكننا في البداية سوف ننتج دالة لها نفس الشكل العام الصحيح، ومن ثم نحولها قدر الإمكان حتى يتوافق مع "دالة سن المنشار".
   - قم أولاً بإخفاء القطع المستقيمة الحمراء التي تشكل"دالة سن المنشار".

   سوف تقوم بإظهارها لاحقاً، وذلك عندما تكون جاهزاً لمقارنته مع الدالة التقريبية التي تجدها.
   - كتقريب أولي، أدخل الدالة $y = \sin x$

3. غيّر الآن الصيغة $y = \sin (x)$ إلى $y = \sin (x) + \frac{1}{2} \sin (2x)$. يمكنك كتابة $y = \sin (x) + \frac{1}{2} \sin (2x)$ في منطقة الإدخال (Input). يجب أن يكون الشكل الناتج كما هو موضح جانبا:

107

خصائص الأداء المتقدم

- **المجازفة** – المقدرة على التعرف على القوانين وتعديلها لإنشاء نماذج جيدة وصحيحة.
- **الاهتمام بالمجتمع** – المقدرة على إنتاج أفكار جديده من خلال البناء على أفكار موجودة أو الاشتقاق منها.
- **التقدير والاعجاب في الروابط** – استخدام علاقات من خبرات سابقة واستخدامها في عمل تعاميم محتملة.
- **التعميم** – المقدرة على استقراء ما يحدث في أوضاع مشابهة من خلال مشاهدة ما يحدث في وضع معيّن.
- **النمذجة** – المقدرة على المراقبة والتقيم والتصحيح الذاتي.

توصيات أسلوب التدريس

يناسب هذا النشاط الطلاب الذين يستخدمون الحاسب سوءاً بشكل فردي أو ثنائي.

حول هذا النشاط

يوفرّ هذا النشاط الفرصة للطلاب لاستخدام تقنيات التمثيل البياني لتقريب الدوال على شكل متسلسلات من دوال الجيب (sin).

بينما يقود هذا المسلك إلى موضوع هام وهو متسلسلات فورير (Fourier Series). إلا أن

الطريقة هنا تجريبية والهدف منها هو مساعدة الطلاب على تطوير تبصر عميق في العمليات.

اجابات الأسئلة

1. تأكد من الطلاب يدركون أن القطع المستقيمة المرسومة هنا هي فقط لبيان شكل الدالة المقصودة. يجب أن لا تكون الخطوط العمودية الحمراء جزءاً من البناء، ولكنها تساعد في جعل النتيجة أكثر وضوحاً.

2. ينبغي لفت إنتباه الطلاب إلى أن هذا تقريب بصورة عامة، لشكل دالة " سن المنشار " (Sawtooth)، فكلا الدالتين تأخذ شكل امواج دورية، على الرغم من أن الدالة $y = \sin(x)$ متناظرة بينما دالة " سن المنشار " ليست كذلك .

3. تأكد من أن الطلاب يدركون أن هذا يعتبر تحسيناً للتقريب السابق. مقارنةً مع رسم دالة الجيب البسيطة، فإن الشكل العام للمنحنى هو أكثر انحداراً لقيم x بين 0 و 1 وأقل انحداراً لقيم x بين 1 و 5 .

4. قد يرغب الطلاب بإضافة حدود أخرى للوصول إلى تقريب أفضل لشكل دالة " سن المنشار ". النقطة التعليمية المهمة هنا هي أن إضافة حدود أخرى يمكن أن يجعل الدالة أكثر قرباً من الدالة المنشودة؛ ومع ذلك فإن الحصول على تطابق غير ممكن باستخدام عدد نهائي من الحدود.

أعد التأكيد على أن الطريقة قد أعادت إنتاج شكل عام للدالة المنشورة؛ نحتاج إلى تعديل مقياس الرسم للوصول إلى تطابق مقبول.

5. إلى 7. يعدّل الطلاب في هذا النشاط مقياس الرسم لمطابقة دالة " سن المنشار ".

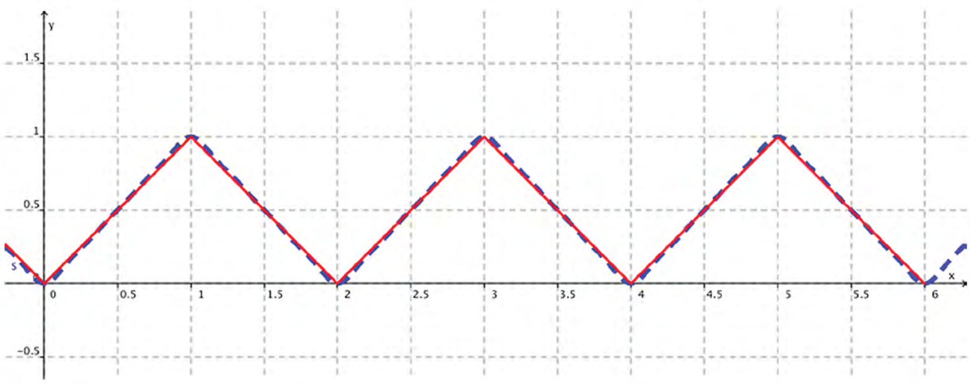
تعتمد الطريقة هنا على معرفة الطلاب المسبقة بالتحويلات الهندسية، وبمقدرة برنامج جيوجبرا على الإشارة إلى الدالة من خلال صيغتها الجبرية ومن ثم إنتاج تقرير مكتوب وهذا يتضمن أمثلة مع تمثيلات بيانية وتعاميم مستخدمين متغيرات مناسبة. ينبغي أن يعبّر الطلاب مستخدمين لغة رياضية ورموزاً دقيقة.

8. الحد العام في هذه المتسلسلة هو:

$$\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}\ \sin(2n-1)x$$

يوفر عدد قليل من حدود هذه المتسلسلة تقريباً ممتازاً للموجة المثلثية.

يوضحّ الشكل أدناه التقريب باستخدام أول أربع حدود (الخط الأزرق المتقطع) مقارنة مع الدالة المنشودة (الخط الأحمر المتصل).



9. إن الحد العام هو

$$\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)x$$

يتطلب التقريب في هذه الحالة حدوداً أكثرللحصول على دقة مقبولة.

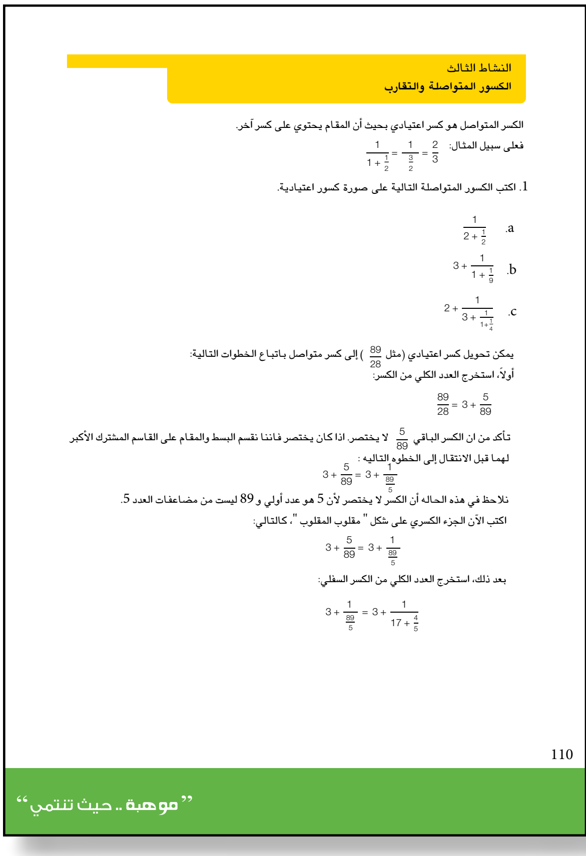
يوضّح الشكل أدناه التقريب باستخدام أول أربع حدود (الخط الأسود) مقارنةً مع الدالة المنشودة (الخط الأحمر).

فرص التقويم

يعطي هذا النشاط مؤشراً جيداً على مهارة الطلاب في التعامل مع المسائل العملية. تتطلب هذه الأنشطة مستوى جيد من الفهم؛ سيكون من الصعب النجاح بمجرد اتباع خطوات دون فهمها.

طبيعة العمل التّخيُّلية تجعل من السهل اختيار الإستراتيجية المناسبة لاستخدامها.

النشاط الثالث: الكسور المتواصلة والتقارب



النشاط الثالث

الكسور المتواصلة والتقارب

الكسر المتواصل هو كسر اعتيادي بحيث أن المقام يحتوي على كسر آخر.

فعلى سبيل المثال: $\frac{2}{3} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}}$

1. اكتب الكسور المتواصلة التالية على صورة كسور اعتيادية.

a. $\frac{1}{2+\frac{1}{2}}$

b. $3+\frac{1}{1+\frac{1}{9}}$

c. $2+\frac{1}{3+\frac{1}{1+\frac{1}{4}}}$

يمكن تحويل كسر اعتيادي (مثل $\frac{89}{28}$) إلى كسر متواصل باتباع الخطوات التالية:

أولاً، استخرج العدد الكلي من الكسر:

$$\frac{89}{28} = 3+\frac{5}{89}$$

تأكد من ان الكسر الباقي $\frac{5}{89}$ لا يختصر. اذا كان يختصر فاننا نقسم البسط والمقام على القاسم المشترك الأكبر لهما قبل الانتقال إلى الخطوه التاليه :

$$3+\frac{5}{89} = 3+\frac{1}{\frac{89}{5}}$$

نلاحظ في هذه الحاله أن الكسر لا يختصر لأن 5 هو عدد أولي و 89 ليست من مضاعفات العدد 5.

اكتب الآن الجزء الكسري على شكل " مقلوب المقلوب "، كالتالي:

$$3+\frac{5}{89} = 3+\frac{1}{\frac{89}{5}}$$

بعد ذلك، استخرج العدد الكلي من الكسر السفلي:

$$3+\frac{1}{\frac{89}{5}} = 3+\frac{1}{17+\frac{4}{5}}$$

110

”موهبة .. حيث تنتمي“

خصائص الأداء المتقدم

- **المجازفة** – المقدرة على التعرف على القوانين وتعديلها لإنشاء نماذج جيدة ولكن صحيحة.
- **الاهتمام بالمجتمع** – المقدرة على إنتاج أفكار جديده من خلال البناء على أفكار موجودة أو من خلال الإبتعاد عنها.
- **التبصر في البنية الرياضية والمسائل متعددة الخطوات** – يمكن تجزئة المهام، تقرير النهج المناسب، ومن ثم تطبيق النشاط.
- **الدقّة** – المقدرة على العمل بفعالية ضمن قواعد محددة.

توصيات أسلوب التدريس

يمكن وضع الطلاب الموهوبين في مجموعات مناسبة

اجابات الأسئلة

حول هذا النشاط

يعتبر هذا النشاط استكشاف لخصائص الكسور المتواصلة. على الرغم من أن التعامل سيكون مباشراً مع الموضوع من ناحية حسابية، فإن هذا العمل له ارتباط مهم بفكرة تقارب المتسلسلات.

a.1 $\frac{1}{2+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5}$

b. $3+\frac{1}{1+\frac{1}{9}} = 3+\frac{1}{\frac{10}{9}} = 3\frac{9}{10}$

c. $2+\frac{1}{3+\frac{1}{1+\frac{1}{4}}} = 2+\frac{1}{3+\frac{1}{\frac{5}{4}}} = 2+\frac{1}{\frac{19}{5}} = 2\frac{5}{19}$

a.2 $\frac{5}{3} = 1 + \frac{2}{3} = 1 + \frac{1}{\frac{3}{2}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}$

b. $\frac{26}{17} = 1 + \frac{9}{17} = 1 + \frac{1}{\frac{17}{9}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{8}{9}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{9}{8}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{8}}}$

c. $\frac{79}{115} = \frac{1}{\frac{115}{79}} = \frac{1}{1 + \frac{36}{79}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{79}{36}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2+\frac{7}{36}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2+\frac{1}{\frac{36}{7}}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2+\frac{1}{5+\frac{1}{7}}}}$

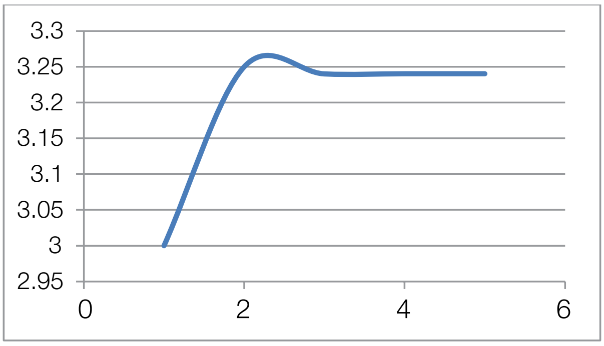
a.3 $[1; 1, 2, 2]$.

b. $[9;1, 2]$.

c. $[4; 2, 9]$.

a.4 $3\frac{92}{383} = 3.24021$

b. يبين الرسم أن المتقاربات تقترب بسرعة من القيمة النهائية.



5. a.بالنسبة للكسر المتواصل [1; 3, 5]

أول متقاربة هي $1 = \frac{1}{1}$.

ثاني متقاربة هي $1\frac{1}{3} = 1 + \frac{1}{3}$.

ثالث وآخر متقاربة هي $1\frac{5}{16} = 1 + \frac{1}{3+\frac{1}{5}}$.

وهي 1.3125, 1.3333, 1.0000 لأقرب 4 منازل عشرية.

b. لأقرب 3 منازل عشرية

2.000, 2.250, 2.238, 2.239

c. لأقرب ست منازل عشرية

3.000000, 3.200000, 3.194444, 3.194485, 3.194485

6. بالنسبة للكسر المتواصل [1:1, 1, 1, 1, ...]

أول متقاربة هي $\frac{1}{1}=1$

ثاني متقاربة هي $1+\frac{1}{1}=2$

ثالث متقاربة هي $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}=1\frac{1}{2}$

رابع متقاربة هي $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}=1\frac{2}{3}$

خامس متقاربة هي $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}}=1\frac{3}{5}$

1, 2, 1.5, 1.667, 1.6

(تتقارب المتسلسلة إلى النسبة الذهبية... 1.618)

7. بالنسبة للكسر المتواصل [1; 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1...]

أول متقاربة هي $\frac{1}{1}=1$

ثاني متقاربة هي $1+\frac{1}{1}=2$

ثالث متقاربة هي $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}=1\frac{2}{3}$

رابع متقاربة هي $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1}}}=1\frac{3}{4}$

خامس متقاربة هي $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}=1\frac{8}{11}$

a. 1, 2, 1.667, 1.75, 1.727

b. لأقرب 3 منازل عشرية، تكون المربعات هي:

1.000, 4.000, 2.778, 3.063, 2.983

تتقارب المتسلسلة إلى $\sqrt{3}$.

8. بالنسبة للكسر المتواصل [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1...]

أول متقاربة هي $\frac{1}{3}$

ثاني متقاربة هي $3+\frac{1}{7}=3\frac{1}{7}$

ثالث متقاربة هي $3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15}}=3\frac{15}{106}$

رابع متقاربة هي $3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1}}}=3\frac{16}{113}$

خامس متقاربة هي $3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{292}}}}=3\frac{4687}{33102}$

مقربةً لعدد متزايد من المنازل العشرية.

المربعات هي 0.333, 3.143, 3.142, 3.14159, 3.1415926....

هذه هي البداية لتعبير الكسر المتواصل π .

9. يترك هذا كتحدي أخير. يمكنك التأكد ان الحلول هي كما في الأعلى. [1; 2, 2, 2, 2...]

فرص التقويم

يوفر هذا النشاط فرص لمراجعة مهارات الطلاب الحسابية، كتابياً وذهنياً، وكذلك فهمهم لتقارب المتسلسلات.

مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع
King Abdulaziz & his Companions Foundation for Giftedness & Creativity

بوابة موهبة الإلكترونية

شاركنا التجربة واكتشف عالم بوابة موهبة
المرجع الرئيسي للموهبة والإبداع والابتكار في العالم العربي

بوابة موهبة الإلكترونية بوابةٌ علمية متخصصة في إرساء أسس تربية الموهوبين والمبدعين في المملكة العربية السعودية والعالم العربي. تقدّم خدمات متنوعة للموهوبين والقائمين على رعايتهم، وتعتبر مصدرًا معرفيًا متجددًا ومجالاً تفاعليًا للمشاركة المجتمعية.

Info@mawhiba.org.sa
الرقم المجاني: 8006123333

"موهبة .. حيث تنتمي"