الصف الأول الثانوي

منهاج موهبة الإضافي المتقدم

الرياضيـــات

دليل المُعلِّـــم

مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع
King Abdulaziz & his Companions Foundation for Giftedness & Creativity

موهبة

يتعيّن دراسة هذا الدليل جنبًا إلى جنب مع كتاب الطالب من المنهاج الإضافيّ المتقدّم.
ولقد طوّرت موادّ المنهاج الإضافيّ المتقدّم للمدارس في شراكة موهبة مع المدارس.

شارع تركي بن عبدالعزيز الأول
صندوق بريد ٣٠٠٨٢٠ الرياض ١١٣٧٢، المملكة العربية السعودية – www.mawhiba.org.sa

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ

المحتويات

شراكة موهبة مع المدارس

أنتجت موادّ المناهج الإضافيّة المتقدّمة بغرض استعمالها في مدارس موهبة دعمًا لجهود تحقيق المخرجات التربويّة المرجوّة من برنامج موهبة والتّي تتلخّص في تنمية القيادات الشابّة، والمتعلّمين الناجحين وروّاد قطاع الأعمال المتميّزين بالإبداع والابتكار.

تُعدُّ شراكة موهبة مع المدارس واحدة من أهمّ مبادرات الخطّة الاستراتيجيّة للموهبة والإبداع والابتكار التّي تبنّتها مؤسّسة الملك عبد العزيز ورجاله للموهبة والإبداع (موهبة). وتهدف هذه المبادرة إلى إنشاء بيئة تعليميّة تعلّميّة ترعى الموهبة والإبداع من خلال تقديم منح دراسية للطلاّب المتميّزين للالتحاق بمدارس متميّزة في المملكة. ويوفّر هذا البرنامج أنشطة تعليميّة متقدّمة يقدّمها معلّمون مؤهّلون تأهيلاً عاليًا؛ ممّا يؤدّي إلى تحسين قدرات الطلاّب وتنمية مواهبهم، فضلاً عن تحسين نوعيّة التعليم المقدّم لطلاّب المدارس الأخرى في الشراكة بوجّه عامّ.

موادّ المنهاج الإضافيّ المتقدّم

لقد صمّم المنهاج الإضافيّ المتقدّم باستعمال الأساليب المتميّزة لتعزيز التحدّي والإثراء في المناهج الدراسيّة الحاليّة، واتّباع المنحى الاستقصائيّ والتوقّعات العالية. وتضمّ هذه الموادّ مجموعة كبيرة من الأنشطة التّي تهدف إلى إيجاد المتعلّم المستقلّ والمتمكّن، وذلك عن طريق تشجيع المتعلّمين على استعمال القدرات فوق المعرفيّة، والمرونة في اختيار الاستراتيجيّات والتخطيط لها، وصياغة الفرضيّات، إضافة إلى الربط الواسع بين خيوط المعرفة التّي تشمل الحقائق الموضوعيّة والعمليّات الإجرائيّة معًا.

يضاف إلى ما تقدّم فإنّ طلاّب مدارس شراكة موهبة يتدرّبون كي يكونوا خبراء في المباحث التّي يستهدفها البرنامج وهي: الرياضيّات، والعلوم، واللغة الإنجليزيّة، وتكنولوجيا المعلومات والاتّصالات ICT. وفي حين يتميّز الخبراء بالمعرفة المتقدّمة، فإنّ الأهمّ من ذلك أنّهم يعملون على مستويات فكريّة عليا؛ الأمر الذي ينعكس على أساليب تدريسهم وتقويمهم. ويتعيّن على الخبير ألاّ يكتفي بتذكّر المعلومات، بل أن يدمج معارفه في منظومة نظريّة ، ويعمد إلى توظيفها في مواقف واقعيّة متجدّدة. ومن هذا المنطلق فإنّ الأنشطة الواردة في كتاب الطالب تشجّع هذا النمط من التفكير، وتركّز تعلّم الطلاّب الموهوبين والمبدعين على أبعاد ثلاثة، هي:

القيم والاتّجاهات والسمات المتقدّمة، مثل: الإستقصاء، و المرونة ،و القبول بحالة الشك ، والإبداع، والاستقلاليّة في الدراسة، والانفتاح على البدائل المختلفة، وتبنّي منهجيّة منظّمة، والمثابرة.

المعرفة والفهم المتقدّمان، مثل: وضوح المفاهيم، وإقامة الصلات بين مختلف مجالات الرياضيّات، وفهم موضوعات الرياضيّات ومبادئها، وتفهّم البنية الأساسيّة للرياضيّات، واستيعاب الأفكار الكبرى، واستعمال البراهين، ومعرفة علماء الرياضيّات ومساهماتهم.

المهارات المتقدّمة، مثل: التفكير المنطقيّ والاستدلال، وتكوين الصورة الذهنيّة المجرّدة، والربط بين المهارات المكتسبة من ناحية وسياق الحياة الاعتياديّة ومشاكلها من ناحية أخرى، والطلاقة، والدقّة في استعمال مهارات الرياضيّات وأدواتها، والقدرات فوق المعرفيّة، والتعميم، والنمذجة.

القيم والاتجاهات والسمات

ينبني المنهاج الإضافي المتقدم على قيم واتجاهات وسمات ست تميز مشروع شراكة مدارس موهبة، وتقدم وصفا واضحا للخصائص التي يتميز بها الطلاب الذين صمم هذا المنهاج لرعايتهم وتنميتهم.

الإستقصاء

سوف ينمي طلاب مدارس شراكة موهبة روح الاستقصاء، وسيرغبون في التعلم الذاتي، وينشطون فيه، ويتوقون إليه. وستظهر عليهم سمات المبادرة والتفكير المستقل، وتحدي الافتراضات، وطلب البرهان على الفرضيات والاستنتاجات. وسينظمون مسيرة تعلمهم بفعالية، منتقلين من استيعاب المعارف وإتقان الخطوات العملية، إلى تطوير وجهات النظر الشخصية والحلول الفردية.

المجازفة

سوف ينمي طلاب مدارس شراكة موهبة روح المجازفة، وسيظهرون ثقة بأنفسهم، ويتناولون الأفكار والظواهر الجديدة عليهم بالتجربة والنقد، ويقدمون على التخمين وإعطاء الفرضيات، ولن يزعجهم العمل في ظل ظروف جديدة عليهم. وسوف يرجئون التوصل إلى الاستنتاجات قبل نضوجها في أذهانهم، ويتحملون الشك المؤقت.

الإبداع

سوف ينمي طلاب مدارس شراكة موهبة روح الإبداع والابتكار، وسيصبحوا مُتَفتّحي العقول، ومرنين في طريقة تفكيرهم. إلى جانب إبداء استعدادهم للابتكار، وإيجاد حلول متعددة للمشاكل والمواقف، مظهرين قدرة تكيف أساليب عملهم لتتلاءم مع الظروف. وسيغدو عملهم مثيرا للدهشة، ودليلا على الأصالة، ومتميزا بأسلوبهم الشخصي الخاص.

المثابرة

سوف ينمي طلاب مدارس شراكة موهبة روح المثابرة، ولن تثبط العقبات والصعوبات من عزائمهم، بل سيصرون على مواصلة بذل الجهود. وسوف يبرهنون على تميزهم بالتأني في العمل، والالتزام بأسلوبهم المنهجي المنظم، ولن يكلوا من المثابرة لتحقيق النتائج المرجوة بأعلى مستويات الجودة والدقة الممكنة.

التعاون

سوف ينمي طلاب مدارس شراكة موهبة روح التعاون والعمل الجماعي، وسيسعون إلى الحصول على الملاحظات والتعليقات على أعمالهم، وسيدلون بأرائهم وأفكارهم بوضوح واختصار، مصغين إلى وجهات نظر الآخرين وأفكارهم. وسيتمتعون بالقدرة على العمل الجماعي والاستعداد له، ويؤدون أدوار متنوعة ضمن فريق العمل، ويتمكنون من تقويم أفكارهم ومساهماتهم.

الاهتمام بالمجتمع

سوف ينمي طلاب مدارس شراكة موهبة روح الاهتمام بالمجتمع. ففي الوقت الذي سيكونون فيه مدفوعين بالطموح الشخصي والرغبة في تحقيق النجاح، فإنهم سيمتلكون أيضا إحساسا قويا بأهمية المساهمات التي يقدمونها للمجتمع تحقيقا لمصلحة الوطن، ومنفعة أولئك الذين هم أقل منهم حظا. وسيكونون مثالا للمواطن الصالح المتعاطف مع المصلحة الجماعية لمحيطه الاجتماعي، المدرك لأوجه التباين والتشابه بين الأفراد والشعوب، والواعي بتراثه الثقافي، والتراث الثقافي للأخرين، كما سيكون الطلاب متجاوبين مع القضايا الأخلاقية التي تثار في سياق دراساتهم.

فئات الأداء المعرفي المتقدم

تهتم مواد المناهج الإضافية المتقدمة باكتساب وتنمية خصائص محددة للأداء تتركز عليها جهود التعلم والتقويم على حد سواء. يضاف إلى ذلك فإن عمليات التدريس والتعلم في ظل هذه البرامج تضع بين أيدي المعلمين الأدوات اللازمة لرصد وتقويم قدرات الطلاب على تطوير المهارات المعرفية المتقدمة المرتبطة بالمهارات المعرفية الآتية:

القيم والاتجاهات والسمات المتقدمة

١. التعميم: القدرة على الحكم على إمكانية استعمال نتائج موقف معين لتوقع ما يمكن أن يحدث في مواقف أخرى مماثلة.
٢. التجريد: القدرة على الانتقال السريع من المحسوس إلى المجرد
٣. إيجاد الروابط: استعمال الخبرات السابقة لصياغة تعميمات جديدة.
٤. التخيل: القدرة على عرض المشكلة وتصنيفها في سياق ما يمتلكه الطالب من معارف سابقة واسعة مرتبطة بها.
٥. التفكير الشامل: القدرة على التعامل مع الأفكار الكبيرة والمفاهيم الشاملة
٦. الثقة الفكرية: القدرة على توضيح وجهة النظر الشخصية الخاصة المعتمدة على الأدلة، وتقديمها للآخرين، والدفاع عنها.
٧. التصاوغ الفكري: القدرة على معرفة القواعد السارية وتطويعها لإيجاد صيغ صحيحة جديدة.
٨. الأتمتة: القدرة على استعمال بعض المهارات بيسر وسهولة ؛ لأنها لا تتطلب تفكيرا فعالا
٩. القدرة على رؤية وجهات النظر البديلة: استيعاب آراء الآخرين في التعامل مع الأمور المبهمة والمعقدة.
١٠. القدرات فوق المعرفية: القدرة على استعمال أنماط تفكير مختلفة ونقل المعرفة من موقف إلى آخر.
١١. القدرة على التعامل مع مسائل معقدة، ومتعددة الخطوات: يستطيع تجزئة المهمة، واختيار الأسلوب المناسب للحل، وتنفيذ النشاط.
١٢. التخطيط الاستراتيجي: القدرة على التصدي لخبرات تعلمية جديدة، وذلك لمحاولة ربطها بالمعرفة والمفاهيم الحالية، ومن ثم تحديد نمط التفكير المناسب.
١٣. التفكير الناقد أو المنطقي: القدرة على الاستنتاج ووضع الفرضيات والاستدلال والبحث عن الأدلة المؤيدة.
١٤. التفكير المرن: القدرة على التخلي عن فكرة واستبدالها بفكرة أفضل منها، أو ايجاد حلول متعددة.
١٥. طلاقة التفكير: القدرة على إنتاج الأفكار.
١٦. الأصالة: استحداث شي جديد كليا.
١٧. التفكير التطويري والتحولي: القدرة على تكوين أفكار جديدة بوساطة البناء على الأفكار القائمة وتطويرها، أو بالتحول عنها إلى اتجاه جديد.
١٨. عمليات التنظيم الذاتية: قدرة الطالب على متابعة عمله ومُراقبته وتقويمه وتصحيح مسارُه.
١٩. السرعة والدقة: القدرة على العمل بسرعة وبدقة عالية في الوقت نفسه.
٢٠. الإحكام: القدرة على العمل بفعالية ضمن قواعد المجال.
٢١. التركيز والمثابرة والصلابة: القدرة على مواصلة العمل حتى إنجاز المهمة.

استعمال هذا الدليل

يتعيّن أن يُقرأ هذا الدّليل جنباً إلى جنب مع كتاب الطالب من المنهاج الإضافيّ المتقدِّم . فهو يوفّر معلومات عن كيفيّة تدريس وحدات الكتاب ، وعما يحتاج الطالب معرفته ليكون قادراً على أدائه قبل التعامل مع أنشطة الكتاب كما يزوّد المعلّم بأساليب متنوّعة يمكن أن يسترشد بها لتدريس الأنشطة ، و خطّةً زمنيّة ممكنة .

و يتضمّن كتاب الطالب العديد من الأنشطة المتنوّعة التي صُمّم معظمها للتدريس الصفيّ التمايزي مع ترك الخيار للمعلمين في تدريس بعض الأنشطة لمجموعات مُنْتقاة من الطلاّب .

يتعيّن ألاّ يشعر المعلّم أنّه مقيّد و مُلْزم بتدريس الأنشطة كما هي معروضة في الكتاب تماماً ، فقد يرغب بعض المعلمين في تعديل أو تبديل بعض الأنشطة تبعاً لاحتياجات طلاّبهم ، فيُمكن على سبيل المثال أن يخصص لبعض الأنشطة وقتاً أطول من الوقت المقترح في الدليل ، و ذلك لإتاحة الفرصة للطلاّب لمتابعة الموضوعات التي تثير اهتماماتهم بصورة متعمّقة ، أو كي يستكشفوا المادّة المقترحة بصورة أوسع .

و يُطلب إلى المعلّمين ألاّ يضعوا سقفاً لما يمكن أن يُنجزه طلاّبهم . و تُفيد التجربة أن المُعلّم الذي ينتظر من طلبته أعلى مستويات التميّز و التحصيل سوف يلقى منهم أداءً يفوقُ توقعاته .

الوحدة الأولى
المنطق والاستدلال

مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع
King Abdulaziz & his Companions Foundation for Giftedness & Creativity
موهبة

نظرة عامّة

تناقش هذه الوحدة نواحي مختلفة من المنطق بما في ذلك جداول الصواب، وأدوات الربط، والعبارات المتكافئة. كما توسّع قواعد المنطق الأساسية من خلال استخدام المجموعات، والاستخدام المتقدم للرموز، بما يشمل أدوات الربط المركبة، والمهام التي تتطلب تطبيق منهجية منتظمة وشاملة.

الأهداف التعلمية للوحدة

- اكتساب الثقة عند تطبيق المنطق الرياضي على مسائل متنوعة
- الطلاقة في استخدام المنطق والرموز المرتبطة به

المعرفة السابقة

الإلمام بالرموز والعبارات المنطقية، وجداول الصواب، وأدوات الربط

خصائص الأداء المتقدم

القيم والاتجاهات والسمات

- المثابرة أو تطبيق منهجية منظمة (الأنشطة الأول، والثاني، والثالث)

المهارات المتقدمة

- الاستدلال (الأنشطة الثاني، والثالث، والرابع)
- فوق المعرفية (النشاط الرابع)

المعرفة والفهم المتقدمان

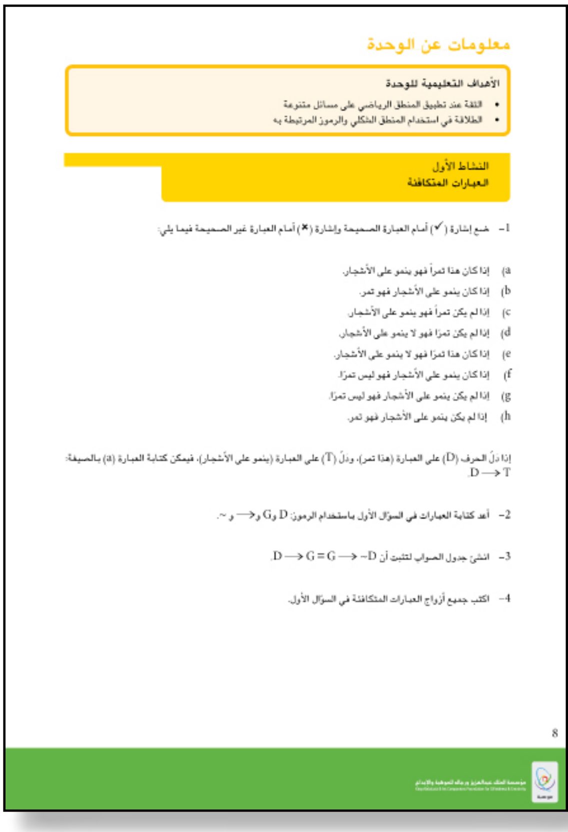
- الفهم المتعمق للبنية الرياضية الأساسية (النشاط الأول)

مدة تدريس الوحدة

أربعة أسابيع، بواقع ساعتين من الجدول الدراسي الأسبوعي

المصادر

لا توجد


معلومات عن الوحدة

الأهداف التعليمية للوحدة

- الثقة عند تطبيق المنطق الرياضي على مسائل متنوعة
- الطلاقة في استخدام المنطق الشكلي والرموز المرتبطة به

النشاط الأول
العبارات المتكافئة

1- ضع إشارة (✓) أمام العبارة الصحيحة وإشارة (✗) أمام العبارة غير الصحيحة فيما يلي:

a) إذا كان هذا تمراً فهو ينمو على الأشجار.
b) إذا كان ينمو على الأشجار فهو تمر.
c) إذا لم يكن تمراً فهو ينمو على الأشجار.
d) إذا لم يكن تمرًا فهو لا ينمو على الأشجار.
e) إذا كان هذا تمرًا فهو لا ينمو على الأشجار.
f) إذا كان ينمو على الأشجار فهو ليس تمرًا.
g) إذا لم يكن ينمو على الأشجار فهو ليس تمرًا.
h) إذا لم يكن ينمو على الأشجار فهو تمر.

إذا دلَّ الحرف (D) على العبارة (هذا تمر)، ودلَّ (T) على العبارة (ينمو على الأشجار)، فيمكن كتابة العبارة (a) بالصيغة: $D \longrightarrow T$.

2- أعد كتابة العبارات في السؤال الأول باستخدام الرموز: D وG و$\longrightarrow$ و ~.

3- انشئ جدول الصواب لتثبت أن $D \longrightarrow G \equiv G \longrightarrow \sim D$.

4- اكتب جميع أزواج العبارات المتكافئة في السؤال الأول.

8

حول هذا النشاط

يوسع هذا النشاط دراسة العبارات المنطقية من خلال التناول المنهجي لمجموعة كاملة من البدائل في سياق محدود. ويمكن تنفيذ هذا النشاط مع الصف كاملاً، علماً بأن طلاب موهبة قد يتميزوا بوضوح أكبر في إستجاباتهم.

خصائص الأداء المتقدم

- الفهم العميق للبنية الرياضية الأساسية المتعلقة بالمنطق وفهم العلاقات المتبادلة
- تبني أسلوب منهجي في تناول المسائل من خلال تطبيق قواعد المنطق بشكل متسق

توصيات أسلوب التدريس

العمل المستقل والمناقشة الصفية

إجابات الأسئلة

يوسع هذا النشاط دراسة العبارات المنطقية من خلال التناول المنهجي لمجموعة كاملة من البدائل في سياق محدود. ويمكن تنفيذ هذا النشاط مع الصف كاملاً، علماً بأن طلاب موهبة قد يتميزوا بوضوح أكبر في إستجاباتهم.

السؤال الأول

العبارتان a وَ g صحيحتان، وبقية العبارات خطأ.

السؤال الثاني

a) $D \rightarrow G$
b) $G \rightarrow D$
c) $\sim D \rightarrow G$
d) $\sim D \rightarrow \sim G$
e) $D \rightarrow \sim G$
f) $G \rightarrow \sim D$
g) $\sim G \rightarrow \sim D$
h) $\sim G \rightarrow D$

السؤال الثالث

D	G	~D	~G	$D \rightarrow G$	$\sim G \rightarrow \sim D$
T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T

السؤال الرابع

أزواج العبارات المتكافئة هي: g وَ a, b وَ d, c وَ h, e وَ f.

فرص التقويم

تشير إجابات السؤال الأول إلى قدرة الطلاب على التفكير المنطقي، والربط بين العبارات المتكافئة منطقيًا. أما الإجابة على السؤالين الثالث والرابع فإنها تشير إلى قدرتهم على إنشاء جداول صواب دقيقة، وقدرتهم على تمييز العبارات المتكافئة.

هل يطبق الطلاب قواعد المنطق بوضوح واتساق في خطوات الحل؟

هل يدرك الطلاب الروابط بين العبارات وقواعد المنطق؟

النشاط الثاني
جداول الصواب

الحرف P يمثل العبارة: "n عدد من مضاعفات الرقم 3".
الحرف Q يمثل العبارة: "n عدد زوجي"
الحرف R يمثل العبارة: "n عدد من مضاعفات الرقم 6".

1- عبِّر عن العبارة $P \wedge Q \leftrightarrow R$ بمفرداتك الخاصة.
لاحظ: $R \equiv P \wedge Q$
2- اثبت أن $P \wedge Q \leftrightarrow R$ صادقة دائماً.

3- عبرّ عن العبارة المنطقية $\sim P \vee \sim Q \longrightarrow \sim R$ بلغتك الخاصة.

4- أنشئ جدول الصواب لتبين أن $\sim P \vee \sim Q \longrightarrow \sim R$ صادقة منطقياً لجميع قيم الصواب.
لاحظ: $R \equiv P \wedge Q$
5- استخدم جدول الصواب لإثبات أن العبارة التالية ليست صادقة منطقياً، أي ليست صادقة لجميع قيم الصواب:
إذا لم يكن عدد ما من مضاعفات 6، فإنه ليس من مضاعفات 3، وليس عددًا زوجياً.

6- اكتب مثالاً عددياً يثبت أن العبارة في السؤال الخامس ليست صادقة منطقياً.

9

"موهبة .. حيث تنتمي"

حول هذا النشاط

يسهم هذا النشاط في توسيع دراسة جداول الصواب من خلال استخدام مجموعة من العبارات المفتوحة المترابطة فيما بينها. ولا يناسب هذا النشاط سوى طلاب موهبة فقط.

خصائص الأداء المتقدم

- امتلاك قدرات قوية على الاستدلال الرياضي عند تطبيق قواعد المنطق، والاستعداد لتبرير النتائج باستعمال جداول الصواب
- المثابرة لتخطي العوائق عندما لا تكون الإجابات بديهية في بداية المهمة

توصيات أسلوب التدريس

سحب مجموعة الطلبة الموهوبين، والعمل المستقل، والمناقشات الجماعية

إجابات الأسئلة

السؤال الأول

يكون العدد من مضاعفات 6 إذا وفقط إذا كان من مضاعفات 3، وكان عددًا زوجياً.

السؤال الثاني

يمكن إثبات ذلك بطرائق مختلفة، فمثلاً يمكن للطلاب أخذ سلسلة من القيم الحقيقية وتوضيح ماهيتها.

أو يمكنهم إنشاء جدول الصواب كما في الشكل (مع ملاحظة أن قيم الصواب للعبارة R ليست قيم افتراضية في جدول الصواب، بل تعتمد على القيم الحقيقة للعبارتين P وَ Q).

P	Q	R	$Q \wedge P$	$Q \wedge P \leftrightarrow R$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	F	F	T
F	F	F	F	T

السؤال الثالث

إذا لم يكن العدد من مضاعفات 3، أو ليس عدداً زوجياً، فإنه ليس من مضاعفات 6.

السؤال الرابع

P	Q	R ($\equiv P \wedge Q$)	~P	~Q	~R	~P ∨ ~Q	~P ∨ ~Q → ~R
T	T	T	F	F	F	F	T
T	F	F	F	T	T	T	T
F	T	F	T	F	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T

السؤال الخامس

يمكننا كتابة العبارة على الشكل $\sim R \rightarrow \sim P \wedge \sim Q$

P	Q	R	~P	~Q	~R	~P ∧ ~Q	~R → ~P∧ ~Q
T	T	T	F	F	F	F	T
T	F	F	F	T	T	F	F
F	T	F	T	F	T	F	F
F	F	F	T	T	T	T	T

نلاحظ أن العمود الأخير في جدول الصواب يمثل العبارة المعطاة وحيث أن النتائج في هذا العمود ليست صائبة دائماً وبالتالي فإن العبارة ليست صحيحة لجميع قيم الصواب.

السؤال السادس

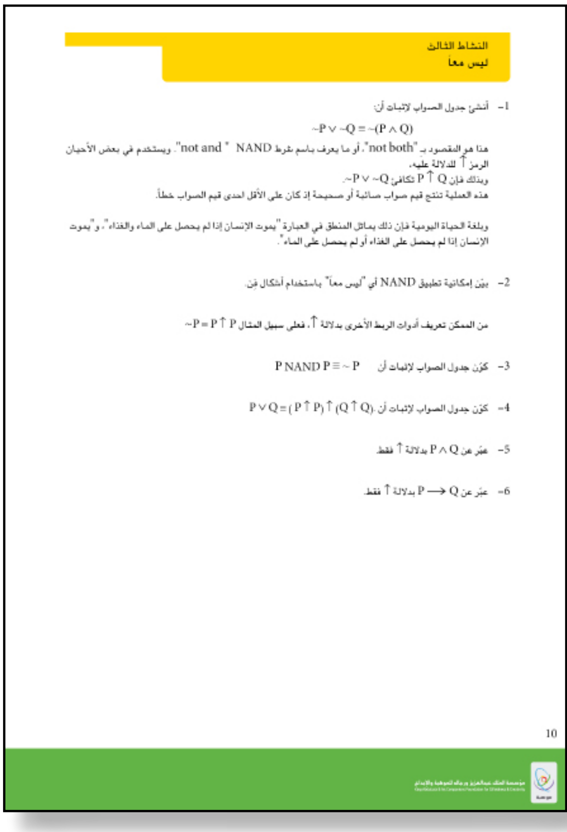
هناك العديد من الأمثلة المختلفة، فمثلاً الرقم 4 ليس من مضاعفات 6 ولكنه زوجي، والرقم 9 ليس من مضاعفات 6، ولكنه من مضاعفات 3.

فرص التقويم

تدّل المحاولة في السؤال الثاني على قدرة الطلاب على مواجهة المسائل الجديدة ومحاولة حلها. أما الإجابة عن السؤال 5 فتدل على منهجية الطلاب في تكوين جدول الصواب المناظر من عبارة ما بغرض الحكم على صوابها.

هل يتمكن الطلاب من شرح تفكيرهم باستخدام الاستدلال الرياضي المرتبط بالمنطق؟

هل يستمر الطلاب في المحاولة عند مواجهة العقبات؟ وهل يمكنهم استخدام معرفتهم السابقة لإيجاد حلول جديدة؟


النشاط الثالث
ليس معاً

1- أنشئ جدول الصواب لإثبات أن:

$$\sim P \vee \sim Q = \sim(P \wedge Q)$$

هنا هو المقصود بـ "not both"، أو ما يعرف باسم شرط NAND "not and". ويستخدم في بعض الأحيان الرمز $\uparrow$ للدلالة عليه.
وبذلك فإن $P \uparrow Q$ تكافئ $\sim P \vee \sim Q$.
هذه العملية تنتج قيم صواب صائبة أو صحيحة إذ كان على الأقل احدى قيم الصواب خطأً.

وبلغة الحياة اليومية فإن ذلك يماثل المنطق في العبارة "يموت الإنسان إذا لم يحصل على الماء والغذاء"، و"يموت الإنسان إذا لم يحصل على الغذاء أو لم يحصل على الماء".

2- بيّن إمكانية تطبيق NAND أي "ليس معاً" باستخدام أشكال فِن.

من الممكن تعريف أدوات الربط الأخرى بدلالة $\uparrow$، فعلى سبيل المثال $\sim P = P \uparrow P$

3- كوّن جدول الصواب لإثبات أن $P \text{ NAND } P \equiv \sim P$

4- كوّن جدول الصواب لإثبات أن $P \vee Q = (P \uparrow P) \uparrow (Q \uparrow Q)$.

5- عبّر عن $P \wedge Q$ بدلالة $\uparrow$ فقط.

6- عبّر عن $P \longrightarrow Q$ بدلالة $\uparrow$ فقط.

10

حول هذا النشاط

يوسِّع هذا النشاط دراسة الروابط المنطقية من خلال تقديم روابط جديدة، تُعرَف أحياناً باسم "سهم شيفر". وتكمن أهميته لمجال المنطق في إمكانية استعماله كبديل لبعض الروابط الرئيسة الأخرى. ويعدّ هذا النشاط فرصة لاستكشاف هذا الموضوع.

يجب تشجيع الطلاب على استعمال جداول الصواب لحل السؤالين 5 و6، وتجريب بعض التراتيب لإيجاد نمط يتوافق مع نمط الأداتين: "و"، "يتضمن"، على التوالي.

خصائص الأداء المتقدم

- امتلاك قدرة قوية على الاستدلال الرياضي عند تجريب الروابط الجديدة لحل مسائل المنطق
- المنهجية في تناول المسائل عند تطبق العلاقات والقواعد الرياضية في خطوات الحل

توصيات أسلوب التدريس

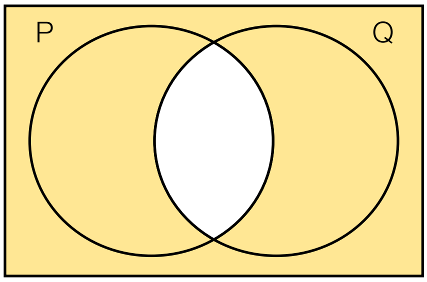
سحب مجموعة الطلبة الموهوبين، والمناقشات الجماعية

إجابات الأسئلة

السؤال الأول

P	Q	$P \wedge Q$	$\sim P$	$\sim Q$	$\sim P \vee \sim Q$	$\sim(P \wedge Q)$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	F	F	T	T	T
F	T	F	T	F	T	T
F	F	F	T	T	T	T

السؤال الثاني



السؤال الثالث

P	P	$P \uparrow P$	$\sim P$
T	T	F	F
F	F	T	T

السؤال الرابع

P	Q	$P \vee Q$	$P \uparrow P$	$Q \uparrow Q$	$(P \uparrow P) \uparrow (Q \uparrow Q)$
T	T	T	F	F	T
T	F	T	F	T	T
F	T	T	T	F	T
F	F	F	T	T	F

السؤال الخامس

في هذه السؤال، يمكن للطلاب الحصول على الإجابة النهائية من خلال التحرك خطوة خطوة إلى الوراء باستعمال الجدول للتوصل إلى صيغة العبارة.

$$(P \uparrow Q) \uparrow (P \uparrow Q)$$

السؤال السادس

يوجد احتمالان:

$$P \uparrow (P \uparrow Q) \quad ، \quad P \uparrow (Q \uparrow Q)$$

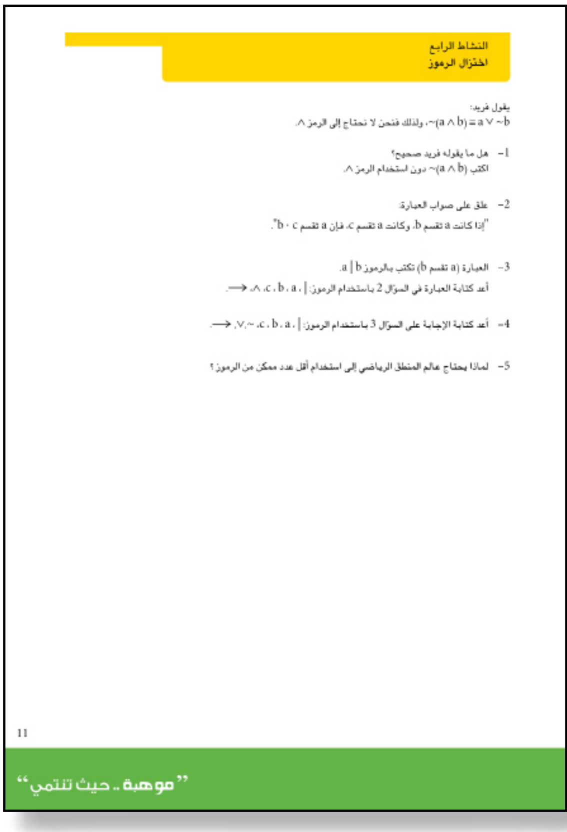
في هذه السؤال، يمكن للطلاب الحصول على الإجابة النهائية من خلال التحرك خطوة خطوة إلى الوراء باستعمال الجدول للتوصل إلى صيغة العبارة.

فرص التقويم

يتيح السؤالان الثالث والرابع للطلاب فرصة إظهار قدرتهم على استعمال الرموز الرياضية الجديدة، في حين تشير اجاباتهم على السؤالين الخامس والسادس إلى مدى قدرتهم على إيجاد استراتيجيات ناجحة لحل المسائل.

هل يستطيع الطلاب تطبيق روابط جديدة بوضوح وفهم؟

هل الطلاب قادرون على العمل بصورة منهجية في حل المسألة؟ وهل يظهر ذلك من خلال كتاباتهم وتعابيرهم اللفظية؟



النشاط الرابع
اختزال الرموز

يقول فريد:
$\sim(a \wedge b) = a \vee \sim b$، ولذلك فنحن لا نحتاج إلى الرمز $\wedge$.

1- هل ما يقوله فريد صحيح؟
اكتب $\sim(a \wedge b)$ دون استخدام الرمز $\wedge$.

2- علق على صواب العبارة:
"إذا كانت a تقسم b، وكانت a تقسم c، فإن a تقسم $b \cdot c$".

3- العبارة (a تقسم b) تكتب بالرموز $a \mid b$.
أعد كتابة العبارة في السؤال 2 باستخدام الرموز: $\mid$ ، a ، b ، c، $\wedge$، $\longrightarrow$.

4- أعد كتابة الإجابة على السؤال 3 باستخدام الرموز: $\mid$ ، a ، b ، c، $\sim$، $\vee$، $\longrightarrow$.

5- لماذا يحتاج عالم المنطق الرياضي إلى استخدام أقل عدد ممكن من الرموز؟

11

"موهبة .. حيث تنتمي"

حول هذا النشاط

يتطلب هذا النشاط من طلاب المنهاج الإضافي المتقدم الارتقاء بمعرفتهم عن استعمال الرموز في الرياضيات – بما يشمل دراسة النوحي التي قد تكون مجرد ملائمة أو اعتيادية.

خصائص الأداء المتقدم

- قدرة قوية على الاستدلال الرياضي عند محاولة تبسيط العبارات المنطقية
- امتلاك قدرات فوق معرفية (الوعي بالتفكير الذاتي والرياضيات)، والاستعداد لتبرير تفكيرك الذي أدى إلى الحل

توصيات أسلوب التدريس

سحب مجموعة الطلبة الموهوبين، والعمل المستقل، والمناقشات الجماعية

إجابات الأسئلة

السؤال الأول

فريد مخطئ أو غير مصيب. التعبير المكافئ هو

$(\sim a) \vee (\sim b)$

السؤال الثاني

هذا صحيح.

السؤال الثالث

$a \mid b \wedge a \mid c \rightarrow a \mid b \cdot c$

السؤال الرابع

$\sim(\sim(a \mid b) \vee \sim(a \mid c)) \rightarrow a \mid b \cdot c$

السؤال الخامس

تتضمن الإجابات الممكنة ما يلي:

- هي كتابة العبارة بطريقة أكثر وضوحًا وأكثر إيجازًا.
- البرهنة على إمكانية الحل.
- سهولة بيان التكافؤ.

فرص التقويم

ستوضح الإجابات على السؤال الثاني ما إذا كان الطلاب يملكون الحدس المباشر بصواب العبارات المنطقية البسيطة أم لا.
أما السؤالان الثالث والرابع فيتيحان للطلاب فرصة إظهار مدى قدرتهم على استعمال الرموز المنطقية، بما في ذلك الجديدة منها.
هل بات بإمكان الطلاب استعمال الرياضيات لتبسيط العبارات المنطقية؟
هل يستطيع الطلاب تفسير أسباب استعمال أساليب معينة بالتعبير الكتابي أو اللفظي؟

الوحدة الثانية
المجموعات والبرهان

مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع
King Abdulaziz & his Companions Foundation for Giftedness & Creativity
موهبة

نظرة عامّة

تتوسع هذه الوحدة في مواضيع نظرية المجموعات وطرائق البرهان.

وهي تحوي أمثلة تتطلب مستوى عاليًا من المثابرة، واستقلالية في التفكير، ووضوح المفاهيم.

الهدف التعلمي للوحدة

- الثقة والقدرة على استعمال طرائق متنوعة للبرهان مثل (المثال المضاد، الجدل المنطقي، أو الجدل غير المباشر).

المعرفة السابقة

المعرفة بالأفكار الأساسية لنظرية المجموعات والرموز الخاصة بها وطرق تمثيلها (أشكال فِن، جداول الصواب)، بالإضافة إلى الأساليب المختلفة للبرهان (البرهان غير المباشر، المثال المضاد، الاستدلال الاستنتاجي).

خصائص الأداء المتقدم

القيم والاتجاهات والسمات

- المثابرة أو العمل المنهجي المنظَّم (النشاطان الثاني والرابع)
- الاستقلالية (النشاط الأول)
- تحمّل حالة نقص اليقين (النشاط الثالث)

المعرفة والفهم المتقدمان

- وضوح المفاهيم (النشاط الرابع)
- فهم "الأفكار الكبرى" (الأنشطة الأول، والثاني، والثالث)

مدة تدريس الوحدة

حوالي أسبوعين، بواقع ساعتين من الجدول الدراسي الأسبوعي

المصادر

الآلة الحاسبة

معلومات عن الوحدة

الهدف التعلمي للوحدة

- الثقة والقدرة على استعمال طرائق متنوعة للبرهان مثل (المثال المضاد، الجدل المنطقي، أو الجدل غير المباشر).

النشاط الأول
إثبات عبارات بسيطة

سيساعدنا التكافؤ التالي $a \longrightarrow b \equiv \sim b \longrightarrow \sim a$ في البرهان.
في الأسئلة التالية، يكون m وn عددان صحيحان موجبان.

1- استخدم العبارة $a \longrightarrow b \equiv \sim b \longrightarrow \sim a$ لإثبات أن:
إذا كان $m + n$ عددًا زوجيًا $\longleftarrow$ m و n إما زوجيان كلاهما أو فرديان كلاهما.

2- أثبت أنه: إذا كان n^2 عدداً زوجيًا $\longleftarrow$ n عدد زوجي.

3- أثبت أنه: إذا كان n^3 عددًا فرديًا $\longleftarrow$ n عدد فردي.

النشاط الثاني
المثال المضاد

العبارات التالية جميعها خطأ.
أثبت خطأ كلٍّ منها بإعطاء مثال مضاد.

1- كل عدد صحيح يمكن كتابته على الصورة 2^n يوجد بجانبه عدد أولي يكبره بواحد أو يصغره بواحد.

2- كل عدد صحيح يمكن كتابته على الصورة $6n$ يوجد بجانبه عدد أولي يكبره بواحد أو يصغره بواحد.

3- كل عدد يمكن كتابته على الصورة $n^2 + 41n + 41$ هو عدد أولي.

4- كل عدد صحيح له عدد زوجي من العوامل، فعلى سبيل المثال، عوامل العدد 24 هي 1 و24، 2 و12، 3 و8، 4 و6 (عددها 8).

5- أكبر قيمة للزاوية الداخلية في الشكل الرباعي هي 179° (مقربة إلى أقرب عدد صحيح).

6- الفرق بين مربعي عددين صحيحين مختلفين يكون دائماً أكبر من الفرق بين العددين الصحيحين.

7- ضمن كل 1000 عدد، (مثل 1000 و1999) يوجد عدد مربع (مربع كامل)واحد على الأقل.

8- يوجد عدد أولي واحد على الأقل في كل عقد من السنوات (مثلاً: العقد 30–39 يضم السنوات 31 و37).

13

"موهبة .. حيث تنتمي"

حول هذا النشاط

يعزز هذا النشاط دراسة البراهين، ويجب تجريبه مع طلاب المنهاج الإضافي المتقدم في مجموعات منفصلة وذلك لتشجيعهم على العمل باستقلالية (مع استمرار تقديم المساعدة لهم عند الضرورة).

خصائص الأداء المتقدم

- القدرة على فهم البرهان ومن ثم إنشائه باستعمال خصائص الأعداد وتأثيرها في الحسابات
- الاستقلالية في اتخاذ القرارات، والقدرة على تبرير خطوات التفكير، والعمل عبر استعمال الدلائل

توصيات أسلوب التدريس

سحب مجموعة الطلبة الموهوبين، والمناقشات الجماعية

إجابات الأسئلة

السؤال الأول

~(m و n إما كلاهما زوجي أو كلاهما فردي)

$\Leftarrow$ m فردي وَ n زوجي أو m زوجي وَ n فردي

$\Leftarrow$ $(m + n)$ فردي

$\Leftarrow$ $(m + n)$ فردي

لذا، إذا كان $(m + n)$ زوجيًا $\Leftarrow$ m و n كلاهما زوجي أو كلاهما فردي

السؤال الثاني

~(n زوجي) $\longleftarrow$ n فردي

$\longleftarrow$ $n = 2p + 1$ لعدد صحيح p

$\longleftarrow$ $n^2 = (2p + 1)^2 = 4p^2 + 4p + 1$

$\longleftarrow$ n^2 فردي

$\longleftarrow$ ~(n^2 فردي)

لذلك n^2 زوجي $\longleftarrow$ n فردي

السؤال الثالث

~(n فردي) $\longleftarrow$ n زوجي

$\longleftarrow$ $n = 2p$ لعدد صحيح p

$\longleftarrow$ $n^3 = 8p^3$

$\longleftarrow$ n^3 زوجي

$\longleftarrow$ ~(n^3 فردي)

لذلك n^3 فردي $\longleftarrow$ n فردي

فرص التقويم

تشير إجابات الطلاب على الأسئلة السابقة إلى مدى قدرتهم على معالجة البرهان الشكلي خطوة خطوة، وكذلك قدرتهم على مواصلة الجدل المنطقي حتى التوصل إلى النتيجة النهائية.

هل أظهر الطلاب فهمًا لكيفية عمل البرهان؟ وهل استطاعوا تتبع خطوات البرهان بسهولة؟

هل يحاول الطلاب التوصل إلى الحلول باستقلالية عن المعلم قبل طلب المساعدة منه أو من أقرانهم؟

معلومات عن الوحدة

الهدف التعليمي للوحدة

- الثقة والقدرة على استعمال طرائق متنوعة للبرهان مثل (المثال المضاد، الجدل المنطقي، أو الجدل غير المباشر).

النشاط الأول
إثبات عبارات بسيطة

سيساعدنا التكافؤ التالي $a \Longrightarrow b \equiv \sim b \Longrightarrow \sim a$ في البرهان.
في الأسئلة التالية، يكون m وn عددان صحيحان موجبان.

1- استخدم العبارة $a \Longrightarrow b \equiv \sim b \Longrightarrow \sim a$ لإثبات أن:
إذا كان $m + n$ عددًا زوجيًا $\Longleftarrow$ m و n إما زوجيان كلاهما أو فرديان كلاهما.

2- أثبت أنه: إذا كان n^2 عدداً زوجيًا $\Longleftarrow$ n عدد زوجي.

3- أثبت أنه: إذا كان n^3 عددًا فرديًا $\Longleftarrow$ n عدد فردي.

النشاط الثاني
المثال المضاد

العبارات التالية جميعها خطأ.
أثبت خطأ كلٍ منها بإعطاء مثال مضاد.

1- كل عدد صحيح يمكن كتابته على الصورة 2^n يوجد بجانبه عدد أولي يكبره بواحد أو يصغره بواحد.

2- كل عدد صحيح يمكن كتابته على الصورة 6n يوجد بجانبه عدد أولي يكبره بواحد أو يصغره بواحد.

3- كل عدد يمكن كتابته على الصورة $n^2 + 41n + 41$ هو عدد أولي.

4- كل عدد صحيح له عدد زوجي من العوامل، فعلى سبيل المثال، عوامل العدد 24 هي 1 و24، 2 و12، 3 و8، 4 و6 (عددها 8).

5- أعلى قيمة للزاوية الداخلية في الشكل الرباعي هي $179°$ (مقربة إلى أقرب عدد صحيح).

6- الفرق بين مربعي عددين صحيحين مختلفين يكون دائماً أكبر من الفرق بين العددين الصحيحين.

7- ضمن كل 1000 عدد، (مثل 1000 و1999) يوجد عدد مربع واحد على الأقل.

8- يوجد عدد أولي واحد على الأقل في كل عقد من السنوات (مثلاً: العقد 30–39 يضم السنوات 31 و37).

13

"موهبة .. حيث تنتمي"

حول هذا النشاط

لقد صممت أسئلة النشاط حسب تدرج صعوبتها، لذلك نلاحظ أن بعض الأسئلة الأولى يسهل حلها بواسطة الطلاب غير المشاركين في مجموعات المنهاج الإضافي المتقدم. ومع ذلك، فإن الغرض من النشاط هو تعزيز أداء طلاب المنهاج الإضافي المتقدم أثناء قيام الطلاب الآخرين بأداء مهام أخرى. ومن المفترض أن الطلاب يدركون مبدأ المثال المضاد من خلال دراستهم للمنهاج الأساسي، لذا يمكنهم العمل باستقلالية عند محاولة التوصل إلى تلك الأمثلة. وقد يلجأ بعض الطلاب إلى أسلوب التجريب والتحسين لإثبات بعض العبارات، ويجب على المعلم ملاحظة الأوقات التي يحتاج فيها الطلاب إلى "تجريب الإجابات" ويتوقفون عن تذكّر ما تعلموه من خبراتهم السابقة.

خصائص الأداء المتقدم

- القدرة على فهم البرهان، ومن ثم إنشائه باستخدام الأمثلة المضادة
- المثابرة لتخطي العوائق في حالة عدم صحة الإجابة النهائية، أو عدم التوصل إلى الإجابة النهائية المقبولة

توصيات أسلوب التدريس

العمل الفردي والعمل في مجموعات والمناقشة الصفية

إجابات الأسئلة

السؤال الأول

$n = 6$ تعطي النتيجة 64، وكلا العددان 63 و65 ليسا أوليين.

السؤال الثاني

أول عدد لا تنطبق عليه القاعدة هو $n = 20$ (حيث أن 119 يقبل القسمة على 7، و 121 يقبل القسمة على 11).

السؤال الثالث

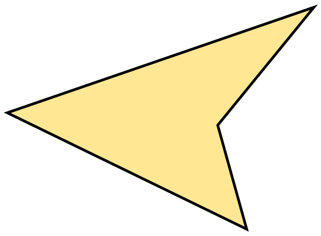
أحد الاستثناءات هو عندما $n = 41$ حيث تعطي العبارة النتيجة 41×83.

السؤال الرابع

هذا ينطبق على كل الأعداد غير المربعة، ولكن كل الأعداد المربعة لها عدد فردي من العوامل، على سبيل المثال عوامل 9 هي 1، 3، 9.

السؤال الخامس

هذا ينطبق على الأشكال الرباعية المحدبة كلها، لكنه لا ينطبق على المقعر منها. مثال:



السؤال السادس

إذا كان أحد العددين الصحيحين سالباً، والفرق بين القيمة المطلقة لكل منها يساوي 1 ، فإن الفرق بينهما هو الفرق نفسه بين مربعيهما.

فعلى سبيل المثال:

-4 و 5	الفرق بينهما = 9
$(-4)^2$ و 5^2	الفرق بينهما = 9

يمكن متابعة ذلك بطرح السؤال: هل تنطبق هذه العلاقة دائماً، ثم محاولة تفسير السبب.

السؤال السابع

على الرغم من وجود أمثلة أقل من المليون، إلاّ أن العدد الذي يسهل إيجاده وفهمه هو الواقع بين مربع 1000 ومربع 999.

مربع 1000 يساوي 1000000

مربع 999 يساوي 998001

لذا لا يوجد مربع كامل بين العددين 999000 و999999.

السؤال الثامن

يتطلب هذا السؤال قليلاً من البحث، قد يعدّ الطلاب المبدعون قائمة بالأعداد الأولية من الإنترنت.

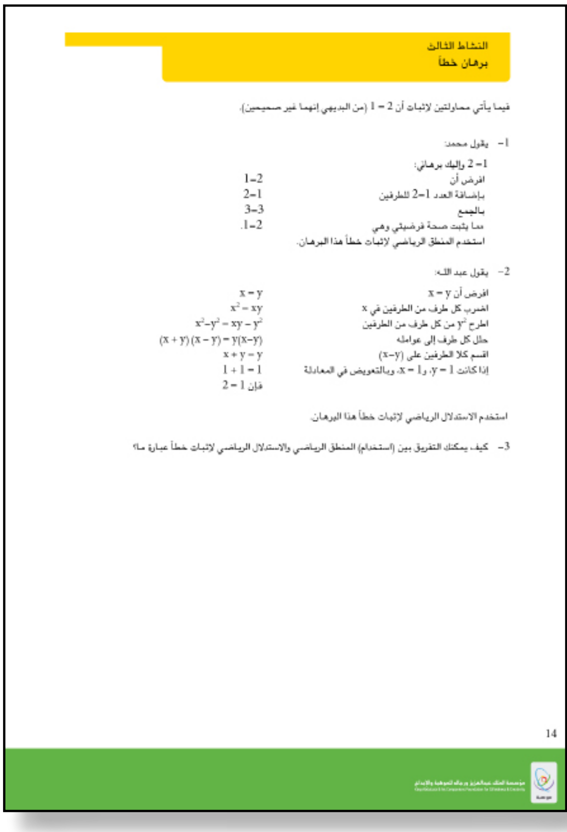
إن أصغر عقد لا يحتوي أعدادًا أولية هو 330-320. وتقبل الأعداد الزوجية القسمة على 2، أما العددان 321 و 327 فيقبلان القسمة على 3، في حين يقبل العدد 323 القسمة على 19 و 17 ويقبل 325 القسمة على 5 ويقبل 329 القسمة على 47 و 7.

فرص التقويم

يسمح كل سؤال من هذه الأسئلة بإظهار قدرة الطلاب على إيجاد حالات مناسبة لتكون أمثلة مضادة، دون الحاجة إلى استعمال أسلوب معين للتوصل إليها. وبذلك فإن التقويم يعتمد على الطريقة المستعملة. وقد تحتاج بعض الأمثلة من الطلبة تفكيراً تحليلياً أو بنائيًا، مثلاً في السؤال 3 حيث يكون هذا التفكير مطلوباً لمعرفة أن $n = 41$ تضْمن أن 41 هو أحد العوامل. أما الأسئلة الأخرى، مثل السؤال 8، فتدل على المثابرة للتوصل إلى حل.

هل يمكن للطلاب النظر إلى البرهان من عدة زوايا وإثباته باستعمال المثال المضاد؟

هل يحاول الطلاب استعمال التجربة والخطأ في عملهم للتوصل إلى البرهان؟


النشاط الثالث
برهان خطأ

فيما يأتي محاولتين لإثبات أن 2 = 1 (من البديهي إنهما غير صحيحين).

1- يقول محمد:
2 = 1 وإليك برهاني:
افرض أن 1 = 2
بإضافة العدد 1=2 للطرفين 2 = 1
بالجمع 3 = 3
مما يثبت صحة فرضيتي وهي 1 = 2.
استخدم المنطق الرياضي لإثبات خطأ هذا البرهان.

2- يقول عبد الله:
افرض أن $x = y$ | $x = y$
اضرب كل طرف من الطرفين في x | $x^2 = xy$
اطرح y^2 من كل طرف من الطرفين | $x^2-y^2 = xy - y^2$
حلل كل طرف إلى عوامله | $(x + y)(x - y) = y(x-y)$
اقسم كلا الطرفين على $(x-y)$ | $x + y = y$
إذا كانت $y = 1$، و$x = 1$، وبالتعويض في المعادلة | $1 + 1 = 1$
فإن $2 = 1$

استخدم الاستدلال الرياضي لإثبات خطأ هذا البرهان.

3- كيف يمكنك التفريق بين (استخدام) المنطق الرياضي والاستدلال الرياضي لإثبات خطأ عبارة ما؟

14

حول هذا النشاط

يتضمن هذا النشاط برهانين خطأ معروفين، حيث يوضحان طرائق مختلفة لإثبات أن البرهان خطأ. ومن المرجح أن يثير هذا النشاط النقاش بين الطلاب، لذا يقوم طلاب موهبة بتنفيذه بشكل مستقل عن بقية الطلاب.

خصائص الأداء المتقدم

- القدرة على فهم البرهان، ومن ثم إنشاء برهان من البراهين الخطأ باستعمال المنطق الرياضي
- القدرة على تقبل عدم اليقين في خطوات الحل ونتائجه، والسعي للعمل على البرهان خطوة بخطوة

توصيات أسلوب التدريس

سحب مجموعة الطلبة الموهوبين، والمناقشات الجماعية.

إجابات الأسئلة

السؤال الأول

يعتمد "الجدل" الأول على الجدل بأنه إذا نتجت B من A، وكانت B صحيحة، فإن A صحيحة. الخطوات في البرهان مقبولة، ولكن المغالطة تكمن في الهيكل الإجمالي للجدل نفسه، حيث تعرف هذه المغالطة باسم "الخطأ العكسي" .

إحدى الطرائق الأخرى لتناول هذا السؤال هي استعمال جدول الصواب، حيث A هي الفرض أن $2 = 1$ ، وَ B هي ناتج العبارة $3 = 3$.

A	B	A → B
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

شروط صواب العبارة B تتضمن حالتين، هما عندما تكون A صحيحة أو عندما تكون خطأ، وفي هذه الحالة تكون A خطأ.

السؤال الثاني

لهذا الجدل هيكل إجمالي سليم، إلا في خطوة واحدة تشتمل على قانون رياضي، حيث تتضمن الخطوة قسمة كل طرف على ’x - y، وحيث أن x معرفة على أنها تساوي y، فهذا يعني أننا قسمنا على الصفر، وهذا مستحيل.

السؤال الثالث

يهدف هذا السؤال إلى جعل الطلاب يتفكرون في مختلف طرائق الاستدلال، إذ توجد إجابتان صحيحتان على الأقل.

الإجابة الأولى تستعمل المنطق الرياضي (كما في الحالة الأولى) لإثبات أن بنية الجدل خطأ. في حين تستعمل الثانية الاستدلال الرياضي (كما في الحالة الثانية) لتحديد خطوة خطأ رياضيًا.

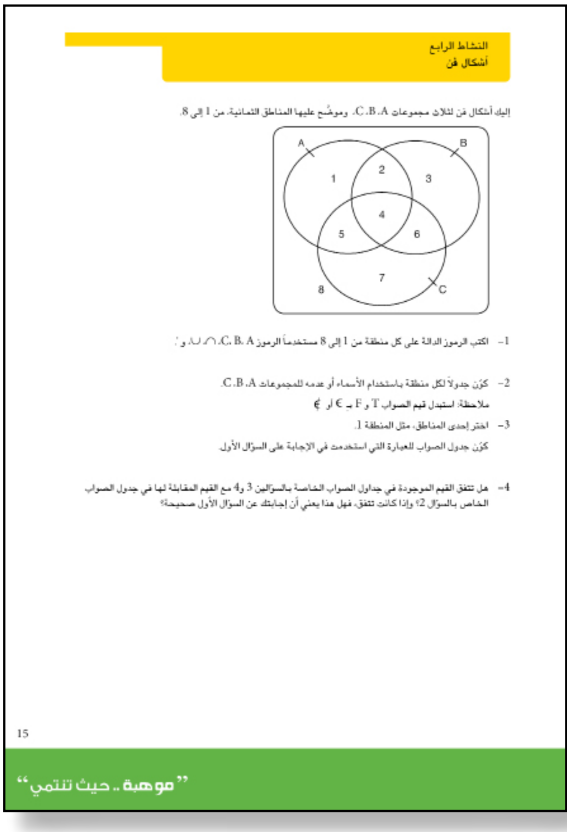
ولكن، توجد إجابة صحيحة أخرى هي القول إن المنطق الرياضي جزء من الرياضيات، لذا فإن كلتي الحالتين مثال على استعمال الاستدلال الرياضي لإثبات خطأ الجدل.

فرص التقويم

تبيِّن الإجابات الصحيحة على السؤال الأول أن الطلاب لديهم إدراك واضح (وربما حدسي) بأن الهيكل الإجمالي لجدل ما قد ينطوي على مغالطة. وبالمثل، فإن الإجابة على السؤال الثاني تشير إلى مدى قدرة الطلاب على الانتباه الدقيق للتفاصيل في كل خطوة للكشف عن انطواء الجدل على قانون رياضي دقيق، ولكنه حاسم.

هل يطبق الطلاب المنطق عند إيجاد طريقة لإثبات خطأ برهان ما؟

هل اتبع الطلاب أسلوب استقصاء ثابت في جميع خطوات التوصل إلى الحل؟ وهل استطاعوا تطبيق معارفهم الرياضية بطريقة صحيحة؟


النشاط الرابع
أشكال فن

إليك أشكال فن لثلاث مجموعات A، B، C، وموضّح عليها المناطق الثمانية، من 1 إلى 8.

1- اكتب الرموز الدالة على كل منطقة من 1 إلى 8 مستخدماً الرموز A، B، C، ∩، ∪، و '.

2- كوِّن جدولاً لكل منطقة باستخدام الأسماء أو عدمه للمجموعات A، B، C.
ملاحظة: استبدل قيم الصواب T و F بـ ∈ أو ∉

3- اختر إحدى المناطق، مثل المنطقة 1.
كوِّن جدول الصواب للعبارة التي استخدمت في الإجابة على السؤال الأول.

4- هل تتفق القيم الموجودة في جداول الصواب الخاصة بالسؤالين 3 و4 مع القيم المقابلة لها في جدول الصواب الخاص بالسؤال 2؟ وإذا كانت تتفق، فهل هذا يعني أن إجابتك عن السؤال الأول صحيحة؟

15

"موهبة .. حيث تنتمي"

حول هذا النشاط

ينظر هذا النشاط إلى أشكال فِن الأكثر تعقيداً، من حيث استعمال رموز المجموعة والانتماء إلى مجموعات مختلفة. ومن المرجح أن يحتاج الطلاب إلى الدعم لمساعدتهم على معرفة المطلوب، لذا يجب تنفيذ هذا النشاط ضمن مجموعات الطلبة الموهوبين. ومن المفيد أن ينسخ الطلبة الأشكال البيانية وتظليل بعض الأجزاء لمعرفة ما الذي تشير إليه الأسئلة. كما يمكن للمعلم إجراء تكرار وجيز لتذكير الطلاب بالرموز المتعلقة بالمجموعات.

خصائص الأداء المتقدم

- امتلاك الوضوح المفاهيمي فيما يتعلق بالمجموعات واستعمال الرموز للتعبير عن العلاقات
- اتباع أسلوب منهجي منظم في تناول المسائل عبر الاستعمال الثابت للرموز والقواعد الرياضية السليمة عند تطبيقها على المجموعات

توصيات أسلوب التدريس

سحب مجموعة الطلبة الموهوبين، والمناقشات الجماعية

إجابات الأسئلة

السؤال الأول

1 هي $A \cap (\overline{B \cup C})$

2 هي $B \cap A \cap \overline{C}$

3 هي $B \cap (\overline{A \cup C})$

4 هي $A \cap B \cap C$

5 هي $A \cap C \cap \overline{B}$

6 هي $B \cap C \cap \overline{A}$

7 هي $C \cap (\overline{B \cup A})$

8 هي $(\overline{A \cup B \cup C})$

قد يختلف ترتيب الرموز، فمثلاً يمكن إجابة الفرع الثامن من السؤال الأول كما يلي: $(\overline{B \cup C \cup A})$

السؤال الثاني

أول عدد لا تنطبق عليه القاعدة هو $n = 20$ (حيث أن 119 يقبل القسمة على 7 و121 يقبل القسمة على 11).

A	B	C	1	2	3	4	5	6	7	8
$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$
$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$

فرص التقويم

تعكس إجابات الطلاب على السؤال الأول مدى فهمهم للرموز النظرية للمجموعات وقدرتهم على استعمالها في وصف مناطق مختلفة في أشكال فِن. أما الإجابة على السؤال الثاني فستبين مدى التزامهم بأسلوب منهجي منظم في تغطية كل الاحتمالات الممكنة ومدى قدرتهم على توخي الدقة في التفاصيل. ويتيح السؤالان الثالث والرابع فرصة للطلاب كي يوضحوا إذا كان بإمكانهم تمثيل نواحي أشكال فِن بدقة في جداول الصواب.

هل يمثل الطلاب العلاقات المستمدة من أشكال فِن بوضوح وباستعمال الرموز الصحيحة؟

هل الطلاب مستقوق وملتزمون بأسلوب منهجي منظم في جميع خطوات حل المسألة؟

السؤال الثالث

مثلاً، في المنطقة 1، إذا كانت الإجابة هي:

$A \cap (\overline{B \cup C})$ فيمكن تكوين جدول الصواب التالي لهما:

A	B	C	$B \cup C$	$\overline{B \cup C}$	$A \cap \overline{B \cup C}$
T	T	T	T	F	F
T	T	F	T	F	F
T	F	T	T	F	F
T	F	F	F	T	T
F	T	T	T	F	F
F	T	F	T	F	F
F	F	T	T	F	F
F	F	F	F	T	F

السؤال الرابع

يجب أن تتناظر الجداول، أي يجب أن يتطابق النمطان T وF في السؤال الثالث مع النمطان $\in$ و $\notin$ في السؤال الثاني.

ويعتبر هذا التناظر دليلاً قوياً على صحة الاثنين، ولكن يوجد أيضًا احتمال أن الاثنين خطأ، رغم تطابقهما، وبالتالي فإن التناظر لا يعتبر دليلاً قاطعاً على صحة الإجابة.

الوحدة الثالثة

المستقيمات المتوازية

نظرة عامّة

تثري هذه الوحدة مضمون المنهاج الأساسي في مجال المستقيمات المتوازية من خلال استكشاف بعض خصائصها في الأشكال والمستوى الإحداثي.

الأهداف التعلمية للوحدة

- توسيع فهم المستقيمات المتوازية
- زيادة الإدراك بالمستقيمات المتوازية في الأشكال الهندسية
- القدرة على استعمال الفرق في الإحداثيات لحساب المسافات

المعرفة السابقة

- معرفة خصائص المستقيمات المتوازية بما في ذلك نظريات الزوايا المرتبطة بالتوازي
- معرفة المستقيمات المتوازية في المستوى الاحداثي
- معرفة نظرية فيثاغورس

خصائص الأداء المتقدم

القيم والاتجاهات والسمات

- المرونة (النشاط الثاني)
- الاستقصاء (النشاطان الأول، والثاني)

المهارات المتقدمة

- القدرات فوق المعرفية (النشاط الرابع)
- تكوين الصور الذهنية (النشاط الثالث)

المعرفة والفهم المتقدمان

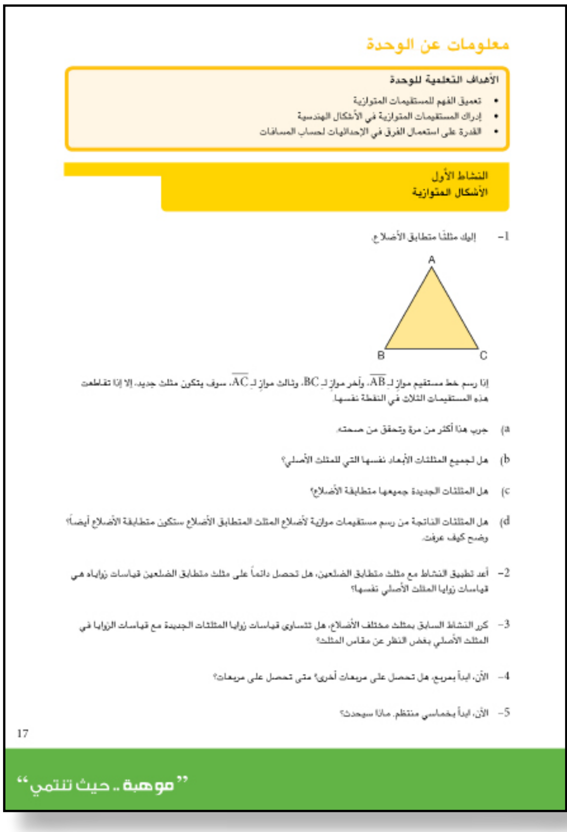
- الربط بين مختلف مجالات الرياضيات (النشاط الثالث)
- الفهم المتعمق للبنية الرياضية الأساسية (النشاط الأول)
- فهم "الأفكار الكبرى" (النشاط الرابع)

مدة تدريس الوحدة

أسبوعان، بواقع ساعتين من الجدول الدراسي الأسبوعي

المصادر

ورق رسم بياني، أوراق للمسودات، مساطر ومناقل



معلومات عن الوحدة

الأهداف التعلمية للوحدة

- تعميق الفهم للمستقيمات المتوازية
- إدراك المستقيمات المتوازية في الأشكال الهندسية
- القدرة على استعمال الفرق في الإحداثيات لحساب المسافات

النشاط الأول
الأشكال المتوازية

1- إليك مثلثًا متطابق الأضلاع.

إذا رسم خط مستقيم موازٍ لـ $\overline{AB}$، وآخر موازٍ لـ BC، وثالث موازٍ لـ $\overline{AC}$، سوف يتكون مثلث جديد، إلا إذا تقاطعت هذه المستقيمات الثلاث في النقطة نفسها.

a) جرب هذا أكثر من مرة وتحقق من صحته.

b) هل لجميع المثلثات الأبعاد نفسها التي للمثلث الأصلي؟

c) هل المثلثات الجديدة جميعها متطابقة الأضلاع؟

d) هل المثلثات الناتجة من رسم مستقيمات موازية لأضلاع المثلث المتطابق الأضلاع ستكون متطابقة الأضلاع أيضاً؟ وضح كيف عرفت.

2- أعد تطبيق النشاط مع مثلث متطابق الضلعين، هل تحصل دائماً على مثلث متطابق الضلعين قياسات زواياه هي قياسات زوايا المثلث الأصلي نفسها؟

3- كرر النشاط السابق بمثلث مختلف الأضلاع، هل تتساوى قياسات زوايا المثلثات الجديدة مع قياسات الزوايا في المثلث الأصلي بغض النظر عن مقاس المثلث؟

4- الآن، ابدأ بمربع، هل تحصل على مربعات أخرى؟ متى تحصل على مربعات؟

5- الآن، ابدأ بخماسي منتظم. ماذا سيحدث؟

17

"موهبة .. حيث تنتمي"

حول هذا النشاط

هذا نشاط استكشافي يوسع دراسة المستقيمات المتوازية من خلال النظر في تأثيرها على الأشكال الهندسية. والنقطة الرئيسة المطلوب استيعابها في هذا الاستقصاء هي أن العلاقات بين الزوايا تظل ثابتة عند رسم المتوازيات. ونتيجة لذلك يحافظ المثلث على شكله (الزوايا تحدد الشكل) فيما لا تتوافر هذه الخاصية في بقية الأشكال، فقد يصبح المربع مستطيلاً (والذي تتساوى زواياه مع زوايا المربع) والأشكال التي بها زوايا أكثر يمكن أن تتحول إلى خليط من المستقيمات.

قد يكون من المهم التذكير بخصائص الأشكال ثنائية الأبعاد.

قد يرتبك بعض الطلاب عند الإجابة على أسئلة هذا النشاط بسبب طبيعة الاستقصاء، حيث أنه مفتوح ويفتقد إلى توجيهات محددة حول المطلوب. ولذا يجب تشجيع الطلاب على استخدام الورق الإضافي لرسم مسودات بالأشكال التقريبية، مع توخي الدقة والتنظيم في كتابة الإجابات النهائية ونسخ الأمثلة من المسودات.

خصائص الأداء المتقدم

- الفهم المتعمق للبنية الرياضية الأساسية فيما يخص الأشكال الهندسية والمستقيمات المتوازية
- اتباع أسلوب الاستقصاء عند نمذجة المسألة وحلها

توصيات أسلوب التدريس

المناقشة الصفية بعد العمل الفردي لفترة من الوقت

إجابات الأسئلة

السؤال الأول

a) هذا صحيح.

b) لا. المقاس مختلف.

C) نعم، ستكون متطابقة الأضلاع (عند رسمها بدقة).

d) نعم، لأنه يتم حفظ العلاقات بين الزوايا في المستقيمات المتوازية، وبالتالي فإن المثلث الجديد سيكون شبيهاً بالأصلي.

السؤالان الثاني والثالث

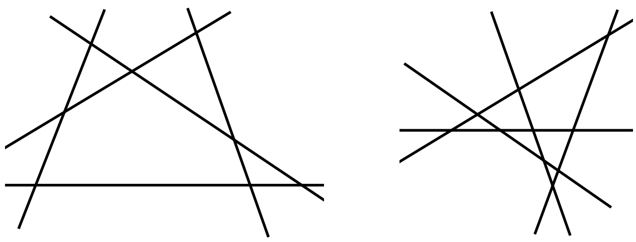
نعم، ينتج دائمًا مثلث مشابه للمثلث الأصلي. (وللسبب نفسه.)

السؤال الرابع

إذا ظلت المستقيمات المتوازية متباينة فيما بينها، فإن الشكل الناتج سيكون مستطيلاً. أما إذا كانت المسافة بين المستقيمات المتوازية الجديدة متساوية لكل مستقيمين فإن الشكل الناتج سيكون مربعًا.

السؤال الخامس

سنحصل على خماسي منتظم فقط في حالة كون المستقيمات الجديدة ناتجة من تحويلات هندسية متطابقة لأضلاع الخماسي الأصلي (أي الإزاحة أو التمدد). وخلافًا لذلك ستكون الأنماط في النواتج أقل وضوحًا. ومهما كانت طريقة العمل، فإن أربعة من المستقيمات الجديدة ستكوّن شكلاً رباعيًا في مكان ما، وإذا قطعها المستقيم بحيث تقع ثلاثة رؤوس على جانب واحد، فإننا نحصل على شكل خماسي. وكثيراً ما تُكوِّن المستقيمات المتوازية تشكيلة من المثلثات والأشكال الرباعية.

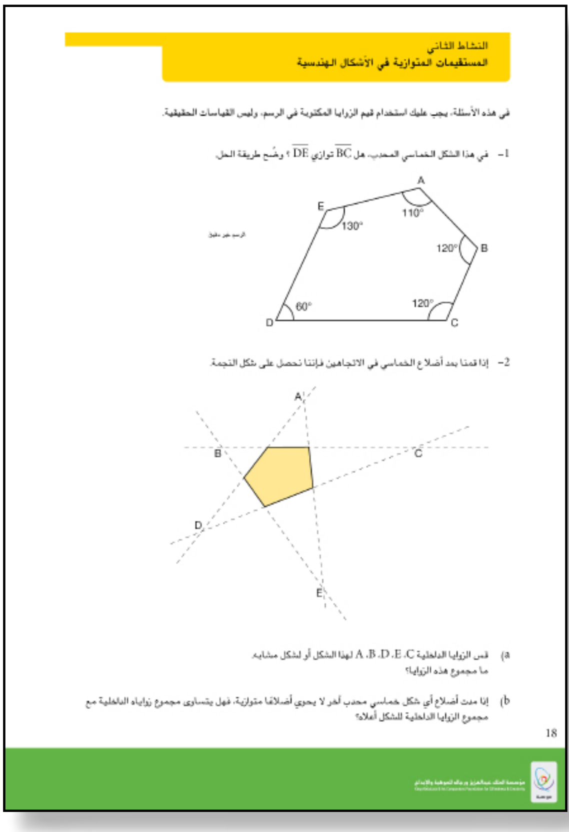


فرص التقويم

ستكشف إجابات الطلاب على السؤالين الرابع والخامس عن قدرتهم على التعامل مع الاستقصاء الرياضي، وينجحون فيه ويتمتعون به، حيث يحتاجون في هذا الاستقصاء إلى تنظيم عملهم والاختيار بين الخطوات البديلة.

هل يستخدم الطلاب خصائص الأشكال الهندسية والمستقيمات المتوازية بوضوح لنمذجة المسألة وإيجاد الحلول؟

هل يستخدم الطلاب أسئلة على غرار " ماذا لو" في نقاشاتهم؟


النشاط الثاني
المستقيمات المتوازية في الأشكال الهندسية

في هذه الأسئلة، يجب عليك استخدام قيم الزوايا المكتوبة في الرسم، وليس القياسات الحقيقية.

1- في هذا الشكل الخماسي المحدب، هل $\overline{BC}$ توازي $\overline{DE}$ ؟ وضّح طريقة الحل.

2- إذا قمنا بمد أضلاع الخماسي في الاتجاهين فإننا نحصل على شكل النجمة.

a) قس الزوايا الداخلية A ،B ،D ،E ،C لهذا الشكل أو لشكل مشابه.
ما مجموع هذه الزوايا؟

b) إذا مدت أضلاع أي شكل خماسي محدب آخر لا يحوي أضلاعًا متوازية، فهل يتساوى مجموع زواياه الداخلية مع مجموع الزوايا الداخلية للشكل أعلاه؟

18

حول هذا النشاط

يمكن الاستفادة من هذا النشاط في توسيع نطاق التمارين الخاصة بالزاويا والمستقيمات المتوازية. وقد يحتاج الطلاب إلى ملخص سريع لتذكيرهم بخصائص الزوايا المتبادلة والمتناظرة. وتستدعي الأسئلة من الطلابِ الشرح أو البيان، بما يستوعب إحتمال أن بعضًا منهم يفضِّل إيجاد قياسات الزوايا باستعمال الأشكال الهندسية، في حين يفضل آخرون الشرح بالكلمات. وكلا الأسلوبين صحيح.

يتضمن السؤال الثاني فرع b وَ d استكشاف حالات مختلفة للتوصل إلى تعميمات رياضية. والسؤال الذي يبرر في هذه المواقف هو: ما عدد الحالات الذي يكفي للتوصل إلى تعميمات؟ وهو سؤال لا تسهل الإجابة عليه. ففي الغرف الصفية عادة ما تكون الإجابة: أكبر عدد ممكن خلال مدة الحصة، ولكن يمكن مواصلة النشاط خارج غرفة الصف وبالتالي لا يظل السؤال عالقاً. والجواب التقريبي هو: القدر الضروري للتأكد من صحة التعميم، ولكن بعض الطلاب وعلماء الرياضيات لا يصلون أبداً إلى حالة اليقين، ويواصلون المحاولات إلى ما لا نهاية.

خصائص الأداء المتقدم

- اتباع اسلوب الاستقصاء بعقلية منفتحة والتساؤل دائماً عن وجود نماذج مختلفة للمسألة
- المرونة في المنهجية والاستفادة من حلول الطلاب الآخرين لتحسين الحل الذي تمت التوصل إليه

توصيات أسلوب التدريس

العمل المستقل أولاً، ثم إجراء نقاش في الصف بأكمله.

إجابات الأسئلة

السؤال الأول

نعم ، هما متوازيين. إحدى طرق الحل هي أن الزوايا الداخلية المتتالية عند C وD متكاملتان، وبالتالي فإن BC وDE متوازيان.

السؤال الثاني

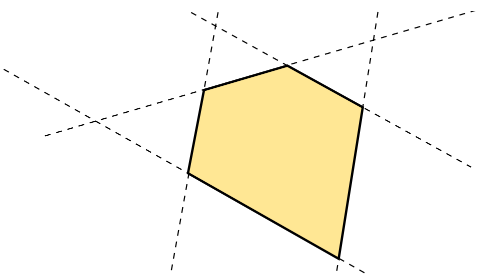
a) مجموع قياسات الزوايا يساوي 180 درجة.

b) نعم، مجموعها 180 درجة دائماً عند تكوين شكل النجمة.

قد يحاول بعض الطلاب حل السؤال بإعطاء رمز لكل زاوية من الزوايا الداخلية الخمس. ولكن لا يمكن استعمال الشكل السداسي المحدب، لأن مد أضلاعه يعطي شكلاً مختلفًا.

c) هناك 4 نقاط، ومجموع الزوايا عندها هو 180 درجة (لدينا عدد أقل من الزوايا بسبب عدم تلاقي المستقيمات المتوازية).

d) نعم، دائماً يكون 180 درجة، حتى في حالة وجود ضلعين متوازيين في الشكل الخماسي (وثلاث نقاط فقط لتلاقي الأضلاع) كما في الشكل أدناه.



وعليه، فإن تحديد مجموع الزوايا الداخلية الناتجة عن تقاطع امتدادات الأضلاع هي طريقة أخرى لإثبات أن الخماسي يحوي أضلاعًا متوازية.

السؤال الثالث

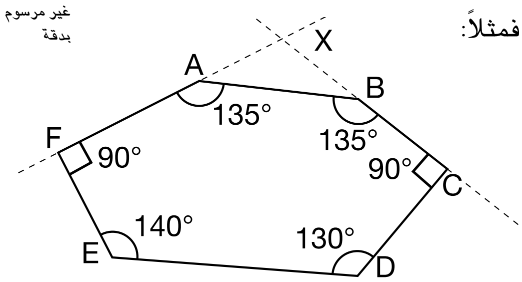
a) لا   b) نعم   c) نعم

هذا لأن $\overline{AF}$ توازي $\overline{CD}$، وكذلك $\overline{BC}$ توازي $\overline{EF}$ (قد يقول بعض الطلاب إن الأضلاع لا تبدو متوازية، وإن ذلك مجحف، على الرغم من أن الرسم يذكر أنه غير مرسوم بدقة. ومع ذلك، فإنه من المهم ألاّ يحكم الطلاب على مظهر الشكل وحده، حيث أنه قد يكون مضللاً.

ويمكن الحكم على صحة اختيار القطع المستقيمة المتوازية بثلاثة طرق مختلفة:

- حسب مقدار الدوران من ضلع إلى ضلع، حيث يقاس هذا المقدار بالزوايا.
  فمثلاً، الدوران من $\overline{BC}$ إلى $\overline{EF}$ يعادل 90 + 50 + 40 درجة، وكذلك الدوران من $\overline{CD}$ إلى $\overline{FA}$ يعادل 50 + 40 + 90 درجة. وفي كل حالة ينتج نصف دورة كاملة، مما يعني أن القطع المستقيمة متوازية. والدوران من $\overline{AB}$ إلى $\overline{DE}$ يعادل 50 + 90 + 45، أي 185 درجة، وهذا يعني أنهما غير متوازيين.
- يمكن تحديد مستقيم مستعرض بمدّ الأضلاع ثم إيجاد زوايا إضافية تساعدنا على تطبيق النظريات.

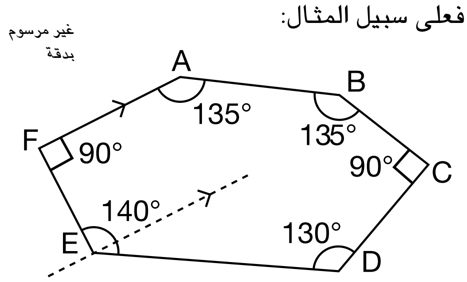
فمثلاً:



عند مَدّ $\overline{FA}$ وكذلك $\overline{CB}$ حتى يلتقيا في X، نجد أن الزاوية X تعادل 90 درجة (لأن قياس كل من الزاويتين عند A و B هو 45 درجة). لذا، يمكننا تطبيق نظرية الزوايا الداخلية المتتالية، وهي تبيِّن أن $\overline{CD}$ توازي $\overline{AF}$، وأن $\overline{BC}$ توازي $\overline{EF}$.

- برسم مستقيمات متوازية لمعرفة إذا كان مقاس الزوايا ينطبق.

فعلى سبيل المثال:



عند رسم مستقيم موازٍ لأحد الأضلاع، يمكننا جمع قيم الزوايا لمعرفة إذا كانَ موازياً للضلع المقابل. في المثال المعطى، فإن المستقيم المنقط المار بالرأس E يوازي الضلع $\overline{AF}$، وهذا يعني أن قياس الزاوية فوق هذا المستقيم عند الرأس E يجب أن يكون 90 درجة، والزاوية تحت المستقيم تساوي 50 درجة. وبما أن قياس الزاوية EDC هو 130، ومجموع 50 و130 يساوي 180، فإن المستقيم CD لا بد أن يوازي المستقيم المنقط، وبالتالي فهو موازٍ $\overline{AF}$.

فرص التقويم

يتطلب السؤال الثاني فرعa b وd من الطلاب تجريب المزيد من الامكانات التي توصلوا إليها. وهذه طريقة جديدة لتقويم استقلالية التفكير عند الطلاب. أما إجابة السؤال الثالث فتشير إلى امتلاك الطلاب طلاقة في التعامل مع الزوايا ومرونة في التفكير خلال الحل.

هل تأكد الطلاب من استكشافهم للطرق الممكنة جميعها في النموذج؟

هل يستطيع الطلاب استخدام حلول زملائهم وفهمها في أثناء المناقشة الصفية؟

حول هذا النشاط

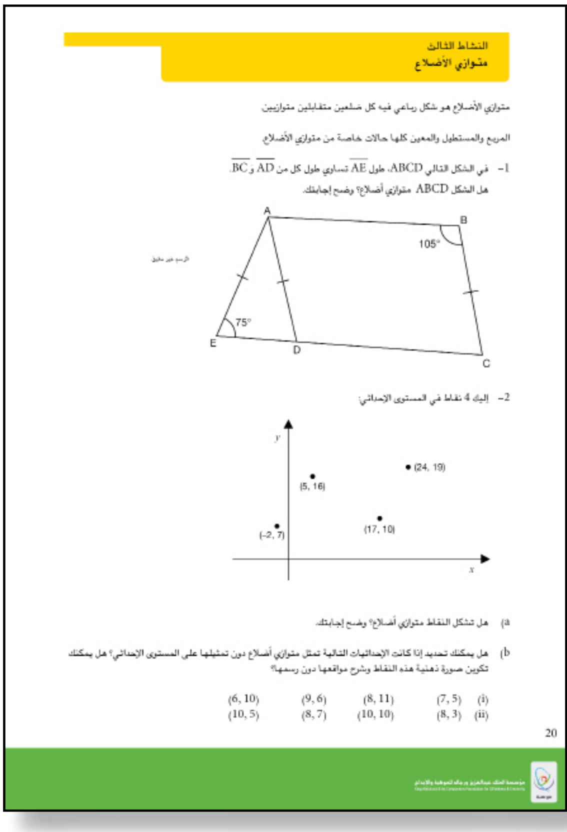
يوسع هذا النشاط مفهوم التوازي في المستوى الإحداثي من خلال عرض أسئلة متنوعة عن متوازي الأضلاع.

خصائص الأداء المتقدم

- تقدير الترابط بين مجالات الرياضيات المختلفة باستعمال العلاقات بين الأعداد وتطبيقها على المستوى الإحداثي.
- القدرة على تكوين صور ذهنية واضحة عند نمذجة المسائل، مع محاولة حلّ بعض المسائل دون رسم الأشكال البيانية.

توصيات أسلوب التدريس

العمل الفردي أولاً، يتبعه إجراء مناقشة جماعية


النشاط الثالث
متوازي الأضلاع

متوازي الأضلاع هو شكل رباعي فيه كل ضلعين متقابلين متوازيين

المربع والمستطيل والمعين كلها حالات خاصة من متوازي الأضلاع.

1- في الشكل التالي ABCD، طول $\overline{AE}$ تساوي طول كل من $\overline{AD}$ و $\overline{BC}$.
هل الشكل ABCD متوازي أضلاع؟ وضح إجابتك.

2- إليك 4 نقاط في المستوى الإحداثي:

a) هل تشكل النقاط متوازي أضلاع؟ وضح إجابتك.

b) هل يمكنك تحديد إذا كانت الإحداثيات التالية تمثل متوازي أضلاع دون تمثيلها على المستوى الإحداثي؟ هل يمكنك تكوين صورة ذهنية هذه النقاط وشرح مواقعها دون رسمها؟

(i)	(7, 5)	(8, 11)	(9, 6)	(6, 10)
(ii)	(8, 3)	(10, 10)	(8, 7)	(10, 5)

20

إجابات الأسئلة

السؤال الأول

نعم.

الزاوية ADE تساوي 75 درجة؛ لأن المثلث ADE متطابق الضلعين. قياس الزاوية ADC تساوي 105 درجة.
وبما أن هناك زاويتين متقابلتين متساويتين وضلعين متقابلين متساويين فإن الشكل متوازي أضلاع.

السؤال الثاني

a) نعم.

لأن الفرق متكافئ في الإحداثيات السينية بين كل نقطتين، وكذلك الفرق في الإحداثيات الصادية أيضًا متكافئ، فإن كل ضلعين متقابلين لهما الطول نفسه والاتجاه نفسه. وبما أن كل ضلعين متقابلين متساويان ومتوازيان فإن الشكل الناتج متوازي أضلاع.

b) (i) نعم.

عند ترتيب النقاط في مجموعات ثنائيةهكذا المجموعة الأولى $(6, 10)$ إلى $(7, 5)$، والمجموعة الثانية $(8, 11)$ إلى $(9, 6)$ لاحظ أن محور السينات زاد من 6 إلى 7 بمقدار 1 في المجموعة الأولى وكذلك من 8 إلى 9 وبمقدار 1 في المجموعة الثانية .

كذلك في محور الصادات انخفض من 10 إلى 5 وبمقدار 5 في المجموعة الأولى وكذلك انخفض من 11 إلى 6 وبمقدار 5 في المجموعة الثانية وهذا يعني أن القطعتين المستقيمتين الناتجتين عن وصل الزوجين المرتبين في كل مجموعة لهما الطول نفسه والإتجاه نفسه، وكذلك الحال في المجموعة الثالثة $(6, 10)$ إلى $(9, 11)$ والمجموعة الرابعة $(7, 5)$ إلى $(9, 6)$ لاحظ أن محور السينات زاد من 6 إلى 8 بمقدار 2 في المجموعة الثالثة ومن 7 إلى 9 وبمقدار 2 في المجموعة الرابعة.

كذلك في محور الصادات زاد من 10 الى 11 وبمقدار 1 ومن 5 إلى 6 وبمقدار 1 ، لذا فالشكل متوازي أضلاع.

(ii) لا؛ لأن الفرق بين النقطتين $(8, 3)$ إلى $(8, 7)$ يختلف عن الفرق للنقطتين $(10, 5)$ إلى $(10, 10)$ ، وكذلك فإن الفروق في النقطتين $(8, 3)$ إلى $(10, 5)$ ، يختلف عن الفرق للنقطتين $(8, 7)$ إلى $(10, 10)$

على الرغم من أن السؤال لا يستدعي رسمًا، إلا أن بعض الطلاب قد يعملون مخططًا سريعًا يساعدهم على اختيار النقاط والمقارنة بين الفروق

السؤال الثالث

a) $(32, 186)$ و$(64, -68)$ و$(-104, -92)$

b) اختر أي نقطتين ثم احسب الفروق في الإحداثيات بينهما، ثم أضف ذلك إلى إحداثيات النقطة الثالثة. فعلى سبيل المثال، بالنسبة للنقاط $(12, 3)$، $(22, 7)$ و $(34, 8)$، اختر النقطتين $(12, 3)$ و$(34, 8)$. الفرق هو +22 و+5. ثم بإضافته للنقطة $(22, 7)$ تحصل على $(44, 12)$.

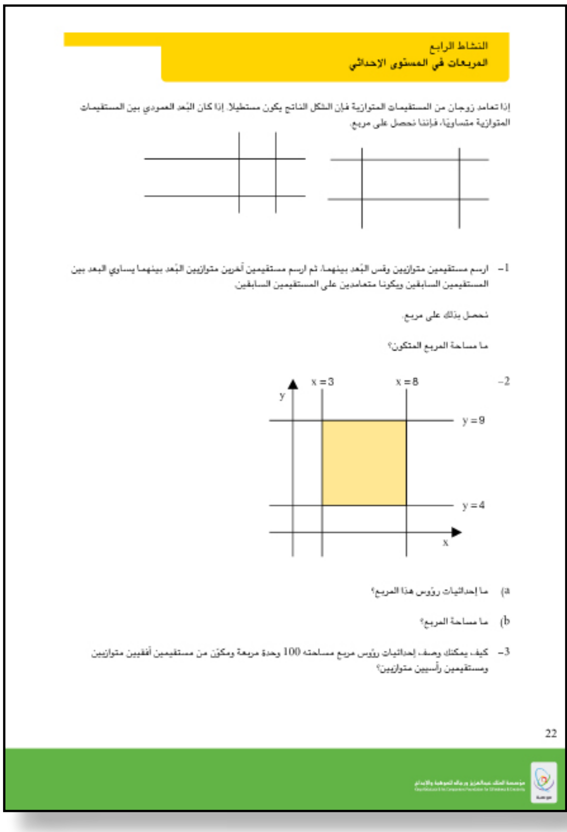
تختلف تفسيرات الطلاب، لذا ينبغي الحكم وفقاً لشروطهم ومعاييرهم.

فرص التقويم

تم اختبار القدرة على تكوين الصور الذهنية في السؤال الثاني الفرع b ، وكذلك عبر أحد الإجابات على السؤال 3 الفرع a على الأقل، والذي يبعد عن المستوى الإحداثي. وقد يحتاج الطلاب الذين تقل قدراتهم على تكوين الصور الذهنية إلى استعمال ورقة للإجابة على السؤال الثاني الفرع b ، وورقة أكبر للإجابة على السؤال الثاني الفرع a. كما سيرغبون في الرسم على الورقة بدلاً من الاكتفاء بالنظر إلى الرسوم.

هل يستطيع الطلاب الربط بين معرفتهم بالأعداد وبين العلاقات بينها في المستوى الإحداثي؟

هل يستطيع الطلاب تحديد مواقع النقاط بالنظر إلى قيمة الاحداثيات فحسب، دون الحاجة إلى رسمها على المستوى الإحداثي؟


النشاط الرابع
المربعات في المستوى الإحداثي

إذا تعامد زوجان من المستقيمات المتوازية فإن الشكل الناتج يكون مستطيلا. إذا كان البُعد العمودي بين المستقيمات المتوازية متساويًا، فإننا نحصل على مربع.

1- ارسم مستقيمين متوازيين وقس البُعد بينهما، ثم ارسم مستقيمين آخرين متوازيين البُعد بينهما يساوي البعد بين المستقيمين السابقين ويكونا متعامدين على المستقيمين السابقين

نحصل بذلك على مربع.

ما مساحة المربع المتكون؟

2-

a) ما إحداثيات رؤوس هذا المربع؟

b) ما مساحة المربع؟

3- كيف يمكنك وصف إحداثيات رؤوس مربع مساحته 100 وحدة مربعة ومكوّن من مستقيمين أفقيين متوازيين ومستقيمين رأسيين متوازيين؟

22

حول هذا النشاط

يوسّع النشاط دراسة المسافة بين المستقيمات المتوازية في المستوى الإحداثي. ويبدأ النشاط بداية مباشرة نسبياً، ولكنه يصبح أكثر تحدياً لأن حساب المسافات يتطلب استعمال نظرية فيثاغورس. وعند العمل مع الصف بأكمله، قد يحتاج الطلاب خارج برنامج موهبة إلى بعض المساعدة في التوصل إلى الإجابات، بينما يجب إفساح المجال أمام طلاب موهبة للتوصل إليها بأنفسهم. وربما يكون استخدام الأدوات الهندسية ضرورياً لرسم بعض الأشكال.

خصائص الأداء المتقدم

- فهم "الأفكار الكبرى" في الرياضيات من خلال استخدامها للتوصل إلى حلول المسائل المتعلقة بمواقع النقاط وإحداثياتها.
- امتلاك القدرات فوق المعرفية (الوعي بالتفكير الذاتي والرياضيات) والقدرة على تبرير طريقة التفكير باستعمال خصائص الأشكال.

توصيات أسلوب التدريس

مناقشات في الصف بأكمله بعد بعض العمل المستقل والجماعي

إجابات الأسئلة

السؤال الأول

يختص هذا السؤال بالإنشاء الهندسي لتقديم إحدى الأفكار المهمة في النشاط.

السؤال الثاني

a) $(3, 4)$، $(3, 9)$، $(8, 4)$، $(8, 9)$

b) 25 وحدة مربعة

السؤال الثالث

توجد إجابات ممكنة عديدة على الصورة:
(x, y)، $(x, y+10)$، $(x+10, y)$، $(x+10, y+10)$

السؤال الرابع

25 وحدة مربعة.

البعدان الأفقي والرأسي هما 3 و 4، لذا فإن طول كل ضلع هو $\sqrt{3^2 + 4^2}$، أي 5 وحدات.

السؤال الخامس

قد يحتاج الطلاب إلى المساعدة في إنشاء النماذج.

توجد إجابات عديدة ممكنة على الصورة:

(a, b)، $(a+6, b-8)$، $(a+8, b+6)$، $(a+14, b-2)$

أو

(a, b)، $(a+8, b-6)$، $(a+6, b+8)$، $(a+14, b+2)$

يجب أن يكون البعدان الأفقي والعمودي 6 و 8 لذا، يكون طول كل ضلع $\sqrt{6^2 + 8^2}$، أي 10 وحدات، وحتى نحصل على مستطيل يجب أن نعكس إحداثيات نقطتين منها. وقد يرغب الطلاب في رسم مثال للمربع لكي يدركوا أن أطوال الأقطار هي التي تحدد الإحداثيات. ويجب عكس المسافة الإحداثية لأحد الأزواج من أجل الحصول على زاوية عمودية.

السؤال السادس

a) هذا ينتج مباشرة إذا تمت مراعاة عكس المسافة الإحداثية في كل مرة.

b) الإجابة العامة هي: "لأن أطوال الأضلاع متساوية"، ولكن يجب الإجابة بدقة على كل سؤال.

(i) التغيران الأفقي والرأسي لكلا المستقيمين متساويان.

(ii) عكست الإحداثيات الأفقية والرأسية.

(iii) المكونات الأفقية والرأسية للمسافات العمودية هي نفسها، حتى بعد عكسها.

b) يجب على الطلاب في كل حالة استعمال نظرية فيثاغورس لإيجاد طول الضلع ثم تربيعه لإيجاد المساحة.

من المحتمل ألاّ تكون أطوال الأضلاع دقيقة، وسيرغب بعض الطلاب في إيجاد الإجابة التقريبية، ومن ثم يحصلون على الإجابة التقريبية للمساحة. أما الذين يحتفظون بطول الضلع على شكل جذر تربيعي فسيحصلون على قيمة دقيقة للمساحة. وهذا أفضل الطرق لحل السؤالين السابع والثامن

السؤال السابع

أي مربع إحداثيات رؤوسه على الصورة:

(a, b) وَ(a+3, b-1) وَ(a+1, b+3) وَ(a+4, b+2)

أو

(a, b) وَ(a+1, b-3) وَ(a+3, b+1) وَ(a+4, b-2)

يجب أن يكون طول كل ضلع $\sqrt{10}$، شريطة أن يصل بين نقطتين من نقاط تقاطع المستوى، وهذا يعني أن البعد الأفقي والرأسي يجب أن يكونا 3 وَ 1.

قد يكون بعض الطلاب قد رسم مربعًا ملائمًا للسؤال السادس.

السؤال الثامن

وحدات المساحات الممكنة هي:
1 ،2 ،4 ،5 ،8 ،9 ،10 ،13 ،16 ،17 ،18 ،20.

هذا لأنه من الممكن جعل طول ضلع كل مربع مساوياً للجذر التربيعي لهذه الأعداد، وبعضها يكون وترًا لتراتيب مختلفة للفرق في الإحداثيين السيني والصادي. فمثلاً، طول ضلع المربع عندما يكون الإحداثيين السيني والصادي 3 و2 هو مربع $\sqrt{3^2 + 2^2}$ ومساحته 13 وحدة مربعة، وذلك بتطبيق نظرية فيثاغورس.

ولكن، فروق الإحداثيين السيني والصادي التي تنتج عددًا أقل من 20 هي: $(1, 1)$ و $(1, 2)$ و $(1, 3)$ و $(1, 4)$ و $(2, 2)$ و $(2, 3)$ و $(2, 4)$ و $(3, 3)$.

وهذه القيم تعطي المربعات: 18 ,20 ,13 ,8 ,17 ,10 ,5 ,2

على التوالي.

فرص التقويم

إجابات الطلاب على الأسئلة الأولى ستكون دليلاً على طلاقتهم في التعامل مع المستوى الإحداثي وقواعد المستقيمات المتوازية في هذا السياق، في حين تظهر إجابتهم على الأسئلة الأخيرة فهمهم لنظرية فيثاغورس وقدرتهم على تطبيقها.

هل يستطيع الطلاب استعمال خصائص الأشكال لإنشاء نماذجهم الخاصة والتوصل إلى حلول المسائل؟

هل يستطيع الطلاب التعبير عن تفكيرهم لفظياً وكتابياً؟

الوحدة الرابعة

ميل المستقيم ومعادلته

"موهبة .. حيث تنتمي"

نظرة عامّة

تثري هذه الوحدة دراسة المنهاج الأساسي فيما يتعلق بميل المستقيم ومعادلته، من خلال سلسلة من التحديات والأفكار الجديدة.

الهدف التعلمي للوحدة

- تعميق فهم معادلات المستقيم وعلاقتها بالميل والمقطع الصادي.

المعرفة السابقة

- معرفة معادلة المستقيم بصيغة: $y = mx + c$
- معرفة نظرية فيثاغورس

خصائص الأداء المتقدم

القيم والاتجاهات والسمات

- الاستقلالية (النشاط الرابع)
- الانفتاح (النشاط الثالث)
- المثابرة أو العمل المنهجي المنظَّم (النشاطان الأول، والرابع)

المهارات المتقدمة

- التعميم (النشاطان الثاني، والثالث)

المعرفة والفهم المتقدمان

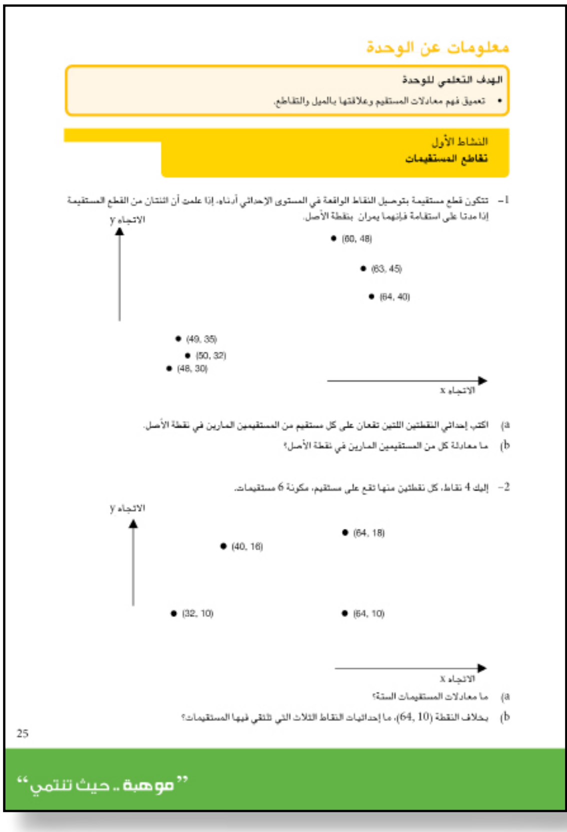
- تعميق الفهم للبنية الرياضية الأساسية (النشاطان الأول، والثاني)

مدة تدريس الوحدة

أسبوعان، بواقع ساعتين من الجدول الدراسي الأسبوعي

المصادر

ورق رسم بياني أو ورق مربعات، وورق للمسودات، ومساطر.



معلومات عن الوحدة

الهدف التعلمي للوحدة

- تعميق فهم معادلات المستقيم وعلاقتها بالميل والتقاطع.

النشاط الأول
تقاطع المستقيمات

1- تتكون قطع مستقيمة بتوصيل النقاط الواقعة في المستوى الإحداثي أدناه. إذا علمت أن اثنتان من القطع المستقيمة إذا مدتا على استقامة فإنهما يمران بنقطة الأصل.

a) اكتب إحداثي النقطتين اللتين تقعان على كل مستقيم من المستقيمين المارين في نقطة الأصل.

b) ما معادلة كل من المستقيمين المارين في نقطة الأصل؟

2- إليك 4 نقاط، كل نقطتين منها تقع على مستقيم، مكونة 6 مستقيمات.

a) ما معادلات المستقيمات الستة؟

b) بخلاف النقطة (64, 10)، ما إحداثيات النقاط الثلاث التي تلتقي فيها المستقيمات؟

25

"موهبة .. حيث تنتمي"

حول هذا النشاط

ينبغي أن يرافق هذا النشاط تنفيذ مهمة إيجاد معادلة المستقيم الواصل بين نقطتين في المستوى الإحداثي. وإدراك أن معادلة المستقيم الذي يمر في الأصل لا تحتوي على الثابت "c"، سوف يساعد الطلاب في الإجابة على السؤال الأول.

تتطلب المهمة الثانية التنسيق بين دراسة كل من الميل والمسافات، وذلك أولاً لإيجاد معادلات المستقيمات، ثَمَّ إيجاد نقاط تقاطعها، علماً بأن بعض الطلاب قد يستخدمون المعادلات لإيجاد نقاط تقاطع المستقيمات (من خلال تكوين معادلات خطية في x وحلّها).

من المحتمل ألاّ يلاحظ بعض الطلاب في البداية أن نقطة تقاطع المستقيمين تقع بين النقاط الأربع.

يحتاج تناول مثل هذه المسائل إلى استعمال طريقة منهجية منظمة، وسيتعين على الطلاب القيام بالرسم، ويجب تشجيعهم عليه.

خصائص الأداء المتقدم

- الفهم المتعمق للبنية الرياضية الأساسية فيما يتعلق بالنقاط في المستوى الإحداثي والعلاقات بينها.
- اتباع منهجية منظمة في تناول المسائل من خلال تطبيق الأسلوب نفسه على مجموعة من نقاط الشكل.

توصيات أسلوب التدريس

العمل المستقل أولاً، ثم إجراء مناقشة ثنائية ومناقشة للصف بأكمله.

إجابات الأسئلة

السؤال الأول

يجب أن يركز العمل على مفهوم أن النقاط الواقعة على المستقيم نفسه تُحقق شروط معادلة ذلك المستقيم.

a) $(64, 40)$ مع $(48, 30)$
و $(63, 45)$ مع $(49, 35)$

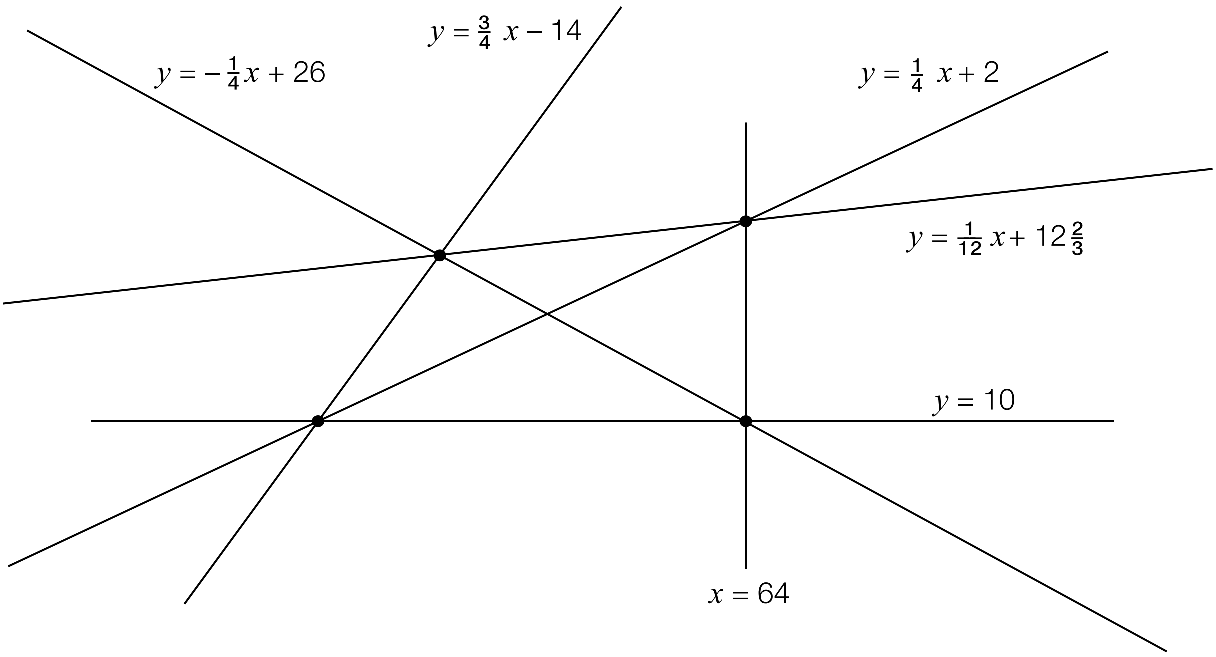
b) $y = \frac{5}{7}x$ و $y = \frac{5}{8}x$

السؤال الثاني

a) وتنقسم معادلات المستقيمات الستة كما يلي

نقطة التقاطع	زوج من المستقيمات
$(64, 34)$	$x = 64, \quad y = \frac{3}{4}x - 14$
$(32, 10)$	$y = 10, \quad y = \frac{3}{4}x - 14$
$(48, 14)$	$y = \frac{1}{4}x + 2, \quad y = -\frac{1}{4}x + 26$

هناك ستة مستقيمات ورَدَت أدناه مع نقاط التقاطع



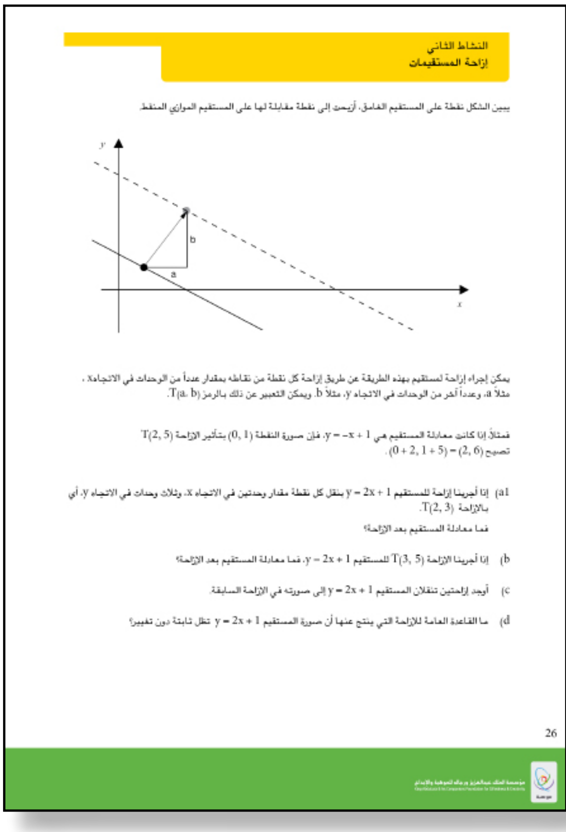
b) $(48, 14)$ وَ $(64, 34)$ وَ $(32 , 10)$

فرص التقويم

ستوضح إجابات الطلاب على كلا السؤالين الدرجة التي وصلوا إليها في تنظيم استكشافاتهم الرياضية بطريقة منهجية، بالإضافة إلى طلاقتهم في اشتقاق معادلات المستقيمات.

هل يستطيع الطلاب إدراك القواعد الرياضية ذات الصلة بالمسائل، ثم تطبيقها في حساب إحداثيات النقاط؟

هل هناك اتساق في اتباع أسلوب الاستقصاء عند حل المسائل؟


النشاط الثاني
إزاحة المستقيمات

يبين الشكل نقطة على المستقيم الغامق. أزيحت إلى نقطة مقابلة لها على المستقيم الموازي المنقط.

يمكن إجراء إزاحة لمستقيم بهذه الطريقة عن طريق إزاحة كل نقطة من نقاطه بمقدار عدداً من الوحدات في الاتجاه x، مثلاً a، وعدداً آخر من الوحدات في الاتجاه y، مثلاً b. ويمكن التعبير عن ذلك بالرمز $T(a, b)$.

فمثلاً إذا كانت معادلة المستقيم هي $y = -x + 1$، فإن صورة النقطة $(0, 1)$ بتأثير الإزاحة $T(2, 5)$ تصبح $(0 + 2, 1 + 5) = (2, 6)$.

a1) إذا أجرينا إزاحة للمستقيم $y = 2x + 1$ بنقل كل نقطة مقدار وحدتين في الاتجاه x، وثلاث وحدات في الاتجاه y، أي بالإزاحة $T(2, 3)$.
فما معادلة المستقيم بعد الإزاحة؟

b) إذا أجرينا الإزاحة $T(3, 5)$ للمستقيم $y = 2x + 1$. فما معادلة المستقيم بعد الإزاحة؟

c) أوجد إزاحتين تنقلان المستقيم $y = 2x + 1$ إلى صورته في الإزاحة السابقة.

d) ما القاعدة العامة للإزاحة التي ينتج عنها أن صورة المستقيم $y = 2x + 1$ تظل ثابتة دون تغيير؟

26

حول هذا النشاط

يوسع هذا النشاط العمل على معادلات المستقيمات من خلال تقديم مفهوم إزاحة المستقيمات وكيفية تمثيله رياضياً. وتعتبر بعض أجزاء النشاط مناسبة للطلاب الآخرين من غير مجموعة موهبة، ولكن بعض الأسئلة يستدعي إجراء التعميمات المتسمة بالصعوبة.

خصائص الأداء المتقدم

- الفهم المتعمق للبنية الرياضية الأساسية فيما يتعلق بالإحداثيات والإزاحة
- القدرة على تعميم القواعد بناء على نتائج دراسة حالات الإزاحة

توصيات أسلوب التدريس

العمل المستقل والمناقشة في الصف بأكمله

إجابات الأسئلة

السؤال الأول

a) أي نقطة على المستقيم $y = 2x + 1$ تكون على الشكل $(x, 2x + 1)$ وبتطبيق الإزاحة $T(2, 3)$ نحصل على التالي:

$$(x + 2, 2x + 1 + 3) = (x + 2, 2(x + 2) - 4 + 4) = (X, 2X)$$

حيث $X = x + 2$. هذا يعني أن المستقيم الناتج من الإزاحة هو $y = 2x$.

b) باستخدام الطريقة السابقة نحصل على نفس المستقيم $y = 2x$.

c) لنأخذ أي نقطة $(x, 2x + 1)$ على المستقيم $y = 2x + 1$ ونطبق الإزاحة $T(a, b)$ وذلك للحصول على المستقيم $y = 2x$

$$(x + a, 2x + 1 + b) = (x + a, 2(x + a) - 2a + 1 + b) =$$
$$(X, 2X - 2a + 1 + b)$$

حيث $X = x + a$، وهذا يعني أن $-2a + 1 + b = 0$ وبالتالي فإن $b = 2a - 1$. الشكل العام للإزاحة المطلوبة هو $T(a, 2a - 1)$.
يمكننا اعطاء a بعض القيم لنحصل على العديد من الأمثلة ومنها:

$T(1, 1)$ أو $T(4, 7)$ أو $T(10, 19)$.

d) $T(a, 2a - 1)$

السؤال الثاني

a) لنأخذ أي نقطة $(x, -3x + 2)$ على المستقيم $y = -3x + 2$ ونطبق الإزاحة $T(a, b)$ وذلك للحصول على المستقيم $y = -3x + 4$.

$$(x + a, -3x + 2 + b)$$
$$= (x + a, -3(x + a) + 3a + 2 + b)$$
$$= (X, -3X + 3a + 2 + b)$$

بحيث أن $X = x + a$. للحصول على المستقيم المطلوب يجب أن يكون

$$-3X + 4 = -3X + 3a + 2 + b$$

و بالتالي فإن $b = -3a + 2$.

هذا يعني أن الإزاحة المطلوبة تكون على الشكل $T(a, -3a + 2)$.

b) $T(a, -3a + 2)$

السؤال الثالث

لنأخذ أي نقطة $(x, -5x + 4)$ على المستقيم $y = -5x + 4$ ونطبق الإزاحة $T(a, b)$ وذلك للحصول على المستقيم نفسه.

$$(x + a, -5x + 4 + b) = (x + a, -5(x + a) + 5a + 4 + b)$$
$$= (X, -5X + 5a + 4 + b)$$

بحيث أن $X = x+a$. للحصول على المستقيم المطلوب يجب أن يكون

$-5X + 4 = -5X + 5a + 4 + b$ وبالتالي فإن $b = -5a$. هذا يعني أن الشكل العام للإزاحة هو $T(a, -5a)$.

(a) ومن الأمثلة على هذه الإزاحة:

$T(1, -5)$ أو $T(2, -10)$ أو $T(10, -50)$

(b) $T(a, -5a)$

(c) لنأخذ أي نقطة $(x, mx + c)$ على المستقيم $y = mx + c$

ونطبق الإزاحة $T(a, b)$ وذلك للحصول على المستقيم نفسه.

$(x + a, mx + c + b) =$

$(x + a, m(x + a) - ma + c + b)$

$= (X, mX - ma + c + b)$

بحيث أن $X = x+a$. للحصول على المستقيم المطلوب يجب أن يكون $mX + c = mX - ma + c + b$ أو $b = ma$ وبالتالي فإن الصيغة العامة للإزاحة هي $T(a, ma)$.

السؤال الرابع

لنأخذ أي نقطة $(x, mx + c_1)$ على المستقيم $y = mx + c_1$ ونطبق الإزاحة $T(a, b)$ وذلك للحصول على المستقيم $y = mx + c_2$.

$(x + a, mx + c_1 + b) = (x + a, m(x + a) - ma + c_1 + b)$

$= (X, mX - ma + c_1 + b)$

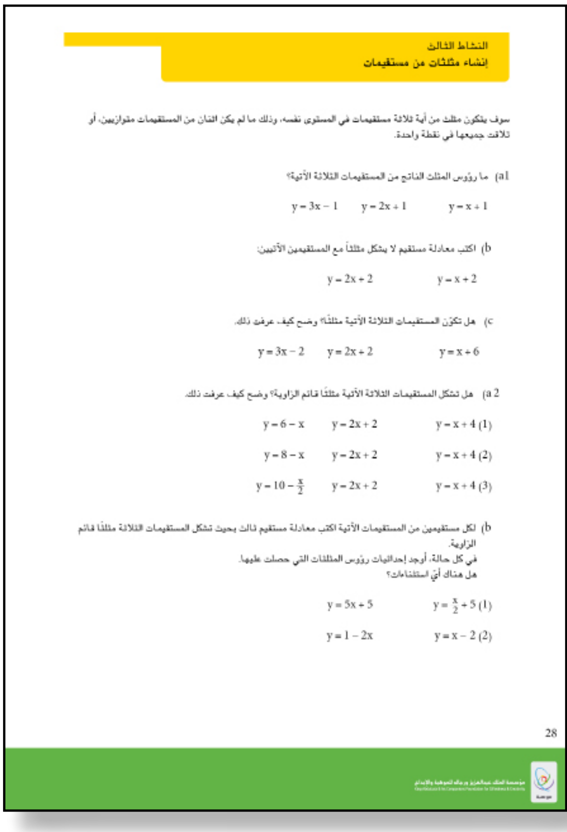
بحيث أن $X = x+a$. للحصول على المستقيم المطلوب يجب أن يكون لدينا

$mX + c_2 = mX - ma + c_1 + b$ أو $b = ma + c_2 - c_1$

وبالتالي فإن الصيغة العامة للإزاحة هي $T(a, ma + c_2 - c_1)$.

فرص التقويم

الطلاب الذين يتوصلون إلى التعميم في الأسئلة 1d و2b و3c سيبرهنون على امتلاكهم قدرة عالية في هذه المهارة الرياضية المهمة، في حين تظهر إجابات السؤال الرابع ما إذا كانت لديهم قدرة كبيرة على التعميم أم لا. هل يستطيع الطلاب توضيح فهمهم للإزاحة، وكيف تؤثر في تغيير إحداثيات النقاط؟ هل الطلاب قادرون على التعميم شفهياً وكتابياً باستخدام الرموز الجبرية؟



النشاط الثالث
إنشاء مثلثات من مستقيمات

سوف يتكون مثلث من أية ثلاثة مستقيمات في المستوى نفسه، وذلك ما لم يكن اثنان من المستقيمات متوازيين، أو تلاقت جميعها في نقطة واحدة.

a1) ما رؤوس المثلث الناتج من المستقيمات الثلاثة الآتية؟

$y = x + 1$ $\quad y = 2x + 1$ $\quad y = 3x - 1$

b) اكتب معادلة مستقيم لا يشكل مثلثاً مع المستقيمين الآتيين:

$y = x + 2$ $\quad y = 2x + 2$

c) هل تكوّن المستقيمات الثلاثة الآتية مثلثًا؟ وضح كيف عرفت ذلك.

$y = x + 6$ $\quad y = 2x + 2$ $\quad y = 3x - 2$

a 2) هل تشكل المستقيمات الثلاثة الآتية مثلثًا قائم الزاوية؟ وضح كيف عرفت ذلك.

(1) $y = x + 4$ $\quad y = 2x + 2$ $\quad y = 6 - x$

(2) $y = x + 4$ $\quad y = 2x + 2$ $\quad y = 8 - x$

(3) $y = x + 4$ $\quad y = 2x + 2$ $\quad y = 10 - \frac{x}{2}$

b) لكل مستقيمين من المستقيمات الآتية اكتب معادلة مستقيم ثالث بحيث تشكل المستقيمات الثلاثة مثلثًا قائم الزاوية.
في كل حالة، أوجد إحداثيات رؤوس المثلثات التي حصلت عليها.
هل هناك أيّ استنتاجات؟

(1) $y = \frac{x}{2} + 5$ $\quad y = 5x + 5$

(2) $y = x - 2$ $\quad y = 1 - 2x$

28

حول هذا النشاط

بالرغم من أنه في كل حالة تبدو الأسئلة وكأنها محددة ومغلقة، ألا أنه يتم التوصل إلى الحلول عبر التفكير في المبادئ العامة وتطبيقها. ويكون التعميم دائماً في متناول اليد، ويجب تشجيع الطلاب على التوصل إليه ومشاركة بقية الطلاب فيه. (مثلاً: يرى أحمد أن ... صحيح. هل تتفق معه؟ وكيف يمكننا اختبار ذلك؟)

قد يتوصل بعض الطلاب عبر عملية التعميم باستخدام الجبر إلى معادلات آنية، ولذا قد يحتاجوا إلى مساعدة المعلم كي يفهموا المطلوب، وللربط بين الحلول والتمثيلات الهندسية.

خصائص الأداء المتقدم

- القدرة على التعميم من خلال دراسة مسائل محددة مرتبطة بالمستقيمات والأشكال
- الانفتاح على البدائل عند المناقشة مع الزملاء في الصف

توصيات أسلوب التدريس

سحب مجموعة الطلبة الموهوبين، والعمل الفردي، والمناقشات الجماعية

إجابات الأسئلة

السؤال الأول

a) $(0, 1)$، $(1, 2)$، $(2, 5)$

b) أي مستقيم موازٍ لأحد المستقيمين المعطيين، أي $y = x + c$، $y = x - c$، $y = 2x + c$ أو $y = 2x - c$ أو أي مستقيم يمر في النقطة $(0, 2)$، أي: $y = mx + 2$ أو $2 - mx$

c) لا؛ لأن المستقيمات الثلاثة تمر في النقطة نفسها. ويجب التحقق من ذلك لأن المستقيمات الثلاثة ليست متوازية.

هناك طريقتان للتوصل إلى هذه النتيجة هما: الأولى هي رسم شكل بياني والتأكد أن المستقيمات تتقاطع في النقطة (4 ,6)، والطريقة الثانية هي حلّ المعادلتين اللتين تربطان بين أزواج المستقيمات. فمثلاً: $x + 6 = 2x + 2$ و$3x - 2 = 2x + 2$ ، وبذلك يجد الطالب أن الحل نفسه (أي 4) يتحقق كل مرة.

السؤال الثاني

a) (i) نعم، لأن المستقيمات الثلاثة غير متوازية، بما يعني أنها ستتقاطع. كما أن حاصل ضرب ميلي المستقيمين $y = x + 4$، و $y = 6 - x$ يساوي -1.

(ii) لا ، بالرغم من أن حاصل ضرب ميلي المستقيمين هو -1، إلا أن المستقيمات الثلاثة تلتقي في النقطة $(2, 6)$.

(iii) نعم، لأن حاصل ضرب ميلي المستقيمين $y = 2x + 2$ و $y = 10 - \frac{x}{2}$ هو -1 (ولا تلتقي المستقيمات الثلاثة في النقطة نفسها).

b) (i) أي مستقيم على الصورة: $y = c - 2x +$ أو $y = c - \frac{1}{5}x$، طالما أن $c \neq 5$ لكي لا تتقاطع جميع المستقيمات في نقطة واحدة.

(ii) مستقيم على الصورة: $y = c - x$ أو $y = \frac{1}{2}x + c$، ما عدا $y = -x$ أو $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$ (لأنهما يمران في النقطة $(1, -1)$).

يجب استكشاف الخيارات الممكنة جميعها، أي المستقيمات المتوازية والمستقيمات التي تلتقي في نقطة.

نقطة التقاطع في الحالة الأولى هي $(0, 5)$.

وفي الحالة الثانية هي $(1, -1)$.

وتعتمد احداثيات النقطتين في الحالتين على المستقيم الذي يختاره الطالب. علماً بأن أسهل طريقة لإيجاد كل نقطة هي بتكوين معادلة في x من كل معادلة من المعادلتين المعطيتين ثم حلّها.

فرص التقويم

لا توجد أي متطلبات للتعميم في هذا النشاط، ولكن بعض الطلاب سيفضلون إجراء التعاميم، وهو ما يتضح من إجاباتهم. وبالمثل، يتضح من إجابات طلاب آخرين أنهم يجدون صعوبة في التعامل مع أي حالة بخلاف الحالات المحددة.

هل الطلاب قادرون على تعميم القواعد الرياضية المرتبطة بالبحوث التي يجرونها؟

هل يستطيع الطلاب استخدام أساليب زملائهم وحلولهم لتطوير حلولهم وإجاباتهم وتنقيحها؟


النشاط الرابع
المسافة الهندسية

1- اكتب النقاط جميعها بحيث تكون إحداثياتها أعدادًا صحيحة تبعد 5 وحدات عن نقطة الأصل.

a2) بالنسبة للمستقيمين $y = 2x$ و $y = 3x$ أوجد:

(1) قيمة x التي تجعل المسافة الرأسية بين المستقيمين تساوي 10 وحدات.

(2) قيمة y التي تجعل المسافة الأفقية بين المستقيمين تساوي 10 وحدات.

b) رُسم مستقيمان يمران بنقطة الأصل. أحدهما $y = 2x$، والمسافة الأفقية بينهما 40 وحدة عندما $y = 100$.
ما معادلة المستقيم الثاني؟ (هناك حلان ممكنان)

3- اثبت أن المسافة العمودية d بين المستقيمين المتوازيين $y = 2x$ و $y = 2x + c$
يمكن التعبير عنها بالعلاقة $d = \sqrt{(0.2c^2)} = \sqrt{0.2}\,|c|$.

4- أوجد أقصر مسافة ممكنة بين كلٍّ مستقيمين من المستقيمات المتوازية الآتية:

a) $y = x$ و $y = x + 1$

b) $y = x$ و $y = x + 2$

c) $y = x$ و $y = x + c$ ، $(c > 0)$

d) $y = x + c$ و $y = x + d$، $(d > c)$

5- إذا كانت المسافة الرأسية بين المستقيمين $y = mx - 2$ و $y = -2x + c$،
تساوي 5 وحدات عندما $x = 2$، وتساوي 40 وحدة عندما $x = 7$ ، فأوجد:

(1) قيمتي الثابتين c و m.

(2) حلاً آخر لقيمتي الثابتين c و m.

29

"موهبة .. حيث تنتمي"

حول هذا النشاط

تم تصميم أسئلة هذا النشاط لتوفير أمثلة موسعة عن المسافة في السياقات الهندسية، ولحفز الطلاب على تطبيق معرفتهم بنظرية فيثاغورس. كما تستدعي الأسئلة من الطلاب استعمال معادلة المستقيم لحل مسائل غير اعتيادية مرتبطة بالإحداثيات. وبشكل عام، فإن رسم السياق الهندسي في كل سؤال يكون ذا فائدة كبيرة، ولكنه ليس ضروريًا. ويتعين أن يمتلك الطلاب قدر من الطلاقة الجبرية في مختلف مراحل النشاط، وخاصة عند حل السؤال 5.

خصائص الأداء المتقدم

- القدرة على إيجاد أسلوب مناسب للظروف المرتبطة بكل مسألة
- المثابرة لتخطي العقبات عند حل المسائل ومواجهة ظروف غير مألوفة

توصيات أسلوب التدريس

العمل الفردي المستقل، ثم العمل في مجموعة، ثم مناقشة جماعية الصف بأكمله

إجابات الأسئلة

السؤال الأول

(4, 3)، (3, 4)، (-5, 0)، (0, -5)، (5, 0)، (0, 5)
(-3, -4)، (-4, 3)، (-3, 4)، (4, -3)، (3, -4)
(-4, -3).

يعتمد إيجاد النقاط الثمانية التي على الصورة $(\pm 4, \pm 3)$ أو $(\pm 3, \pm 4)$ على ألفة الطالب مع ثلاثية فيثاغورس (5، 4، 3).

السؤال الثاني

(a) (i) $x = 10$ و $x = -10$

البعد الرأسي بين المستقيمين يعطى بالعلاقة $3x - 2x$، و تساوي x.

(ii) $y = 60$ أو $y = -60$

إذا أعدنا صياغة المعادلتين بدلالة y، وكتبناهما على الصيغة $x = \frac{1}{2}y$ و $x = \frac{1}{3}y$، يكون الفرق بينهما هو $\frac{y}{6}$ أو $-\frac{y}{6}$، وهذا يساوي 10 عندما $y = 60$ أو $y = -60$.

(b) $m = 10$ أو $\frac{10}{9}$

إذا مثل مستقيم غير معلوم بالعلاقة $y = mx$ (دون ثابت؛ لأن المستقيم يمر عبر نقطة الأصل)، فإن إعادة كتابة المعادلتين بدلالة x ينتج $x = \frac{1}{2}y$ و $x = \frac{1}{m}y$ وحيث أن y تساوي 100، فإن الفارق 40 يساوي $\frac{100}{m} - 50$ أو $50 - \frac{100}{m}$.
وبذلك يمكن إيجاد الحل.

الطريقة البديلة هي الحل بالرسم.

السؤال الثالث

معادلة المستقيم المتعامد المار بنقطة الأصل، والذي يتقاطع مع كلا المستقيمين هي: $y = -\frac{1}{2}x$، وهذا يتقاطع مع $y = 2x + c$ عند $(-\frac{2}{5}c, \frac{1}{5}c)$.
وبتطبيق نظرية فيثاغورس نجد البعد عن نقطة الأصل (وبالتالي البعد العمودي بين المستقيمين):

$$= \sqrt{(-\frac{2}{5}c)^2 + (\frac{1}{5}c)^2}$$

$$= \sqrt{0.2\,c^2} = \sqrt{0.2}\,|c|$$

السؤال الرابع

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\sqrt{2}$

c) $\frac{\sqrt{2}}{2}c$

d) $\frac{\sqrt{2}}{2}(d-c)$

يتطلب هذا الحل أيضًا تطبيق نظرية فيثاغورس، ولذا سيكون من المفيد رسم شكل تقريبي جيد. أقصر مسافة هي المسافة العمودية بينهما. ومع تدرج الأمثلة من المحدد الخاص إلى العام، فإن على الطلاب ملاحظة كيف يساعدهم عملهم السابق على حل المسائل الأكثر عمومية. تعتمد الحلول على المثلث القائم الزاوية المتساوي الساقين إذ إن المسافة المطلوبة هي طول وتر هذا المثلث (المسافة العمودية بين المستقيمين) مقسومًا على $\sqrt{2}$.

السؤال الخامس

بعد تعويض قيم x للحصول على معادلتين آنيتين، سيتطلب الحل جهدًا متواصلاً للتوصل إلى الإجابة النهائية. أما الحل الثاني فينتج بطرح المعادلتين بترتيب معكوس (مقلوب) (وذلك على فرض أن المستقيم الثاني يقع "فوق" الأول عند النقطتين المعطيتين في السؤال).

الحلان هما: $m = 5$ ، $c = 7$ و $m = -9$ ، $c = -11$

يستدعي حل هذا السؤال قدرات كبيرة من الطلاب، وقد يحتاجون إلى مساعدة المعلم في توجيه طريقة التفكير.

فرص التقويم

تشير الإجابات على السؤال الأول إلى الطلاب القادرين على إيجاد مجموعة كاملة من الحلول التي تغطي الإمكانات جميعها. أما النجاح في الإجابة على السؤال الثاني فتظهر قدرة الطلاب على حل المسائل التي تتطلب استعدادًا لاستكشاف الرياضيات دون أن يكونوا متأكدين من التوصل إلى الحل. والنجاح في محاولات الإجابة على السؤالين الثالث و الخامس تثبت أنهم واثقون من طرائقهم الجبرية، ومستعدون لمواصلة محاولاتهم.

هل الطلاب قادرون على استخدام المهارات اللازمة وتطبيقها على مختلف المسائل وبطرائق مختلفة؟

هل الطلاب قادرون على الاستمرار في العمل على حل المسألة دون معرفة النتيجة الممكنة؟

الوحدة الخامسة
تطابق المثلّثات

نظرة عامّة

صُمِّمت هذه الوحدة لإثراء فهم الطلاب لتطابق المثلثات من خلال نشاطات تُستعمل المفهوم وتطبقه في سياقات رياضيّة متنوعة، ومن خلال صياغة براهين والتحقق من صحتها.

الأهداف التعلمية للوحدة

- اكتساب القدرة على تطبيق المعرفة السابقة عن التطابق على مهام وأنشطة رياضيّة
- تعميق فهم كيفية صياغة براهين التطابق
- الفهم المتعمق لشروط التطابق

المعرفة السابقة

- استيعاب مفهوم التطابق في المثلثات، والمعرفة بشروطه الاعتيادية
- المعرفة ببنية البراهين

خصائص الأداء المتقدم

القيم والاتجاهات والسمات

- الاستقصاء (الأنشطة الأول، والثاني، والخامس)
- الإبداع (النشاطان الخامس، والسادس)
- المثابرة (النشاط الثالث)
- التعاون (النشاطان الأول، و الخامس)

المهارات المتقدمة

- تكوين الصور الذهنية (النشاط السادس)
- الاستدلال (النشاطان الرابع، والخامس)
- التعميم (النشاطان الثاني، والثالث)

المعرفة والفهم المتقدمان

- وضوح المفاهيم (النشاط الأول)
- الربط بين مجالات الرياضيات (النشاط السادس)
- فهم "الأفكار الكبرى" (النشاطان الرابع، والخامس)
- الفهم المتعمق للبنية الرياضية الأساسية (النشاطان الرابع، والسادس)
- فهم البرهان (الأنشطة الثاني، والثالث، والرابع، والخامس)

مدة تدريس الوحدة

ثلاثة أسابيع، بواقع ساعتين من الجدول الدراسي الأسبوعي

المصادر

مسطرة
برمجية الجداول الالكترونية إكسل (اختياري)

معلومات عن الوحدة

الأهداف التعلمية للوحدة

- اكتساب القدرة على تطبيق المعرفة السابقة عن التطابق على مهام وأنشطة رياضيّة
- تعميق فهم صياغة براهين التطابق
- الفهم المتعمق لشروط التطابق

النشاط الأول
العلاقات بين أنواع المثلثات

يوجد ستّة أسماءٍ لأنواع المثلثات:

- ثلاثة منها بدلالة الزاوية (حادّ الزوايا، منفرج الزاوية، قائم الزاوية).
- وثلاثة بدلالة الأضلاع (مختلف الأضلاع، متطابق الضلعين، متطابق الأضلاع)

1- اكتب أكبر عددٍ ممكن من العبارات الصحيحة التي تربط بين أنواع المثلثات بحسب زواياها وأضلاعها مستعملاً الكلمات "جميع"، "بعض"، "لا يوجد". وفيما يلي ثلاثة أمثلة:

المثلثات المتطابقة الأضلاع جميعها تكون مثلثات حادّة الزوايا.

بعض المثلثات قائمة الزاوية تكون مثلثات مختلفة الأضلاع.

لا يوجد مثلث منفرج الزاوية ومتطابق الأضلاع.

2- صمّم تمثيلاً مناسبًا (قائمة أو جدول أو مصفوفة) لتعرض العبارات الصحيحة.

النشاط الثاني
المثلثات حيث النسبة بين الزوايا: $n : n+1 : n+2$

1- ما قياسات زوايا مثلث النسبة بين قياساتها $3 : 2 : 1$؟

2- ما قياسات زوايا مثلث النسبة بين قياساتها $4 : 3 : 2$؟

3- اكتب جميع زوايا المثلثات التي تكون النسبة بين قياساتها $n : n+1 : n+2$.

4- أكتب أكبر عددٍ ممكن من خصائص المثلثات اعتمادًا على نتائجك السابقة.

5- حاول برهنة الخصائص التي لاحظتها.

31

"موهبة .. حيث تنتمي"

حول هذا النشاط

يتناول هذا النشاط العبارات المنطقية المختلفة التي يمكن صياغتها حول أنواع المثلثات. ويتطلب من الطلاب أن يتبعوا منهجية منظمة للتوصل إلى العبارات الصائبة والمهمة، وتنظيمها.

سيجد طلاب الصف جميعهم سهولة في تناول هذا النشاط، ولكن ستظهر الفروقات بينهم في درجة تنظيم أنفسهم ومدى حاجتهم لمساعدة المعلم. ويتطلب الأمر من المعلم أن يكون مدركاً لمختلف أساليب التعليم والتعلم المختلفة واستعمالها في إثارة المناقشة في الصف. ويجب تسجيل إجابات الطلاب على السؤال الأول على السبورة .

خصائص الأداء المتقدم

- الاستقصاء – المنهجية في تناول مسائل تتعلق بخصائص المثلثات
- وضوح المفاهيم عند التمييز بين أنواع المثلثات المختلفة

توصيات أسلوب التدريس

العمل الفردي والعمل ضمن المجموعات وإجراء المناقشة الصفية.

مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع
King Abdulaziz & his Companions Foundation for Giftedness & Creativity
موهبة

إجابات الأسئلة

السؤال الأول

توجد عدة عبارات ممكنة، وفيما يلي 18 عبارة صائبة:

- بعض المثلثات حادّة الزوايا مختلفة الأضلاع.
- بعض المثلثات حادّة الزوايا متطابقة الضلعين.
- بعض المثلثات حادّة الزوايا متطابقة الأضلاع.
- بعض المثلثات منفرجة الزاوية مختلفة الأضلاع.
- بعض المثلثات منفرجة الزاوية متطابقة الضلعين .
- لا توجد مثلثات منفرجة الزاوية ومتطابقة الأضلاع.
- بعض المثلثات قائمة الزاوية مختلفة الأضلاع.
- بعض المثلثات قائمة الزاوية متساوية الساقين.
- لا توجد مثلثات قائمة الزاوية ومتطابقة الأضلاع.
- بعض المثلثات مختلفة الأضلاع حادّة الزوايا.
- بعض المثلثات مختلفة الأضلاع منفرجة الزاوية.
- بعض المثلثات مختلفة الأضلاع قائمة الزاوية.
- بعض المثلثات متطابقة الضلعين حادّة الزاوية.
- بعض المثلثات متطابقة الضلعين منفرجة الزوايا.
- بعض المثلثات متطابقة الضلعين قائمة الزاوية.
- جميع المثلثات متطابقة الأضلاع حادّة الزوايا.
- لا توجد مثلثات متطابقة الأضلاع ومنفرجة الزاوية.
- لا توجد مثلثات متطابقة الأضلاع وقائمة الزاوية.

السؤال الثاني

يمكن تسجيل معظم المعلومات في مصفوفة أو جدول ثنائي، إلاّ أنّ بعض الطلاب قد يجدون الجداول البسيطة أسهل وأفضل. ويجب الحكم على كل إجابة بناءً على مضمونها.

فرص التقويم

ستكشف إجابات السؤال الأول عن مدى وضوح فهم الطلاب لأنواع المثلثات، وتشير درجة المساعدة والدعم اللازم للطلاب في التعامل مع مختلف أجزاء السؤال إلى مستوى قدرتهم على اتباع منهجية منتظمة.

هل يتعامل الطلاب مع المسائل بالطريقة نفسها؟

هل يستعملون المنهجية المنظمة نفسها عند تسجيل إجاباتهم؟

هل يكتبون عبارات واضحة باستعمال خصائص المثلثات؟

معلومات عن الوحدة

الأهداف التعلمية للوحدة

- اكتساب القدرة على تطبيق المعرفة السابقة عن التطابق على مهام وأنشطة رياضيّة
- تعميق فهم صياغة براهين التطابق
- الفهم المتعمق لشروط التطابق

النشاط الأول
العلاقات بين أنواع المثلثات

يوجد ستّة أسماءٍ لأنواع المثلثات:

- ثلاثة منها بدلالة الزاوية (حادّ الزوايا، منفرج الزاوية، قائم الزاوية).
- وثلاثة بدلالة الأضلاع (مختلف الأضلاع، متطابق الضلعين، متطابق الأضلاع)

1- اكتب أكبر عددٍ ممكن من العبارات الصحيحة التي تربط بين أنواع المثلثات بحسب زواياها وأضلاعها مستعملاً الكلمات "جميع"، "بعض"، "لا يوجد". وفيما يلي ثلاثة أمثلة:
المثلثات المتطابقة الأضلاع جميعها تكون مثلثات حادّة الزوايا.
بعض المثلثات قائمة الزاوية تكون مثلثات مختلفة الأضلاع.
لا يوجد مثلث منفرج الزاوية ومتطابق الأضلاع.

2- صمّم تمثيلاً مناسبًا (قائمة أو جدول أو مصفوفة) لتعرض العبارات الصحيحة.

النشاط الثاني
المثلثات حيث النسبة بين الزوايا: $n : n + 1 : n + 2$

1- ما قياسات زوايا مثلث النسبة بين قياساتها $3 : 2 : 1$؟
2- ما قياسات زوايا مثلث النسبة بين قياساتها $4 : 3 : 2$؟
3- اكتب جميع زوايا المثلثات التي تكون النسبة بين قياساتها $n : n + 1 : n + 2$.
4- أكتب أكبر عددٍ ممكن من خصائص المثلثات اعتمادًا على نتائجك السابقة.
5- حاول برهنة الخصائص التي لاحظتها.

31

"موهبة .. حيث تنتمي"

حول هذا النشاط

قد يحتاج المعلم إلى مراجعة النسبة والتناسب. يجب أن يكون ارشاد الطلاب محدوداً في هذا النشاط، من أجل حثِّهم على الاستقصاء، مع إمكانية توجيههم الى استعمال الجداول الإلكترونية لاستخلاص البيانات وعرضها.

ستظهر الجداول الالكترونية بالصورة التالية:

النسب بين الزوايا			الزوايا		
1	2	3	30	60	90
2	3	4	40	60	80
3	4	5	45	60	75
4	5	6	48	60	72
5	6	7	50	60	70
6	7	8	51.42857	60	68.57143
7	8	9	52.5	60	67.5
8	9	10	53.33333	60	66.66667
9	10	11	54	60	66
10	11	12	54.54545	60	65.45455
…	…	…	…	…	…

خصائص الأداء المتقدم

- الاستقصاء – استعمال منهجية الاستقصاء بالتدقيق في البدائل عند طرح السؤال: "ماذا لو ....؟"
- القدرة على فهم وصياغة برهان باستعمال المعلومات عن المثلثات وخصائصها، وتسجيل ذلك البرهان باستعمال بنى جبريّة

توصيات أسلوب التدريس

العمل الفردي، والمناقشة الجماعية

إجابات الأسئلة

السؤال الأول

$30°, 60°, 90°$

السؤال الثاني

$40°, 60°, 80°$

السؤال الثالث

كما في جدول الحسابات في الصفحة السابقة.

السؤال الرابع

يمكن أن يُلاحظ الطلاب خصائص مختلفة، مثل:

قياس الزاوية الوسطى يكون دائماً $60°$.

- تكون قياسات جميع الزوايا أعدادًا كُلِّيَّة إذا كان الحدّ الأوسط في النسبة عاملاً للعدد 60.

جميع المثلثات بعد المثلث الأول حادّة الزوايا.

كلما ازدادت قيم حدود النسبة كلّما اقترب المثلث من شكل المثلث متطابق الأضلاع. وتبيّن الأجزاء المتأخرة من الجداول الالكترونية ذلك:

النسب بين الزوايا

119	120	121	59.5	60	60.5
120	121	122	59.50413	60	60.49587
121	122	123	59.5082	60	60.4918

ويمكن هنا تقديم نقطة نقاش إضافية هي: "هل يصل المثلث أبداً إلى شكل المثلث متطابق الأضلاع؟"

السؤال الخامس

برهان العبارات الثلاث الأولى الواردة أعلاه، يمكن أن يكون كما يأتي:

a) مجموع النسب n، $n+1$ و $n+2$ يساوي $3n+3$، أو $3(n+1)$، وهذا المجموع يقابل 180 درجة،
إذن $n+1$ (وهي قيمة الزاوية الوسطى) تقابل الزاوية $60°$.

b) تكون قياسات الزوايا الثلاث أعداداً كليّة فقط عندما يكون مجموع نسبها $3(n+1)$ عاملاً من عوامل 180، أي أن $n+1$ (وهو قيمة النسبة الوسطى) عاملاً للعدد 60.

الزاوية الكبرى بين الزوايا الثلاث تساوي دائماً

c) $60\ (n+2)$ مقسوماً على $(n+1)$. فإذا كان n أكبر من 1، فإن نسبة $n+2$ إلى $n+1$ أقلّ من 1.5، لذلك فالزاوية الكبرى تكون أقل من 90 درجة، مما يجعل المثلث حادّ الزوايا.

يتم تقييم البراهين الأخرى بناء على مضمونها.

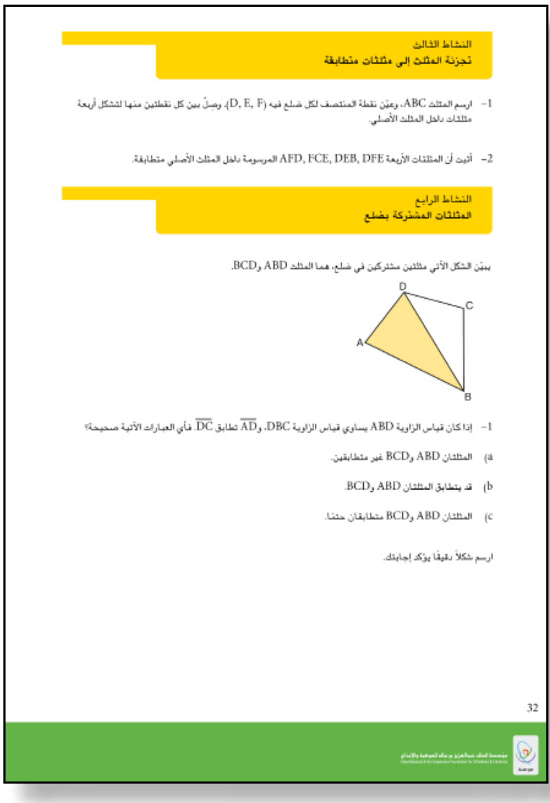
فرص التقويم

تكشف طريقة تناول الطلاب للسؤال الثالث عن قدرتهم على تبنيّ أسلوب الاستقصاء. فهل يبدؤون يتنظيم أنفسهم، أو يطلبون التوجيه من معلّمهم؟ وهل سيستمرون في الاستقصاء أو يكتفون بإجابة أو إجابتين؟

تبيّن إجابات السؤال الخامس إلى أي درجة استوعب الطلاب أساليب البرهان التي تعلموها في المنهاج الأساسي. والمحك الحقيقي لتعلّم البرهان هو تقبل الطلاب لأهميّة التأني والدقة في الاستدلال وعرض الإجابات.

هل يدرس الطلاب جميع التوليفات الممكنة قبل تعميم نتائج بحثهم؟

هل الطلاب قادرون على تعميم نتائجهم التي توصلوا إليها وعرضها جبريًا، وهل يملكون منهجية واضحة للتوصل إلى البرهان على أسس سليمة منطقيًا وفكريًا؟



النشاط الثالث
تجزئة المثلث إلى مثلثات متطابقة

1- ارسم المثلث ABC، وعيّن نقطة المنتصف لكل ضلع فيه (D, E, F)، وصِلْ بين كل نقطتين منها لتشكل أربعة مثلثات داخل المثلث الأصلي.

2- أثبت أن المثلثات الأربعة AFD, FCE, DEB, DFE المرسومة داخل المثلث الأصلي متطابقة.

النشاط الرابع
المثلثات المشتركة بضلع

يبيّن الشكل الآتي مثلثين مشتركين في ضلع، هما المثلث ABD وBCD.

1- إذا كان قياس الزاوية ABD يساوي قياس الزاوية DBC، و$\overline{AD}$ تطابق $\overline{DC}$. فأي العبارات الآتية صحيحة؟

a) المثلثان ABD وBCD غير متطابقين.

b) قد يتطابق المثلثان ABD وBCD.

c) المثلثان ABD وBCD متطابقان حتمًا.

ارسم شكلاً دقيقًا يؤكد إجابتك.

32

حول هذا النشاط

هذا نشاط مفتوح نسبيّاً وفيه يطبق الطلاب ما تعلموه بشأن المثلثات والمستقيمات المتوازية في صياغة البرهان.

وقد يرى المعلم تذكير الطلاب بشروط تطابق المثلثات وتشابهها. ويُعطى الطلاب مهلة مناسبة للعمل بمفردهم، ولكن يقوم الطلاب بتسجيل برهانهم النهائي على السبورة، وبذلك يساهمون في التوصل إلى البرهان الدقيق والموجز.

والسؤال الأول عمل إنشائي فقط، ولكنّه خطوة مهمّة للطلاب لأنها تمكنهم من فهم الخصائص التي أضيفت للمثلث الأصلي. ويستفيد بعضهم من عمل إنشاءات متعدّدة يبدأونها بمثلثات مختلفة، وبذلك لن يُضلّلوا بخصائص الحالات الخاصة (مثل المثلثات متطابقة الأضلاع أو المثلثات قائمة الزاوية).

خصائص الأداء المتقدم

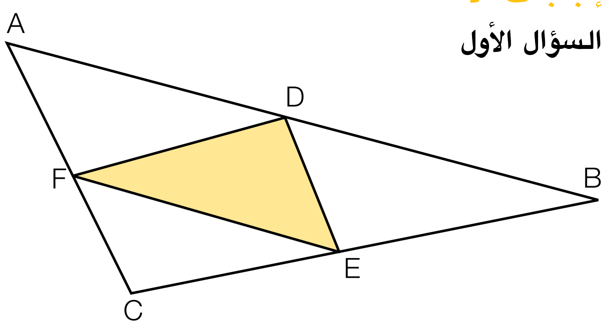
- المثابرة والإصرار على المحاولة للتغلب على الصعوبات التي تعرقل التوصل إلى البرهان
- القدرة على فهم وصياغة البرهان باستعمال خصائص المثلثات والتطابق والتشابه

توصيات أسلوب التدريس

تمايز التدريس داخل الصف

إجابات الأسئلة

السؤال الأول



السؤال الثاني

حيث عينت النقاط F ،D ،E على منتصفات أضلاع المثلث تكون

$\overline{AF} = \overline{FC}$, $\overline{CE} = \overline{EB}$,$\overline{AD} = \overline{DB}$

بما أن $\overline{AC}$ ضعف $\overline{AF}$ و $\overline{AB}$ ضعف $\overline{AD}$، والزاوية FAD مشتركة، فإن المثلثين AFD و ABC متشابهان.

لذلك الزاوية AFD تساوي الزاوية FCE. إذن $\overline{FD}$ توازي $\overline{CB}$.

وبالطريقة نفسها يتم إثبات أن $\overline{FE}$ توازي $\overline{AB}$ و $\overline{DE}$ توازي $\overline{AC}$. لذلك، فإن الأشكال الرباعية FDBE ،ADEF و FDEC متوازيات أضلاع. وهذا يعني أن القطع المستقيمة $FD = CE = EB$و $DE = AF = FC$,$AD = FE = DB$ والزوايا المتقابلة متساوية، أي أن $DEF = FAD$و $DFE = DBE$,$FDE = FCE$.

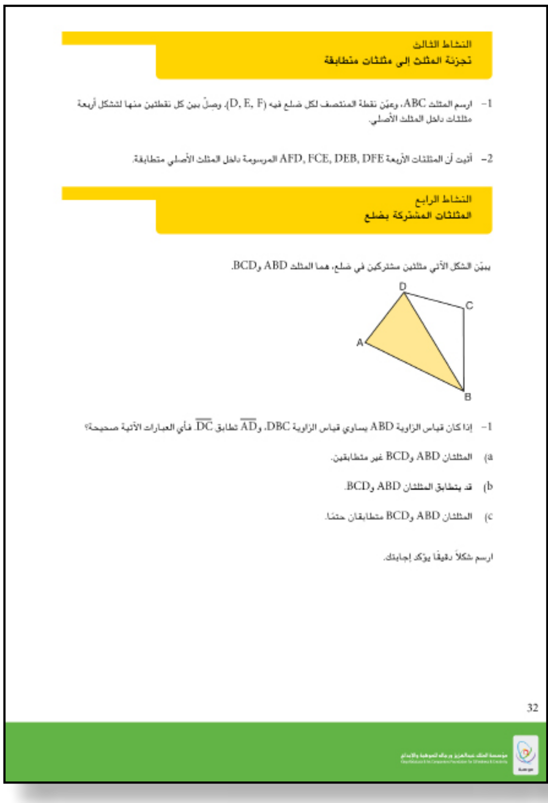
المثلثات الأربعة متطابقة وفق نظرية SSS أو SAS.

فرص التقويم

يمكن أن يستنتج الطلاب بالفحص والتدقيق أن المثلثات الأربعة متطابقة، ولكن طلب البرهان سيقدّم دليلاً على مدى دقّتهم وقدرتهم على الاستدلال المنهجي المنظم للموقف.

هل ينجح الطلاب في العمل بمفردهم ويصوبوا أخطاءهم عند مواجهة إشكالية أو طريق مسدود؟

هل ينجح الطلاب في تقديم البرهان باستخدام معرفتهم وحقائق السؤال المتعلقة بالأشكال؟



النشاط الثالث
تجزئة المثلث إلى مثلثات متطابقة

1- ارسم المثلث ABC، وعيّن نقطة المنتصف لكل ضلع فيه (D, E, F)، وصِلْ بين كل نقطتين منها لتشكل أربعة مثلثات داخل المثلث الأصلي.

2- أثبت أن المثلثات الأربعة AFD, FCE, DEB, DFE المرسومة داخل المثلث الأصلي متطابقة.

النشاط الرابع
المثلثات المشتركة بضلع

يبيّن الشكل الآتي مثلثين مشتركين في ضلع، هما المثلث ABD وBCD.

1- إذا كان قياس الزاوية ABD يساوي قياس الزاوية DBC، و$\overline{AD}$ تطابق $\overline{DC}$. فأي العبارات الآتية صحيحة؟

a) المثلثان ABD وBCD غير متطابقين.

b) قد يتطابق المثلثان ABD وBCD.

c) المثلثان ABD وBCD متطابقان حتمًا.

ارسم شكلاً دقيقًا يؤكد إجابتك.

32

حول هذا النشاط

يوسّع هذا النشاط معرفة الطلاب بشروط التشابه والتطابق، وذلك بمساعدتهم على فهم سبب انطباق هذه الشروط. وقبل أن يبدأ الطلاب تنفيذ النشاط، أكدّ لهم أن الأشكال عبارة عن مسودات أوليّة، أي أنها ليست مرسومة بدقّة. ويعتبر السؤال 2b مليئاً بالتحديات، ويجب توجيه الاستفسارات إلى الطلاب لمساعدتهم وتشجيعهم أثناء محاولة حل السؤال.

قد يميل الطلاب إلى فكرة رسم جميع الأشكال بدقّة لمساعدتهم في نمذجة إجاباتهم. وهذا ليس خطأ، ولكن من الواجب تشجيع الطلاب ذوي الأداء المتقدم على تكوين الصور الذهنية للأشكال البيانية واستعمال هذه الصور الذهنية في التوصل إلى الحل.

خصائص الأداء المتقدم

قدرات قوية على الاستدلال الرياضي فيما يتعلق باستعمال خصائص المثلثات

- الفهم المتعمق للبُنى الرياضية الأساسيّة المستعملة في حل المسائل المتعلقة بخصائص المثلثات

توصيات أسلوب التدريس

العمل الفردي، والمناقشة الجماعية

إجابات الأسئلة

السؤال الأول

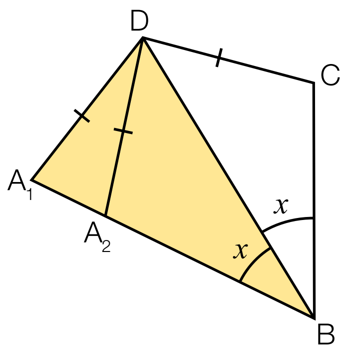
العبارة b صحيحة – المثلثان ABD وBCD يمكن أن يكونا متطابقين.

مع أن المثلثين يمكن أن يكونا متطابقين فإن المعلومات المعطاة غير كافية لتأكيد ذلك.

طول ضلع أحد المثلثين مساوٍ لطول ضلع في المثلث الآخر ($\overline{AD} = \overline{DC}$) والضلع $\overline{BD}$ مشترك بين المثلثين. بالإضافة إلى ذلك، فإن زاوية في أحد المثلثين مساوية لزاوية في المثلث الآخر (الزاويتان ABD وDBC). لذلك، لدينا S وS وA، أي أن التطابق بحالة SSA.

ولكن، الزاويتان المتساويتان ليستا محصورتين بين الضلعين المتطابقين (أي أنها ليست حالة SAS) وهذا يعني أننا لا نستطيع تأكيد التطابق بين المثلثين.

يمكن بيان ذلك أيضاً بمثال مضاد: مثلثان يحققان الشروط المعطاة ولكنهما ليسا متطابقين:



المثلثان BDA_2 وBCD متطابقان. ولكن، المثلثان BDA_1 وBCD ليسا متطابقين.

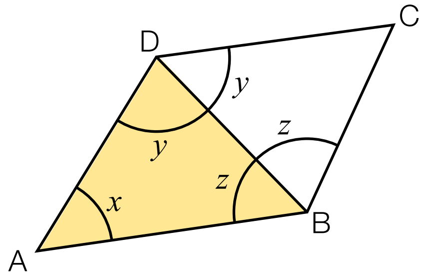
يمكن استعمال قيم للزوايا والأضلاع عند الضرورة. فمثلاً، ليكن قياس كل من الزاويتين 30 درجة، والقطعتين المستقيمتين AD وَ DC متطابقتين وطول كل منهما 6 سم .

السؤال الثاني

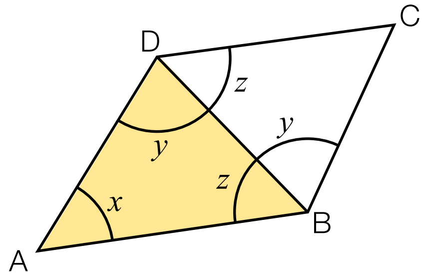
a) توجد ست طرق مختلفة.
يمكن أن توضع الزاوية x في أيّ من الأماكن الثلاثة، تاركة للزاوية y مكانين لتوضع في أحدهما. وبعد ذلك يتحدّد مكان z في المكان المتبقي.
لذلك. توجد $3 \times 2 \times 1 = 6$ طرق مختلفة.

b) بما أن قياسات الزوايا في كل زوج من المثلثات متساوية، فإن المثلثين يجب أن يكونا متشابهين. ويكون المثلثان متطابقين عندما يكون الضلع المشترك ($\overline{BD}$) واقعاً بين الزوايا المعروف أنّها متطابقة (حالة ASA)، ويتحقق هذا عندما تكون الزاوية ADB = الزاوية BDC، وتكون الزاوية ABD = الزاوية DBC.

ويتمثل ذلك في الرسم التالي:



أو عندما تكون الزاوية ADB = الزاوية DBC، وتكون الزاوية ABD = الزاوية BDC:



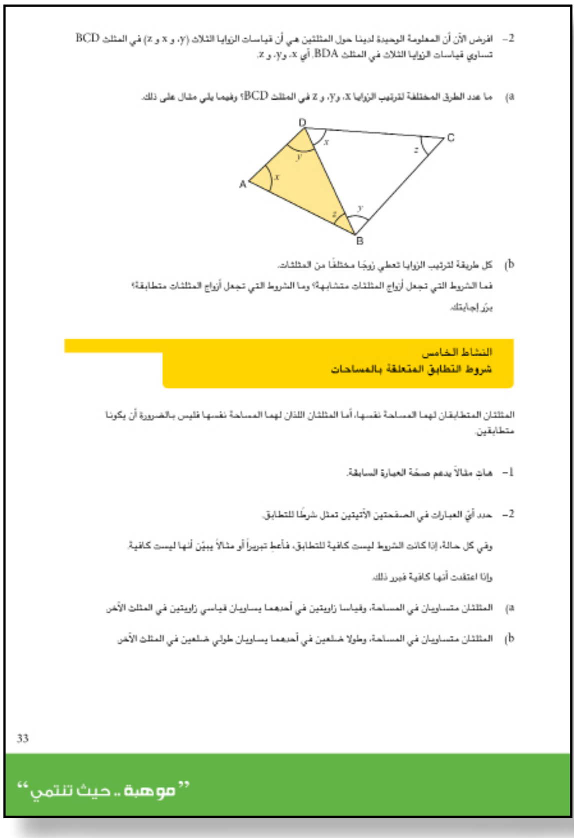
وفي الحالات الأربع الأُخرى، فإن تطابق المثلثين غير مؤكد.

فرص التقويم

يتطلب هذا النشاط قدرات قوية على الاستدلال، ويوفران فرصة لتقويم الفروق بين الطلاب في ذلك المجال، كما يتطلبا أيضاً تفكيراً واضحاً حول الفرق بين التشابه والتطابق، والشروط اللازمة لكل منهما. وستكشف إجابات السؤال الثاني فرع a قدرات الطلاب على اتباع منهجية منظمة.

هل الطلاب قادرون على استعمال معارفهم ومهاراتهم لتطوير حل المسألة المتعلقة بتشابه المثلثات وتطابقها؟

هل الطلاب قادرون على ربط المعلومات الواردة في الأسئلة بالخصائص الرياضية للأشكال في سبيل حل المسألة؟


2- افرض الآن أن المعلومة الوحيدة لدينا حول المثلثين هي أن قياسات الزوايا الثلاث (y، و x و z) في المثلث BCD تساوي قياسات الزوايا الثلاث في المثلث BDA، أي x، وy، و z.

a) ما عدد الطرق المختلفة لترتيب الزوايا x، وy، و z في المثلث BCD؟ وفيما يلي مثال على ذلك.

b) كل طريقة لترتيب الزوايا تعطي زوجًا مختلفًا من المثلثات.
فما الشروط التي تجعل أزواج المثلثات متشابهة؟ وما الشروط التي تجعل أزواج المثلثات متطابقة؟
برّر إجابتك.

النشاط الخامس
شروط التطابق المتعلقة بالمساحات

المثلثان المتطابقان لهما المساحة نفسها، أما المثلثان اللذان لهما المساحة نفسها فليس بالضرورة أن يكونا متطابقين.

1- هاتِ مثالاً يدعم صحّة العبارة السابقة.

2- حدد أيّ العبارات في الصفحتين الآتيتين تمثل شرطًا للتطابق.
وفي كل حالة، إذا كانت الشروط ليست كافية للتطابق، فأعطِ تبريراً أو مثالاً يبيّن أنها ليست كافية.
وإذا اعتقدت أنها كافية فبرر ذلك.

a) المثلثان متساويان في المساحة، وقياسا زاويتين في أحدهما يساويان قياسي زاويتين في المثلث الآخر
b) المثلثان متساويان في المساحة، وطولا ضلعين في أحدهما يساويان طولي ضلعين في المثلث الآخر

33

"موهبة .. حيث تنتمي"

حول هذا النشاط

يطرح هذا النشاط أسئلة مختلفة حول التطابق بما يتجاوز مضمون المنهاج الأساسي، وسوف يؤدي على الأرجح إلى إثارة مناقشة مثرية حول تحديد الشروط السارية. والسؤال الثالث سؤال مليئ بالتحديات، وقد لا يستطيع الطلاب حله دون مساعدة. ويتوفر سبيل آخر في هذه الحالة لتناول السؤال الثالث، وهو أن يعرض المعلم خطوات الاستدلال على الطلاب ثم يتركهم لإيجاد الحل بأنفسهم.

خصائص الأداء المتقدم

- الإبداع – الانفتاح على البدائل واستعمالها للمساعدة على التفكير في خصائص المثلثات
- امتلاك قدرات قوية على الاستدلال الرياضي باستعمال خصائص المثلثات

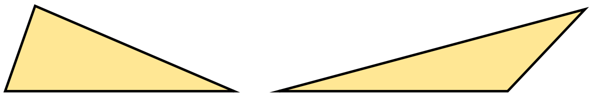
توصيات أسلوب التدريس

سحب مجموعة الطلبة الموهوبين، والمناقشات الجماعية

إجابات الأسئلة

السؤال الأول

من الأمثلة المفيدة في ذلك اختيار مثلثين قاعدتاهما متساويتان وارتفاعاهما الرأسيّان متساويان، ولكن زواياهما مختلفة، كما في الشكل أدناه:



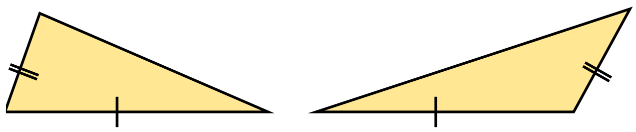
السؤال الثاني

a) نعم

بما أن المثلثين يتساويان في زاويتين بكل منهما، فإن الزاوية الثالثة تكون متساوية أيضاً (مجموع زوايا المثلث = 180). لذلك، فالمثلثان متشابهان. وبما أنهما متساويان في المساحة، نظراً لتساوي القاعدتين والارتفاعين، فإنهما متطابقان (SSS).

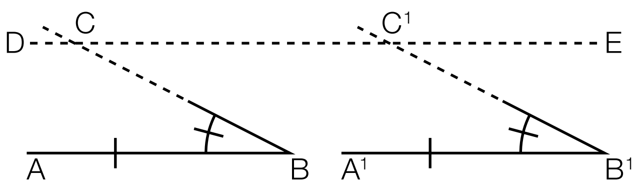
b) لا

المثال المضاد مشابه للسؤال الأول، حيث المثلثان متساويان في القاعدة والارتفاع، مع تساوي الضلع الثاني في الحالتين.



c) نعم

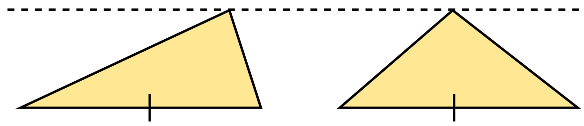
الضلعين المتساويين هما القاعدة AB، والارتفاع الرأسي متساوي في الحالتين، وبالتالي فإنّ الرأسين يمرّ فيهما مقطع المستقيم DE نفسه الموازي للقاعدتين.



وبما أن الزاوية المجاورة هي نفسها في الحالتين، فإن المستقيمين سيقطعان المستقيم الموازي على مسافتين متساويتين من الرأس B، أي أن $BC = B_1C_1$، إذن فالمثلثان متطابقان (SAS).

d) نعم

إذا كان الضلعان المتساويان في المثلثين هما القاعدتين، فإن الرأسين يقعان على مستقيم موازٍ للقاعدتين.



تتغير زاوية الرأس (الزاوية المقابلة للقاعدة) كلّما تحرك الرأس يميناً ويساراً، مع تحقق أكبر قيمة للزاوية عندما يقع الرأس على العمود المنصّف للقاعدة.

ومهما تكن زاوية الرأس فإنها تكون متساوية في المثلثين، سواءً أكان الرأس يقع في نقطة واحدة، أم كان الرأس في الحالة الثانية انعكاسا للرأس في الحالة الأولى عند التقاطع بالعمود المنصف. وبما أن التطابق يشمل مثلثات متناظرة، فإن المثلثين متطابقان.

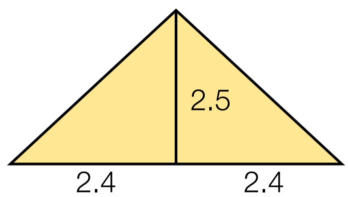
السؤال الثالث

لا.

يتم الاستدلال هنا على أساس بيان أنّه من الممكن تقديم مثال مضاد.

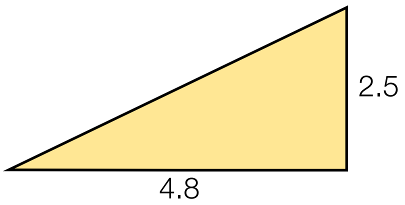
- ارسم أيّ مثلث، مثل مثلث أطوال أضلاعه 3، 4، 5، وتكون مساحته 6 ومحيطه 12.
- ثم ارسم مثلثاً آخر قاعدته مختلفة طولها يقع بين أطول ضلعين في المثلث الأصلي. مثلاً: طول القاعدة 4.8.
  من أجل أن تكون مساحته مساوية لمساحة المثلث الأصلي، يجب أن يكون ارتفاعه الرأسي 2.5 (12 ÷ 4.8).
- تكون أقل قيمة لمحيط هذا المثلث عندما يكون رأسه على العمود المنصّف لقاعدته. وهذا يشكل مثلثين قائمي الزاوية، طول وتر كل منهما يساوي:

$$\sqrt{(2.5)^2 + (2.4)^2} = 3.4655$$



فيكون محيط هذا الشكل يساوي 11.731.

ارسم مثلثاً قائم الزاوية له القاعدة نفسها (4.8) والارتفاع نفسه (2.5) فيكون له المساحة نفسها. ويكون طول وتر المثلث 5.412.



محيط هذا المثلث يساوي 12.712.

- بما أن رأس المثلث المقابل للقاعدة يتحرك بين هذين المثلثين مع بقاء طول القاعدة والارتفاع دون تغير، فإن المحيط يتغير بين 11.731 و12.712، وسيساوي 12 عند لحظة ما، مثل المثلث 3، 4، 5. ولا يلزم إيجاد النقطة التي يساوي المحيط عندها 12 بالضبط لتتأكد من وجودها. فمهما كانت هذه النقطة، فإن المثلث لن يكون مطابقًا عندها للمثلث 3، 4، 5 لأن جميع الأضلاع ستكون مختلفة الطول.

ولإيجاد الأطوال الحقيقية للأضلاع، يمكن استعمال صيغة هيرون (Heron)، وهي:

$$A = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}$$

حيث A مساحة المثلث، s نصف المحيط ، و a, b, c هي أطوال الأضلاع الثلاثة. وفي هذه الحالة $A = 6$، و $s = 6$، و$a = 4.8$، و$b + c = 7.2$

ويمكن حل المسألة باستعمال بعض البرمجيات، أو كما يلي:

$6 = \sqrt{6(6-4.8)(6-b)(6-(7.2-b))}$
(بالتعويض)

$36 = 7.2(6-b)(b-1.2)$ (بالتربيع وإعادة الترتيب)

$5 = 7.2b - b^2 - 7.2$ (بفك الأقواس)

$b^2 - 7.2b + 12.2 = 0$ (بإعادة الترتيب)

$b = \frac{1}{2}(7.2 \pm \sqrt{3.04})$

$b = 4.47$ أو 2.73

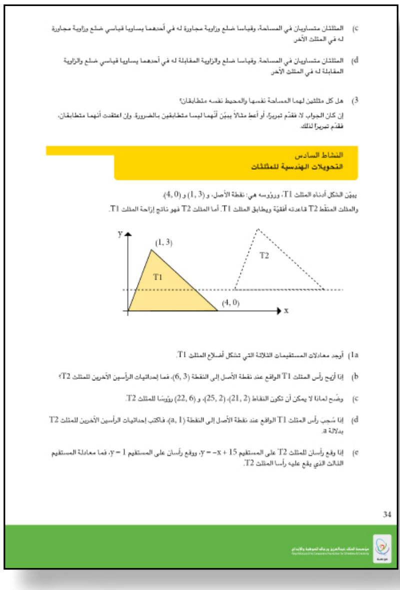
إذن أطوال الأضلاع الثلاثة للمثلث الذي يساوي مساحة ومحيط المثلث 3، 4، 5 هي 4.8، 4.47، 2.73.

فرص التقويم

يتحدى كل سؤال من هذه الأسئلة قدرة الطلاب على الاستدلال ويكشف عن مدى قدرتهم على استخدام ما يعرفونه لإجراء الاستدلال في سياقات جديدة.

هل الطلاب قادرون على استعمال أفكار زملائهم لدعم تطوير حل المسائل؟

وهل يستعملون معلوماتهم عن المثلثات لتطوير حل المسائل؟



حول هذا النشاط

يركز هذا النشاط على الهندسة الإحداثية، كما يتضمن موضوعات رياضية واسعة يجب أن يكون الطلاب ملمين بها، مثل: الميل، معادلة المستقيم، الجدل المنطقي، التمثيل الجبري، حل أنظمة من المعادلات الخطية، وتكوين الصور الذهنية. ويناسب النشاط الطلاب جميعهم، ولكن بعض الأسئلة مليئة بالتحديات (مثل السؤالين الأول والثاني)، حيث قد يحتاج الطلاب عند حل السؤال الثاني إلى بعض الدعم لفهم خاصية الضرب في الصفر وفي ∞ . أما المعلم فيحتاج إلى بعض الوقت لشرح هذه الأفكار ومساعدة الطلاب على الفهم.

خصائص الأداء المتقدم

- الإبداع: القدرة على ابتكار المنهجية المناسبة للمواقف باستعمال المهارات الرياضية والمعلومات الرياضية السابقة المتعلقة بالتحويلات الهندسية
- الفهم المتعمق للبنى الرياضية الأساسية المتعلقة بالتحويلات الهندسية وتأثيرها على خصائص الأشكال وإحداثيات النقاط

توصيات أسلوب التدريس

العمل الجماعي والمناقشة الصفيّة

إجابات الأسئلة

السؤال الأول

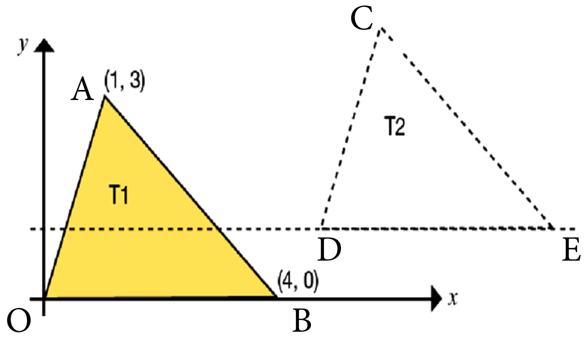
a) $y = 0$ ، $y = 3x$ ، $y = -x + 4$

b) (7, 6) و (10, 3)

c) لن تكون رؤوس المثلث T2 عند النقاط المعطاة، لأنه إذا أضيف 21 إلى كل إحداثي x، و2 إلى كل إحداثي Y، فإن إحداثيي النقطة الثالثة هما (22, 5) وليس (22, 6). ويوجد سبب آخر هو أن ارتفاع المثلث T1 يساوي 3، في حين أن ارتفاع المثلث المعطى هو 4.

d) (1+a, 4) و (4+a, 1)

e)



بناءً على الرسم أعلاه فإن معادلة المستقيم (CE) هي $y = -x + 15$

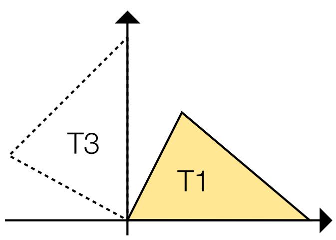
وكذلك معادلة المستقيم (AB) هي $y = -x + 4$.

تمثل النقطة E تقاطع كل من المستقيمين $y = 1$ و $y = -x + 15$ وهي (14, 1).

حيث أن المسافة بين النقطتين O و B تساوي 4 فإن احداثيي النقطة D هما (10 ,1). المستقيم (CD) يوازي المستقيم $y = 3x$ وبالتالي فإن ميله هو 3. إذاً معادلة المستقيم الثالث هو

$y = 3x - 29$.

السؤال الثاني



a) (0, 4) ، (-3, 1) و (0, 0)

b) ميل كل ضلع من الأضلاع هو $\frac{-1}{3}$ ، 1، وما لا نهاية (ميل المستقيم الرأسي).

c) حاصل ضرب ميلي مستقيمين يساوي 1-، لأن كل ضلع في المثلث T3 عمودي على الضلع المناظر له في المثلث T1.

فرص التقويم

تشير الإجابة على السؤال الأول الفرع a إلى مدى طلاقة الطلاب في العمل على معادلات المستقيمات، في حين يظهر الفرعان e وb من السؤال الأول ما إذا كان الطلاب يفهمون كيفية تغير إحداثيات النقاط تحت تأثير إزاحات بسيطة. ويظهر الجدل في الفرع c من السؤال الأول قدرة الطلاب على التعبير عن استنباط رياضي بسيط. وتشير إجابة السؤال الثاني إلى مهارة تكوين الصور الذهنية عند الطلاب. ويعطيهم الفرع c من السؤال الثاني فرصة لإظهار قدرتهم على التعميم من حالات محددة. هل يستعمل الطلاب تشكيلة واسعة من المهارات لإيجاد الإجابة الدقيقة للمسألة؟

هل يعرفون بوضوح القواعد الرياضية التي يحتاجون إليها لحل كل مسألة؟ وهل يستعملونها بوضوح عند التفكير بها؟

الوحدة السادسة

العلاقات في المثلثات

نظرة عامّة

تعد هذه الوحدة توسعة للمنهاج الأساسي حيث تغطي السمات الرئيسة للمثلثات، والعلاقات بينها.

الأهداف التعلمية للوحدة

- القدرة على استعمال الخصائص الهندسية للمثلثات، وتطبيقها في البراهين، وحل المسائل
- الألفة بالبرمجيات الهندسية، والقدرة على إنشاء أشكال ذات خصائص محددة

المعرفة السابقة

- المعرفة بمنصفات الزوايا، والمستقيمات المتوسطة في المثلث، وارتفاعات المثلث، وعلاقاتها بأنواع نقاط التقاطع في المثلث
- المعرفة الأساسية بمتباينات المثلث وعلاقات الزوايا
- المعرفة ببنية البراهين

خصائص الأداء المتقدم

القيم والاتجاهات والسمات

- الاستقصاء (النشاطان الثالث، والرابع)
- الإبداع (النشاط الثاني)
- التعاون (النشاط الخامس)

المهارات المتقدمة

- تكوين الصور الذهنية (النشاط الثاني)
- ربط الرياضيات بالحياة الواقعية (النشاط الخامس)
- الاستدلال (الأنشطة الأول، والثاني، والرابع)
- التعميم (النشاطان الثالث، والرابع)
- النمذجة (النشاط الخامس)

المعرفة والفهم المتقدمان

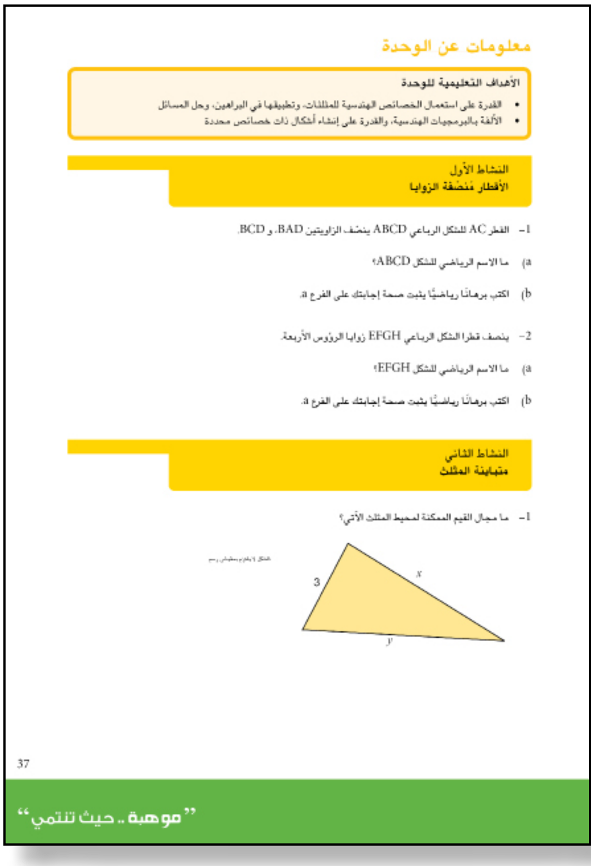
- وضوح المفاهيم (النشاط الثاني)
- الفهم المتعمق للبنية الرياضية الأساسية (النشاط الثالث)
- فهم البرهان (النشاط الأول)

مدة تدريس الوحدة

ثلاثة أسابيع، بواقع ساعتين من الجدول الدراسي الأسبوعي

المصادر

البرامج الهندسية كبرنامج GeoGebra



معلومات عن الوحدة

الأهداف التعليمية للوحدة

- القدرة على استعمال الخصائص الهندسية للمثلثات، وتطبيقها في البراهين، وحل المسائل
- الألفة بالبرمجيات الهندسية، والقدرة على إنشاء أشكال ذات خصائص محددة

النشاط الأول
الأقطار مُنصِّفة الزوايا

1- القطر AC للشكل الرباعي ABCD ينصِّف الزاويتين BAD، و BCD.

a) ما الاسم الرياضي للشكل ABCD؟

b) اكتب برهانًا رياضيًا يثبت صحة إجابتك على الفرع a.

2- ينصف قطرا الشكل الرباعي EFGH زوايا الرؤوس الأربعة.

a) ما الاسم الرياضي للشكل EFGH؟

b) اكتب برهانًا رياضيًا يثبت صحة إجابتك على الفرع a.

النشاط الثاني
متباينة المثلث

1- ما مجال القيم الممكنة لمحيط المثلث الآتي؟

37

"موهبة .. حيث تنتمي"

حول هذا النشاط

يربط هذا النشاط فكرة الزاوية المنصفة بالأشكال الرباعية. وتتطلب الأسئلة من الطلاب استكشاف الأشكال، وبالتالي معرفة قيمة المعلومات التي توصلوا إليها ومدلولاتها. وهم يحتاجون إلى إنشاء تسلسل استدلالي بدءًا من المعطيات ووصولاً إلى الاستنتاج، وبما أن نقطة البدء غير واضحة، فإنهم يحتاجون إلى إنشاء مخطط وتسمية مكوناته. وبعد ذلك يتم إنشاء البرهان، حيث تتلخص هذه الخطوة في تنظيم التسلسل الاستدلالي الذي توصلوا عبره إلى الإجابات على الجزء a من السؤال.

في السؤالين الأول والثاني فرع a ، قد يعطي بعض الطلاب إجابة موجزة لا تتجاوز كلمة "مربع"، لأن قطري المربع ينصفان زوايا الرؤوس. ومع ذلك، فقد لا يكون الشكل مربعاً، وعلى المعلم توضيح ذلك لهم، مؤكدًا على المقصود بكلمة "يجب".

خصائص الأداء المتقدم

- قدرة قوية على الاستدلال الرياضي تظهر في حلول المسائل المتعلقة بخصائص المثلثات والأشكال الرباعية
- القدرة على فهم البرهان وإنشائه والتعبير عنه كتابة وشفهياً.

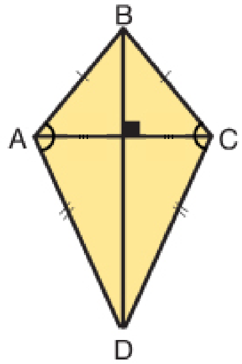
توصيات أسلوب التدريس

سحب مجموعة الطلبة الموهوبين، ثم المناقشة في مجموعات بعد العمل الفردي

إجابات الأسئلة

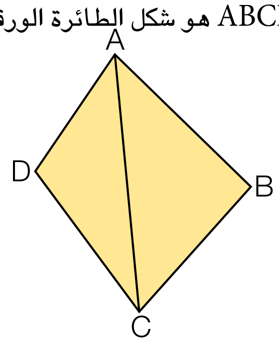
السؤال الأول

a) الطائرة الورقية شكل هندسي رباعي الأضلاع ، فيه زوجين من الأضلاع المتجاورة متساوية، قُطراه متعامدان، الزاويتان غير الرأسيتين متطابقتين، والقطر الواصل بين الزاويتين غير الرأسيتين المتقابلتين يُنصف من قبل القطر الآخر. انظر الشكل الآتي



b) مثال للبرهان:

- قياس الزاوية CAB يساوي قياس الزاوية CAD (زاوية منصفة).
- قياس الزاوية ACD يساوي قياس الزاوية ACB (زاوية منصفة).
- المثلثان ABC وADC متطابقان (زاويتان وضلع محصور بينهما ASA).
- طول AB يساوي طول AD (التطابق).
- طول BC يساوي طول CD (التطابق).
- الشكل ABCD هو شكل الطائرة الورقية.



السؤال الثاني

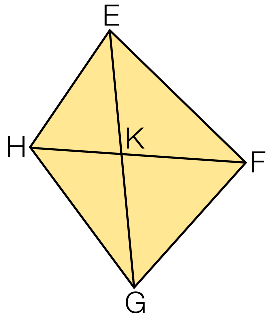
a) معيّن (الشكل هو طائرة ورقية أضلاعها الأربعة متطابقة)

b) مثال للبرهان:

المثلثان EFG و EHG متطابقان وذلك لتطابق زاويتين وضلع وبالتالي نجد أن
FG = HG و EF = EH.

وبالطريقة نفسها نجد أن المثلثين HEF و HFG متطابقين وهذا يعني أن
HG = HE و EF = FG.

بالتالي فإن جميع الأضلاع متطابقة وهذا يعني أن الشكل الرباعي هو معيّن.

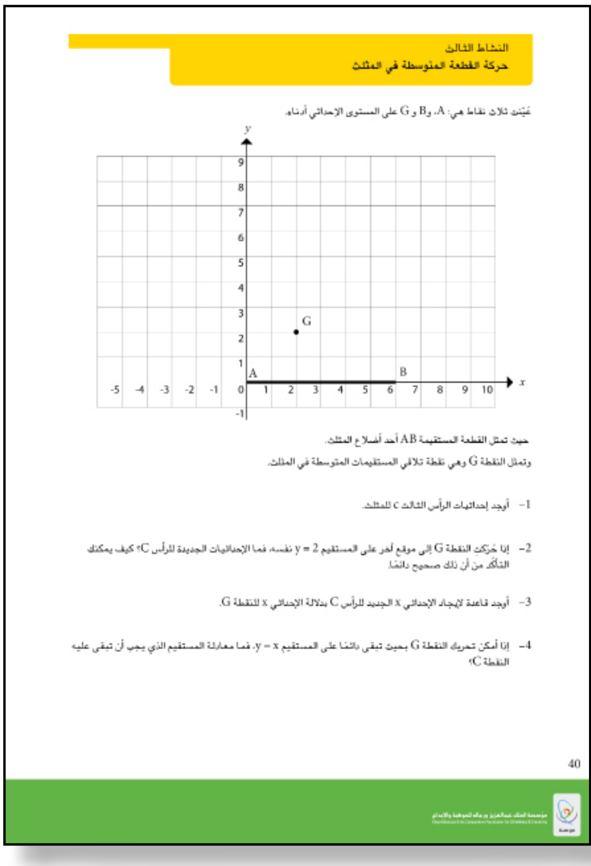


فرص التقويم

تعطى إجابات الطلاب على كلا السؤالين مؤشرًا على مدى قدرتهم على استكشاف المعلومات. والإجابة الصحيحة على السؤال الثاني فرع b تعطي مؤشرًا على قدرة الطلاب على متابعة منهجية العمل خطوة بخطوة.

هل يستعمل الطلاب معرفتهم ومهاراتهم ويطبقونها لتجزئة المسألة إلى خطوات أصغر ونمذجة الحل أو البرهان؟

هل يستطيع الطلاب التعبير عن أفكارهم لفظيًا وكتابيا بالجودة نفسها؟



النشاط الثالث
حركة القطعة المتوسطة في المثلث

عُيِّنت ثلاث نقاط هي: A، وB و G على المستوى الإحداثي أدناه.

حيث تمثل القطعة المستقيمة AB أحد أضلاع المثلث.

وتمثل النقطة G وهي نقطة تلاقي المستقيمات المتوسطة في المثلث.

1- أوجد إحداثيات الرأس الثالث c للمثلث.

2- إذا حُرِّكت النقطة G إلى موقع آخر على المستقيم $y = 2$ نفسه، فما الإحداثيات الجديدة للرأس C؟ كيف يمكنك التأكد من أن ذلك صحيح دائمًا.

3- أوجد قاعدة لإيجاد الإحداثي x الجديد للرأس C بدلالة الإحداثي x للنقطة G.

4- إذا أمكن تحريك النقطة G بحيث تبقى دائمًا على المستقيم $y = x$، فما معادلة المستقيم الذي يجب أن تبقى عليه النقطة C؟

40

حول هذا النشاط

يتناول هذا النشاط المسائل التي تتطلب استعمال متباينات المثلثات. وتستدعي الأسئلة قدراً كبيراً من الاستدلال ودقة رياضية كافية لإنشاء البراهين السليمة رياضياً. كما تتطلب المسائل أن يكون الطلاب واضحين تماماً في فهمهم لمدلول متباينة المثلث، مع التمتع بقدرة قوية على تكوين الصور الذهنية.

يحتاج الطلاب في السؤال الخامس إلى مهلة كافية لاستكشاف كل الإمكانات قبل أن يطوّروا استنتاجاتهم.

خصائص الأداء المتقدم

- الابتكار – القدرة على ابتكار الطريقة الملائمة للموقف باستعمال المهارات بطرق متباينة.
- القدرة على تكوين الصور الذهنية الواضحة عند تطوير نموذج للحل

توصيات أسلوب التدريس

العمل الفردي، والمناقشة الجماعية

إجابات الأسئلة

السؤال الأول

يجب أن يكون المحيط أكبر من 6 حيث أن $x + y > 3$. ولا يوجد حد أعلى لقيمة المحيط – فقد تكون مثلاً القيم 3، 1000، 1000 صحيحة تماماً.

السؤال الثاني

a) $10 < x < 20$، $6 < x < 12$

b) القيمة الصحيحة المحتملة لـ x هي $x = 11$. النتيجة النهائية هي $10 < x < 12$.

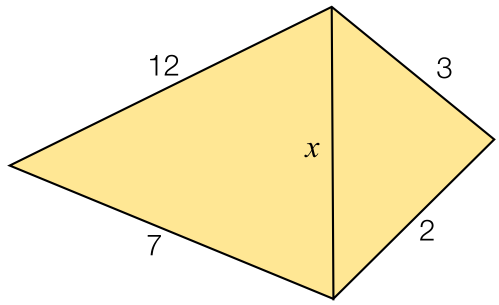
السؤال الثالث

a) $1 < z < 9$

b) قيمة y في المثلث الأول أكبر من 3 وأقل من 7، وفي المثلث الثاني، عندما تقترب y من 3 فإن Z تكون على الأقل 1، وحتى عندما تصبح y قريبة من 7، فإن Z لن تزيد أبداً على 9. وتعطي قيم y الأخرى جميع القيمَ الممكنة بين 1 و9، وبالتالي فإن z تكون أكبر من 1 وأقل من 9.

السؤال الرابع

إحدى الطرائق المتوفرة هي قسمة الشكل الرباعي إلى مثلثين، بأضلاع طولها 12، 7، x، و3، 2، x .

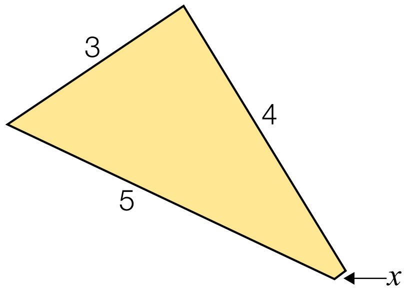


باستعمال أطوال المثلث الأول نجد أن $5 < x < 19$، ومن المثلث الثاني نجد أن $1 < x < 5$. وعليه، لا توجد قيمة لـ x تحقق المتباينتين، لذا، لا يمكن رسم هذا الشكل الرباعي. وهذه الطريقة نموذج على البرهان غير المباشر.

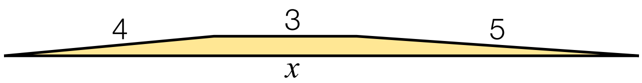
السؤال الخامس

$0 < x < 12$

أقل قياس ممكن للضلع الرابع يكون عندما تشكل الأضلاع 3، 4، 5، مثلثًا مفتوحًا قليلاً.



وأكبر قياس ممكن للضلع الرابع يكون عندما تشكل الأضلاع 3، 4، 5 خطًا مستقيمًا تقريبًا، أي أن x أقل قليلاً من 12.



فرص التقويم

تشير الإجابة على السؤال الأول إلى مدى رغبة الطلاب في تقبل نقص اليقين، لأن ما يمكن البرهنة عليه ليس واضحًا فوراً. أما الإجابة الجيدة على الأسئلة الثاني والرابع والخامس فتشير إلى قدرتهم على الاستدلال الرياضي. يجب على الطلاب تطبيق منهجية منظمة في السعي للتوصل إلى حل السؤال الثالث.

هل الطلاب قادرون على تطبيق مهاراتهم بطرائق مختلفة ليتوصلوا إلى حل المسألة؟

هل الطلاب قادرون على تكوين صور ذهنية للأشكال البيانية ثم استخدامها للتوصل إلى الحل، سواء برسم هذه الأشكال أم بدون رسمها؟

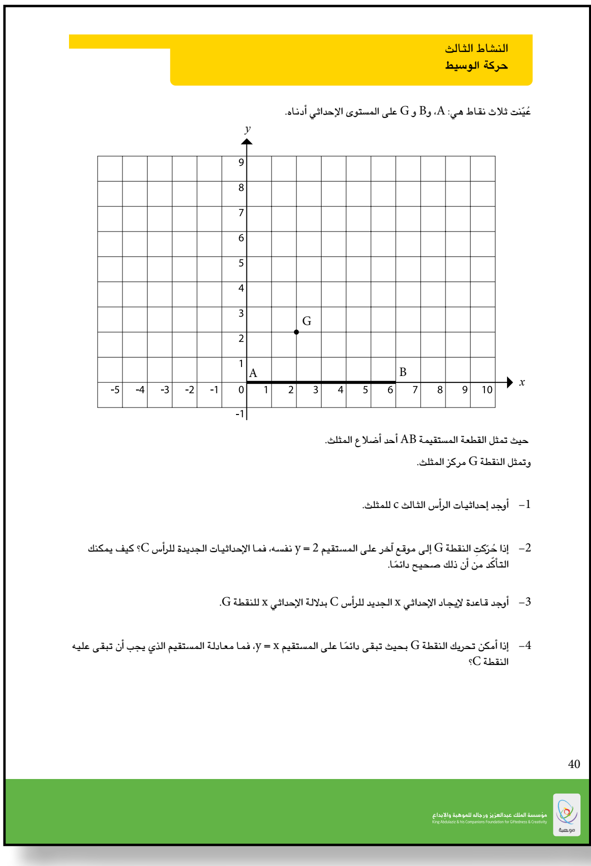
النشاط الثالث: حركة القطعة المتوسطة في المثلث

حول هذا النشاط

يتطلب هذا النشاط معرفة أن النقطة المركزية في المثلث تقسم القطعة المتوسطة بنسبة 1 : 2 من جهة الرأس (يقع ثلثا كل قطعة متوسطة بين الرأس والنقطة المركزية، ويقع الثلث الأخير بينها وبين منتصف الضلع المقابل). إذا كان الطلاب غير معتادين على هذا الموضوع، فلابد من إجراء نشاط تمهيدي.

تتيح الأسئلة اللاحقة الفرصة للطلاب لتجريب نقاط يختارونها ليتوصلوا إلى استنتاجاتهم.

يحتاج الطلاب إلى وقت إضافي للاستكشاف قبل صياغة الاستنتاجات والإجابة. وقد يرغب المعلم في تجميع بعض الإجابات وعرضها على السبورة لمساعدة تفكير المجموعة.



النشاط الثالث
حركة الوسيط

عُيّنت ثلاث نقاط هي: A، وB و G على المستوى الإحداثي أدناه.

حيث تمثل القطعة المستقيمة AB أحد أضلاع المثلث.

وتمثل النقطة G مركز المثلث.

1- أوجد إحداثيات الرأس الثالث c للمثلث.

2- إذا حُرّكتِ النقطة G إلى موقع آخر على المستقيم $y = 2$ نفسه، فما الإحداثيات الجديدة للرأس C؟ كيف يمكنك التأكّد من أن ذلك صحيح دائمًا.

3- أوجد قاعدة لإيجاد الإحداثي x الجديد للرأس C بدلالة الإحداثي x للنقطة G.

4- إذا أمكن تحريك النقطة G بحيث تبقى دائمًا على المستقيم $y = x$، فما معادلة المستقيم الذي يجب أن تبقى عليه النقطة C؟

40

خصائص الأداء المتقدم

- الاستقصاء – تطبيق منهجية منظمة في تناول المشكلات وعرض الإجابة النهائية
- الفهم المتعمق للبنية الرياضية الأساسية المرتبطة بكل من المستقيم والهندسة الإحداثية، وما يتضمناه بطبيعتهما من علاقات متبادلة عندما يكونان جزءاً من الأشكال ثنائية الأبعاد

توصيات أسلوب التدريس

سحب مجموعة الطلبة الموهوبين، والعمل الفردي المستقل، والمناقشة الصفية.

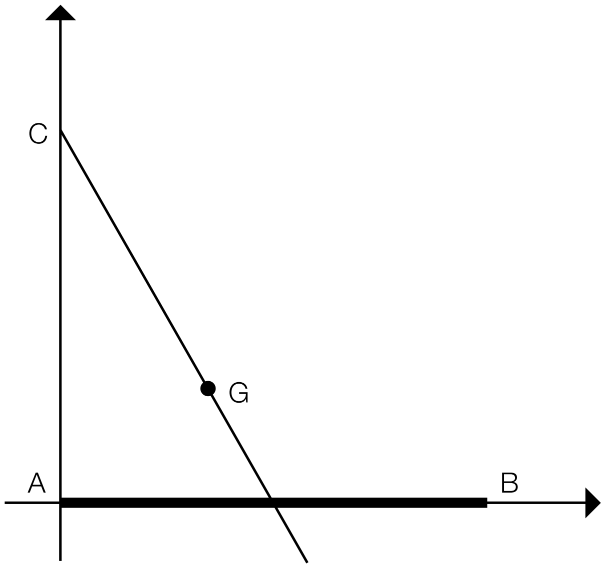
إجابات الأسئلة

السؤال الأول

$(0, 6)$

النقطة المركزية للمثلث تقع على الوسيط من منتصف المسافة بين AB وC.

نقطة منتصف AB هي $(0, 3)$. ولأن G تقع على ثلث المسافة أعلى الوسيط، يمكن للطلاب مدّ الوسيط لإيجاد الرأس C عند النقطة $(0, 6)$.



السؤال الثاني

تقع C دائمًا على المستقيم $y = 6$.

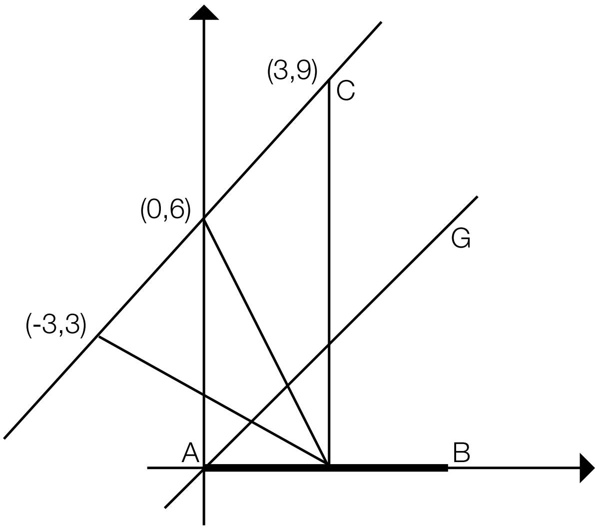
السؤال الثالث

بما أن الإحداثي y للنقطة G هو 2، فتكون المسافة الرأسية من منتصف القطعة المستقيمة AB إلى النقطة G تساوي 2 دائمًا، وبالتالي ستقع C دومًا على بعد $3 \times 2 = 6$ وحدات رأسيًا أعلى محور السينات.

اضرب الإحداثي x للنقطة G في 3، ثم اطرح 6.

السؤال الرابع

$y = x + 6$



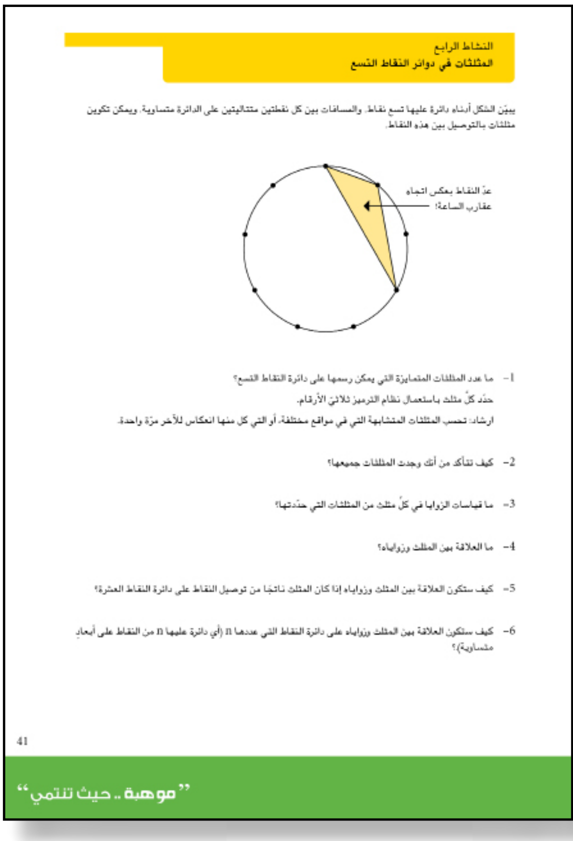
سيكون الإحداثي y للنقطة C ثلاثة أضعاف الإحداثي y للنقطة G، وبما أن النقطة G تقع على المستقيم $y = x$ فيكون إحداثيها السيني يساوي إحداثيها الصادي. وعليه، فإن الإحداثي السيني للنقطة C ثلاثة أضعاف الإحداثي السيني للنقطة G ناقصًا 6. ويزيد الإحداثي الصادي للنقطة C بـ 6 عن الإحداثي السيني لها.

فرص التقويم

تشير الإجابة على الأسئلة الثاني والثالث والخامس إلى مدى قدرة الطلاب على اتباع منهجية منظمة لاستكشاف المسألة ومعرفة أثر تغيير القيم بشكل تدريجي.

هل الطلاب قادرون على عرض مسائلهم عبر مجموعة من الخطوات المنطقية للتوصل إلى الحل في جميع مراحل النشاط؟

هل الطلاب قادرون على التعبير عن المعارف التي استعملوها في حل المسألة؟


النشاط الرابع
المثلثات في دوائر النقاط التسع

يبيّن الشكل أدناه دائرة عليها تسع نقاط. والمسافات بين كل نقطتين متتاليتين على الدائرة متساوية. ويمكن تكوين مثلثات بالتوصيل بين هذه النقاط.

1- ما عدد المثلثات المتمايزة التي يمكن رسمها على دائرة النقاط التسع؟
حدّد كلّ مثلث باستعمال نظام الترميز ثلاثيّ الأرقام.
ارشاد: تحسب المثلثات المتشابهة التي في مواقع مختلفة، أو التي كل منها انعكاس للآخر مرّة واحدة.

2- كيف تتأكد من أنك وجدت المثلثات جميعها؟

3- ما قياسات الزوايا في كلّ مثلث من المثلثات التي حدّدتها؟

4- ما العلاقة بين المثلث وزواياه؟

5- كيف ستكون العلاقة بين المثلث وزواياه إذا كان المثلث ناتجًا من توصيل النقاط على دائرة النقاط العشرة؟

6- كيف ستكون العلاقة بين المثلث وزواياه على دائرة النقاط التي عددها n (أي دائرة عليها n من النقاط على أبعاد متساوية)؟

41

"موهبة .. حيث تنتمي"

حول هذا النشاط

يستعمل النشاط العلاقات الخاصة بالزوايا في سياق حل المسألة. وقد تكون العلاقة بين الأضلاع والزوايا التي تدعم النشاط غير متوقعة بالنسبة للعديد من الطلاب.

خصائص الأداء المتقدم

- الاستقصاء – تطبيق منهجية منظمة في تناول المشكلات عن طريق تطوير نظام لرسم المثلثات وتسجيل الاستنتاجات
- امتلاك قدرة قوية على الاستدلال الرياضي عند عرض نواتج البحث وتعميم القوانين المرتبطة بقياسات الزوايا.

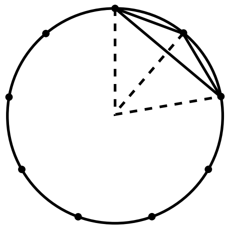
توصيات أسلوب التدريس

العمل مع الصف كاملاً والتدريس الفارقي خلال تنفيذ النشاط

تأكد من أن لدى الطلاب رؤية واضحة حول المقصود بعبارة "مختلف" في السؤال الأول، إذ أن المثلثات الناتجة عن الانعكاس أو الدوران لا تعد مختلفة.

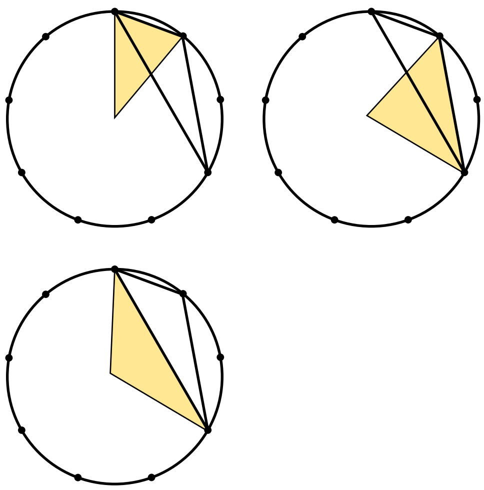
المثلث 6، 2، 1 مثلاً هو نفسه المثلث 2، 6، 1، وهكذا.

شجع الطلاب في السؤال 3 على مناقشة الأساليب الممكنة ضمن مجموعاتهم وتقديم الدعم المناسب لهم. فمثلاً، يمكنك أن تسأل: هل رسم أنصاف الأقطار مفيد؟



أعط الطلاب فرصة لتجريب أفكارهم. فإذا استعملوا القياس أولاً، فوضِّح لهم بأن رسوم دوائر النقاط التسع غير دقيقة، مما يعني أنهم يحتاجون إلى استعمال الاستدلال الخاص بالزاوية.

ساعد الطلاب عند الضرورة على إيجاد قياسات زوايا كل مثلث بتحديد زوايا المثلثات الثلاثة الأخرى، حيث لكل مثلث منها رأس في مركز الدائرة. فمثلاً، بالنسبة للمثلث 1، 2، 6:

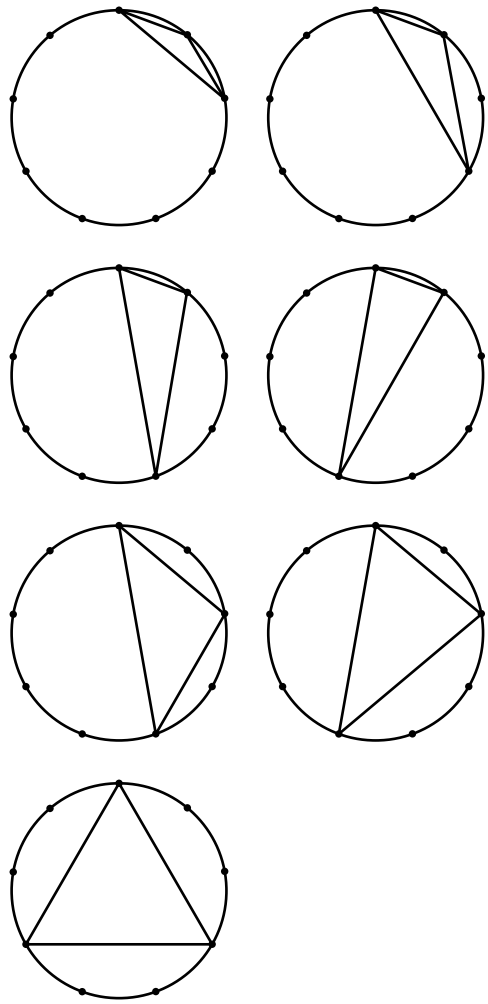


تأكد من أن الطلاب يفهمون المقصود بـ"دائرة ذات n نقطة" في السؤال 6، وشجعهم على التحقق من صحة الصيغة العامة التي يجدونها بتطبيقها على دوائر بأعداد مختلفة من النقاط.

إجابات الأسئلة

السؤال الأول

توجد سبعة مثلثات محتملة:



ونقاط رؤوسها الثلاثة هي:

7, 1, 1

6, 2, 1

5, 3, 1

4, 4, 1

5, 2, 2

4, 3, 2

3, 3, 3

السؤال الثاني

بما أنه توجد تسع نقاط على الدائرة، فيجب أن يكون مجموع الأعداد المستعملة في التسمية هو 9. يمكن عمل سبع طرائق من ثلاثة أعداد كلية.

الطلاب الذين يعملون بأسلوب منهجي منظم قد يثقون في أنهم حصلوا على النواتج جميعها إلاّ أنهم يواجهون صعوبة في التعبير عن ذلك رياضيًا. وسيساعدهم ترقيم المثلثات على صياغة الاستدلال المطلوب.

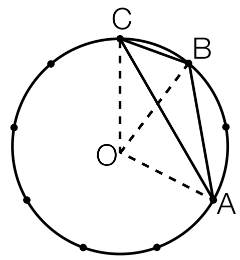
السؤال الثالث

قياسات زوايا المثلثات السبعة هي:

المثلث	الزوايا
المثلث 1,1, 7	20°, 20°, 140°
المثلث 1,2, 6	20°, 40°, 120°
المثلث 1,3, 5	20°, 60°, 100°
المثلث 1,4, 4	20°, 80°, 80°
المثلث 2,2, 5	40°, 40°, 100°
المثلث 2,3, 4	40°, 60°, 80°
المثلث 3,3, 3	60°, 60°, 60°

وجدت قياسات الزوايا بالأسلوب الاستدلالي الموضح على الصفحة التالية، والذي استخدم لإيجاد قياسات زوايا المثلث 1، 2، 6.

المثلث 1، 2، 6



المثلث COB	
$\angle COB = 360 \div 9 = 40^\circ$	مجموع الزوايا عند نقطة واحدة يساوي 360 درجة. بما أن المسافة ثابتة بين كل نقطة على المحيط، فإن الزوايا تتساوى.
$\angle BCO = \angle OBC$ $= (180 - 40) \div 2$ $= 70^\circ$	المثلث COB متساوي الساقين حيث أن OB وOC نصفا قطر.
المثلث BOA	
$\angle BOA = 2 \times 40 = 80^\circ$ $\angle OAB = \angle ABO$ $= (180 - 80) \div 2$ $= 50^\circ$	المثلث ABO متساوي الساقين حيث أن OB وOA نصفا قطر.
المثلث COA	
$\angle COA = 3 \times 40 = 120^\circ$ $\angle ACO = \angle OAC$ $= (180 - 120) \div 2$ $= 30^\circ$	المثلث COA متساوي الساقين حيث أن CO وAO نصفا قطر.
الزاوية في المثلث 1، 2، 6	
$\angle BCA = \angle BCO - \angle ACO$ $= 70 - 30$ $= 40^\circ$ $\angle CAB = \angle OAB - \angle OAC$ $= 50 - 30$ $= 20^\circ$ $\angle ABC = \angle ABO + \angle OBC$ $= 50 + 70$ $= 120^\circ$	

الزوايا في المثلثات 1، 2، 6 تساوي °20، °40، °120

السؤال الرابع

يجب أن يدرك الطلاب أن النسبة بين قياسات الزوايا تناظر النسبة بين ترقيم المثلثات، وقد يفضلوا تسجيلها على صورة تعبيرات جبرية: $20a^\circ$، $20b^\circ$ و $180^\circ - 20(a+b)^\circ$.

السؤال الخامس

قياسات زوايا المثلث a, b, c في دائرة ذات عشر نقاط هي: $18a^\circ$، $18b^\circ$، وَ $180 - 18(a+b)^\circ$.

مجموع قياسات زوايا المثلث المرسوم في دائرة ذات 9 نقاط 180 درجة، مقسم إلى 9 أجزاء كل منها 20 درجة. وفي المثلث المرسوم في دائرة ذات 10 نقاط، يكون مجموع قياسات الزوايا 180 درجة،مقسماً إلى 10 أجزاء كل منها 18 درجة. وتكون نسب الزوايا $a : b : 10 - (a+b)$.

السؤال السادس

قياسات زوايا المثلث a, b, c في دائرة ذات n نقطة هي:

$$\frac{180a}{n} \text{ ، } \frac{180b}{n} \text{ ، } 180 - \frac{180(a+b)}{n}$$

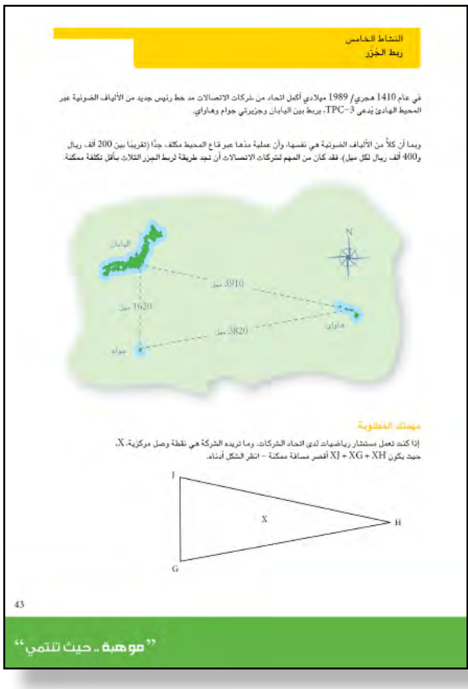
وعليه فإن النسبة بين قياسات الزوايا في دائرة ذات n نقطة هي $a : b : n - (a+b)$ ويجب تقسيم مجموع زوايا المثلث °180 درجة على n.

فرص التقويم

تشير إجابة السؤال الأول إلى قدرة الطلاب على اتباع الأسلوب المنهجي لتفادي تكرار المثلث أكثر من مرّة واحدة.

هل الطلاب قادرون على مواصلة طريقة الرسم وترقيم المثلثات وقياسات الزوايا؟

هل يستعمل الطلاب الرياضيات عند مناقشة المثلثات وعند تعميم ما وجدوه والربط بينها؟



النشاط الخامس
ربط الجُزر

في عام 1410 هجري/ 1989 ميلادي أكمل اتحاد من شركات الاتصالات مد خط رئيس جديد من الألياف الضوئية عبر المحيط الهادئ يُدعى TPC-3، يربط بين اليابان وجزيرتي جوام وهاواي.

وبما أن كلاً من الألياف الضوئية هي نفسها، وأن عملية مدّها عبر قاع المحيط مكلف جدًا (تقريبًا بين 200 ألف ريال و400 ألف ريال لكل ميل)، فقد كان من المهم لشركات الاتصالات أن تجد طريقة لربط الجزر الثلاث بأقل تكلفة ممكنة.

مهمتك المطلوبة

إذا كنت تعمل مستشار رياضيات لدى اتحاد الشركات، وما تريده الشركة هي نقطة وصل مركزية X، حيث يكون XH + XG + XJ أقصر مسافة ممكنة - انظر الشكل أدناه.

43

"موهبة .. حيث تنتمي"

حول هذا النشاط

هذه مشكلة من واقع الحياة يمكن معالجتها باستعمال خصائص المثلثات. وهي تعتمد على مسألة مذكورة في بحث بعنوان: "استعمال البرمجيات الهندسية الديناميكية لنقل مسائل الحياة الواقعية إلى الفصل المدرسي: خبرات معلمي الرياضيات بمشاكل الشبكات البسيطة". (نشر في: مجلة تدريس الرياضيات وتطبيقاتها، المجلد 27، العدد 1، الصفحات 24-37) (تأليف: غيوفن، ب (Guven, B) (2008).

يجب على الطلاب عند تناول هذا النشاط الإستعانة بالرياضيات التي تعلموها لمعالجة المشاكل الواقعية. ويجب مساعدتهم على تقبل ذلك، باستعمال برمجية الهندسة الديناميكية، مثل GeoGebra (موجودة على الموقع www.www.geogebra.org)، ومن الصعب تحديد القيم الدقيقة، لذا يمكن قبول التقريب. سوف يستفيد الطلاب من العمل في مجموعات لإجراء النمذجة بواسطة الحاسوب ومناقشة الأساليب والنتائج.

خصائص الأداء المتقدم

- القدرة على ربط الرياضيات بواقع الحياة من خلال إيجاد علاقات بين المسألة والبنى الرياضية
- القدرة على ابتكار نماذج رياضية بتطبيق المهارات والمعرفة بكل من المثلث والدائرة

توصيات أسلوب التدريس

سحب مجموعة الطلبة الموهوبين، المناقشات والعمل ضمن المجموعات.

إجابات الأسئلة

السؤال الأول

يعطي مركز الدائرة الداخلية أقل مجموع للمسافات (5205 أميال تقريبًا).

يليه مركز التعامد (المجموع 5265 ميلاً تقريبًا)، وتتبعه النقطة المركزية للمثلث، (المجموع 5515 ميلاً تقريبًا)، ثم مركز الدائرة المحيطة (المجموع 5935 ميلاً تقريبًا).

السؤال الثاني

المنهجية المحددة في الرسم البياني يعطى قيمة أصغر 5175 هي ميلاً تقريباً.

بإمكان الطلاب الإطلاع على نقاط ستاينر (Steiner) عبر الإنترنت، الموقع http://nuweb2.neu.edu/math/cp/blog/SteinerSoap/Steiner_Josh.htm

تتميز نقاط ستاينر (Steiner) بأن قياس الزاوية المقابلة لكل ضلع من أضلاع المثلث يساوي 120°. ويمكن البرهنة على ذلك باستعمال خصائص الشكل الرباعي الدائري المكون من رؤوس المثلث متطابق الأضلاع ونقطة ستاينر (Steiner) حيث قياس زاوية الرأس المقابل 60°.

السؤال الثالث

يجب أن يتضمن التقرير الأطوال التقريبية التي تنشأ عن كل بديل، ومعرفة المنهجية المطلوب اتباعها لتحديد نقطة الربط المركزية التي تعطي أقل طول ممكن للكوابل.

فرص التقويم

تظهر بحوث الطلاب في السؤال الأول مدى فهمهم لخصائص مركز الدائرة المحيطة بالمثلث، ومركز التعامد، ومركز الدائرة الداخلية بالمثلث، والنقطة المركزية للمثلث، بحيث يمكنهم إنشاؤها على برنامج GeoGebra أو أي برمجية هندسية أخرى. ويشير تقرير الطلاب في السؤال الثالث إلى قدرتهم على تنظيم أفكارهم والتعبير عنها بشكل جيد.

هل الطلاب قادرون على توضيح العلاقة بين المسألة والبنى الرياضية المعروفة لهم، مثل خصائص المثلثات وإنشاء مختلف نقاط تلاقي المستقيمات داخل المثلث؟

الوحدة السابعة
الأشكال الرباعية

نظرة عامّة

تقدم هذه الوحدة أنشطة متنوعة ومختلفة ذات علاقة بالأشكال الرباعية، مع التعامل بإيجاز مع الأنماط والنسب والشبكات والإحداثيات والدوائر المرسومة حول الأشكال.

الهدف التعلمي للوحدة

- تطوير فهم الطلاب لخصائص الأشكال الرباعية المختلفة

المعرفة السابقة

- معرفة أنواع الأشكال الرباعية المختلفة وبعض من أهم خصائصها
- معرفة كيفية حساب مساحة مجموعة من الأشكال المختلفة

خصائص الأداء المتقدم

القيم والاتجاهات والسمات

- الاستقصاء (النشاط الثاني)
- المجازفة (النشاطان الثاني، والرابع)
- الإبداع (النشاط الثالث)
- التعاون (النشاطان الثاني، والرابع)

المهارات المتقدمة

- التعميم (النشاطان الأول، والثاني)
- الطلاقة (النشاطان الأول، والثالث)
- الدقّة (النشاطان الأول، والرابع)

المعرفة والفهم المتقدمان

- الفهم المتعمق للبنى الرياضية الأساسية (النشاط الأول)
- الربط بين المواضيع الرياضية (النشاط الثالث)
- فهم الأفكار الكبرى (النشاط الرابع)
- فهم البرهان (النشاط الثالث)

مدة تدريس الوحدة

4 إلى 6 ساعات

المصادر

أوراق إضافية (لجميع الأسئلة)

معلومات عن الوحدة

الهدف التعلمي للوحدة

- تطوير فهم الطلاب لخصائص الأشكال الرباعية المختلفة

النشاط الأول
تناقص المساحات

السؤال الأول

يبين الشكل الآتي أربعة مربعات. وتقع رؤوس كل مربع من المربعات الثلاثة الداخلية عند نقطة منتصف ضلع من أضلاع المربع الأكبر التالي له.

a) افرض أن مساحة المربع الأكبر 100سم^2. احسب أطوال أضلاع المربعات جميعها ومساحاتها، واستخدم هذه النتائج لإكمال الجدول الآتي:

المربع	طول الضلع	المساحة	نسبة مساحة المربع إلى مساحة أكبر مربع
1			
2			
3			
4			

b) صف النمط في مساحة هذه المربعات.

46

حول هذا النشاط

يعتمد هذا النشاط على سياق بسيط لإيجاد العلاقة بين عناصر المتتابعات، ثم السؤال عما إذا كانت هذه العلاقة تنطبق في مواقف أخرى. وسيحتاج الطلاب إلى استعمال نظرية فيثاغورس لحساب المساحات بطرق مختلفة. ويجب على المعلم مراقبة أداء الطلاب عند التعامل مع الجذور التربيعية.

خصائص الأداء المتقدم

- القدرة على التعميم من هذه النماذج المتطورة أثناء بحث المسائل
- الفهم المتعمق للبنى الرياضية الأساسية فيما يتعلق بخصائص الأشكال الهندسية.

توصيات أسلوب التدريس

سحب مجموعة الطلبة الموهوبين، والعمل الفردي، والمناقشات الجماعية.

مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع
King Abdulaziz & his Companions Foundation for Giftedness & Creativity

إجابات الأسئلة

السؤال الأول

(a

المربع	طول الضلع	المساحة	المساحة كنسبة من مساحة المربع الأكبر
1	10	100	1
2	$5\sqrt{2}$	50	0.5
3	5	25	0.25
4	$2{,}5\sqrt{2}$	12.5	0.125

(b تنقص المساحة بمقدار النصف، في كل مرة.

السؤال الثاني

(b الأشكال الناتجة تتبادل بين المعينات والمستطيلات.

(c

الشكل الرباعي	طول الضلع	المساحة	المساحة كنسبة من مساحة الشكل الرباعي الأكبر
1	16 في 12	192	1
2	10 في 10	96	0.5
3	8 في 6	48	0.25
4	5 في 5	24	0.125
5	4 في 3	12	0.0625
6	2.5 في 2.5	6	0.03125

السؤال الثالث

- عند البدء بمتوازي الأضلاع ستظهر سلسلة من متوازيات الأضلاع.
- عند البدء بشبه المنحرف ستظهر سلسلة من متوازيات الأضلاع.
- عند البدء بشكل الطائرة الورقية ستظهر سلسلة من المستطيلات المتبادلة مع المعينات (كلاهما عبارة عن متوازي أضلاع متماثل حول محور التناظر).
- عند البدء بشكل رباعي مختلف الأضلاع، ستظهر سلسلة من متوازيات الأضلاع.

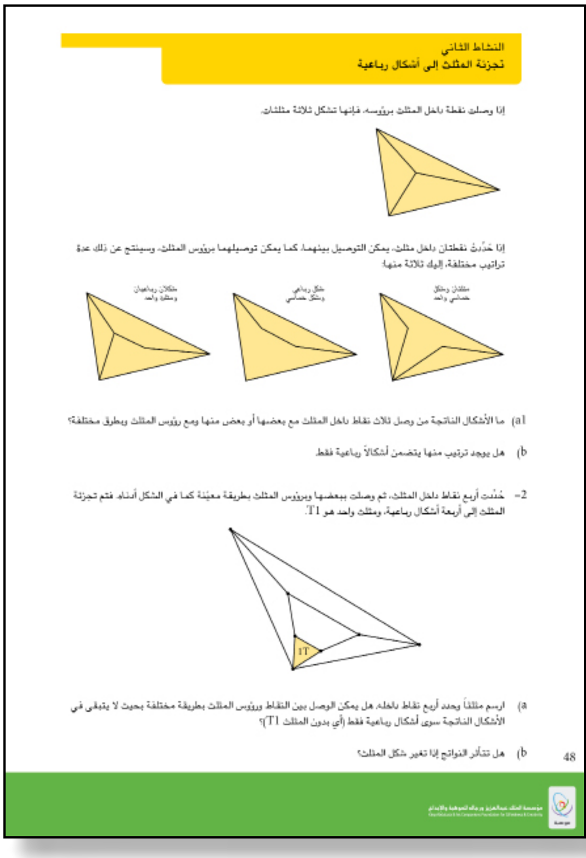
وفي الحالات جميعها تنقص المساحة بمقدار النصف في كل مرة.

فرص التقويم

يفيد هذا النشاط في تقويم طلاقة الطلاب في إيجاد المساحات وتقييم دقتهم عند إتباع سلسلة الخطوات التي تنطوي على كميات متدرجة الصغر. والطلاب الذين يعتمدون على القياس لا يقدرون أهمية الدقة مثل الذين يمزجون بين القياس والعمليات الحسابية.

هل يستطيع الطلاب تعميم النتائج التي حصلوا عليها من النماذج التي طوروها وأن يعبروا عنها كتابياً وشفهياً؟

هل هم قادرون على استعمال خصائص الأشكال الهندسية في إجراء البحث وحل المسائل في هذا النشاط؟


النشاط الثاني
تجزئة المثلث إلى أشكال رباعية

إذا وصلت نقطة داخل المثلث برؤوسه، فإنها تشكل ثلاثة مثلثات.

إذا حُدِّدتْ نقطتان داخل مثلث، يمكن التوصيل بينهما، كما يمكن توصيلهما برؤوس المثلث، وسينتج عن ذلك عدة تراتيب مختلفة، إليك ثلاثة منها:

a1) ما الأشكال الناتجة من وصل ثلاث نقاط داخل المثلث مع بعضها أو بعض منها ومع رؤوس المثلث وبطرق مختلفة؟

b) هل يوجد ترتيب منها يتضمن أشكالاً رباعية فقط.

2- حُددت أربع نقاط داخل المثلث، ثم وصلت ببعضها وبرؤوس المثلث بطريقة معيّنة كما في الشكل أدناه. فتم تجزئة المثلث إلى أربعة أشكال رباعية، ومثلث واحد هو T1.

a) ارسم مثلثاً وحدد أربع نقاط بداخله. هل يمكن الوصل بين النقاط ورؤوس المثلث بطريقة مختلفة بحيث لا يتبقى في الأشكال الناتجة سوى أشكال رباعية فقط (أي بدون المثلث T1)؟

b) هل تتأثر النواتج إذا تغير شكل المثلث؟

48

حول هذا النشاط

يعتبر هذا النشاط استكشافي وعملي في الآن نفسه، وسيكون من المفيد أن يعمل الطلاب بشكل تعاوني في مجموعات ثنائية أو صغيرة بحيث يجربون أفكاراً مختلفة، وشرح طريقة تفكيرهم لبعضهم بعضًا. ويمكن لجميع الطلاب بحث هذه المسألة بصورة منفردة، ولكن قد يحتاج بعضهم إلى الدعم والمساعدة لتعميم النتائج التي حصلوا عليها، أو للتغلب على ارتباكهم بسبب العجز على إيجاد الترتيب المطلوب باستعمال الأشكال الرباعية وحدها. وينبغي على المعلم مراقبة محاولاتهم لحل مسائل النشاط من خلال توصيل النقاط بالحواف.

خصائص الأداء المتقدم

- الاستقصاء – استعمال منهجية الاستقصاء وطرح السؤال "ماذا لو ....؟"
- القدرة على تعميم الحقائق من نتائج البحوث المتعلقة بخصائص المثلثات والأشكال الرباعية

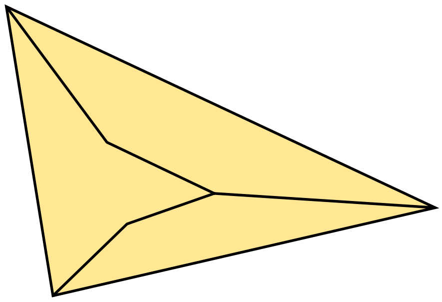
توصيات أسلوب التدريس

العمل في مجموعات ثنائية والمناقشة الصفية

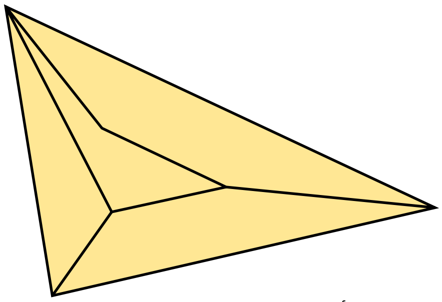
إجابات الأسئلة

السؤال الأول

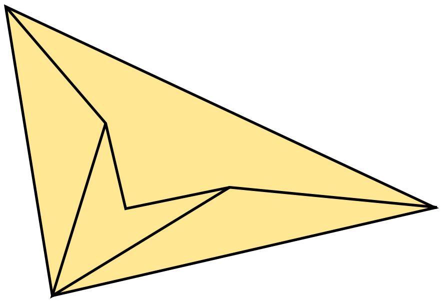
أ) هناك عدّة إمكانيات، منها على سبيل المثال:



شكلان رباعيان وشكل خماسي



ثلاثة أشكال رباعية ومثلث واحد



شكل رباعي واحد، ومثلثان وشكل خماسي

b) لا

السؤال الثاني

a) لا

b) لا

c) لا

d) يجب أن يكون السبب واحد مما يلي: يضيف أي شكل رباعي متكون عددًا زوجيًا من الأضلاع إلى إجمالي الأضلاع في الرسم. وبما أن الرسم يبدأ بثلاثة أضلاع، فلا بد أن هناك عدداً فردياً من الأضلاع في النهاية، ولذلك لا يمكن الحصول على أشكال رباعية فقط.

السؤال الثالث

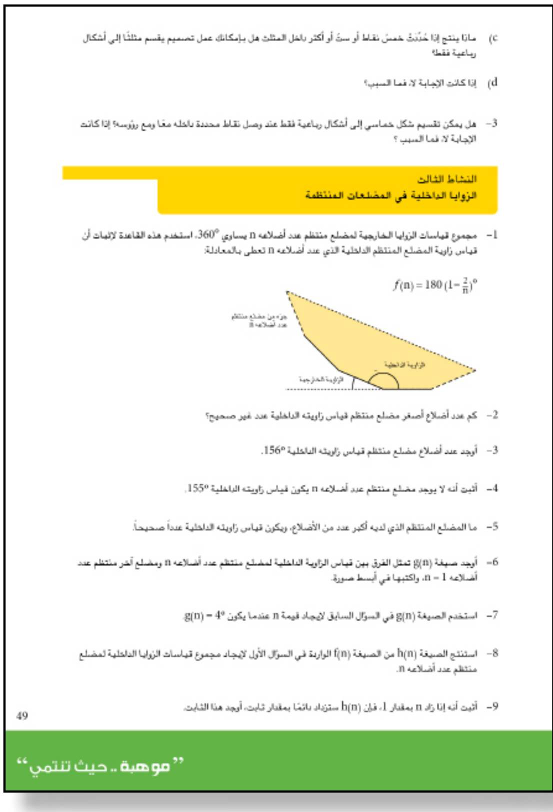
لا. السبب بسيط وهو أن كل شكل خماسي يتكون من شكل رباعي ومثلث ولا يمكن تجزئة المثلث إلى أشكال رباعية.

فرص التقويم

بينما يستكشف الطلاب حل المسألة في هذا النشاط، انتبه إلى دلائل تشير إلى قدرتهم على إجراء الاستقصاء وإتباع منهجيته. وأثناء عمل الطلاب في مجموعات أو مع زميل، يمكن للمعلم ملاحظة مدى تقبلهم لحالة نقص اليقين (المجازفة). توفر الإجابة على الأسئلة: الثاني فرع b وَ d والثالث دليلاً واضحًا على قدرة الطلاب على التعميم.

هل بحث الطلاب حل المسألة بصورة فردية وجربوا احتمالات مختلفة؟

هل الطلاب قادرون على تعميم النتائج التي حصلوا عليها، ثم عرضها على الآخرين باستعمال الحقائق الرياضية وتعبيرات سليمة؟


c) ماذا ينتج إذا حُدِّدت خمس نقاط أو ستٌ أو أكثر داخل المثلث هل بإمكانك عمل تصميم يقسم مثلثًا إلى أشكال رباعية فقط؟

d) إذا كانت الإجابة لا، فما السبب؟

3- هل يمكن تقسيم شكل خماسي إلى أشكال رباعية فقط عند وصل نقاط محددة داخله معًا ومع رؤوسه؟ إذا كانت الإجابة لا، فما السبب ؟

النشاط الثالث
الزوايا الداخلية في المضلعات المنتظمة

1- مجموع قياسات الزوايا الخارجية لمضلع منتظم عدد أضلاعه n يساوي $360°$. استخدم هذه القاعدة لإثبات أن قياس زاوية المضلع المنتظم الداخلية الذي عدد أضلاعه n تعطى بالمعادلة:

$$f(n) = 180\left(1-\frac{2}{n}\right)°$$

2- كم عدد أضلاع أصغر مضلع منتظم قياس زاويته الداخلية عدد غير صحيح؟

3- أوجد عدد أضلاع مضلع منتظم قياس زاويته الداخلية $156°$.

4- أثبت أنه لا يوجد مضلع منتظم عدد أضلاعه n يكون قياس زاويته الداخلية $155°$.

5- ما المضلع المنتظم الذي لديه أكبر عدد من الأضلاع، ويكون قياس زاويته الداخلية عدداً صحيحاً.

6- أوجد صيغة $g(n)$ تمثل الفرق بين قياس الزاوية الداخلية لمضلع منتظم عدد أضلاعه n ومضلع آخر منتظم عدد أضلاعه $n - 1$، واكتبها في أبسط صورة.

7- استخدم الصيغة $g(n)$ في السؤال السابق لإيجاد قيمة n عندما يكون $g(n) = 4°$.

8- استنتج الصيغة $h(n)$ من الصيغة $f(n)$ الواردة في السؤال الأول لإيجاد مجموع قياسات الزوايا الداخلية لمضلع منتظم عدد أضلاعه n.

9- أثبت أنه إذا زاد n بمقدار 1، فإن $h(n)$ ستزداد دائمًا بمقدار ثابت، أوجد هذا الثابت.

49

"موهبة .. حيث تنتمي"

حول هذا النشاط

يتسم هذا النشاط عموماً بأنه عملي ويمكن تناوله إما جبريًا أو عدديًا، علماً بأنه يتعلق هنا بسياق هندسي محدد.

يعتبر السؤال الأول مثالاً جيداً على البرهان البنّاء المباشر، ويوفر تمريناً جيداً حتى بالنسبة للطلاب الذين اطلعوا سابقًا على الجدل الرياضي المطلوب.

يمكن استخدام برنامج الجداول الالكترونية للكثير من الأنشطة التالية، فمثلاً صيغة حساب قيم الزوايا الداخلية والأوجه المرتبطة بها، عندما n تساوي 1 إلى 360. ويتم أسفل هذه الصفحة عرض مثال من أحد الجداول الإلكترونية التي يمكن استخدامها:

هذه المنهجية تؤدي إلى تعميق الفهم بشكل لا يتحقق إذا اكتفى الطالب باستعمال الورقة والقلم، كما أنها تحتاج إلى قدر أقل من التفكير الرياضي والطلاقة في استعمال الجبر. لذا، شجع الطلاب على استعمال الأسلوبين معاً، حيث يمكن استخدام الأسلوب العددي في حل الأسئلة من الثالث إلى الخامس، إضافة إلى السؤال السابع، والأسلوب الجبري لحل الأسئلة الأخرى، مع إمكانية استعمال أي أسلوب منهما في التأكد من صحة الإجابات. ويساعد استخدام مزيج من الأسلوبين على تأكيد العلاقة والاتساق بين المجالات الرياضية المختلفة.

خصائص الأداء المتقدم

- الإبداع – القدرة على ابتكار المنهجية التي تلائم الموقف والتي تستفيد من مهارات الطلاب المناسبة بطرق جديدة وغير مألوفة لهم.
- تقدير الترابط بين مختلف مجالات الرياضيات المتعلقة بالجبر والأشكال الهندسية

توصيات أسلوب التدريس

سحب مجموعة الطلبة الموهوبين، والعمل في مجموعات ثنائية، والمناقشة الجماعية

الأعمدة						
		A (n)	B ($f(n)$)	C ($g(n)$)	D ($h(n)$)	E ($h(n)$–$h(n$–1))
الصفوف	1	3	180*(1–2/A1)	(فارغ)	180(A1–2)	(فارغ)
	2	4	180*(1–2/A2)	B2–B1	180(A2–2)	D2–D1
	3	5	180*(1–2/A3)	B3–B2	180(A3–2)	D3–D2
	…	…	…	…	…	…

إجابات الأسئلة

السؤال الأول

حيث أن مجموع n من الزوايا الخارجية هو 360 درجة، فإن قياس كل زاوية خارجية يساوي $\frac{360}{n}$، مما يؤدي إلى أن قياس كل زاوية داخلية يساوي $180 - \frac{360}{n}$. وبإخراج عامل مشترك، 180 درجة، نحصل على النتيجة.

السؤال الثاني

7 أضلاع

الطريقة الفضلى هي ألا يقوم الطلاب بحساب صيغة القيم المتتالية لـP، ولكن اتباع التفكير الاستراتيجي في تأمل شكل الصيغة نفسها. فالصيغة تعتمد على قسمة 360 على n، وبنظرة سريعة إلى عوامل 360، يتضح أن أول عدد غير صحيح ينتج عندما تكون قيمة n تساوي 7.

السؤال الثالث

15 أضلاع

الطريقة الجبرية لحل هذه المسألة هي حل المعادلة لإيجاد عدد الأضلاع عندما يكون قياس الزاوية الداخلية 156 درجة. ومن الممكن أيضاً اتباع طريقة التجريب والتحسين.

السؤال الرابع

حل المعادلة لإيجاد عدد الأضلاع عندما يكون قياس الزاوية الداخلية 155درجة، يعطي عددًا غير صحيح (14.4).

السؤال الخامس

360 ضلعًا.

في حالة اتباع الأسلوب الجبري، فإن هذا السؤال يستدعي الاستدلال الرياضي المتأني. ومن المؤكد أن قياس الزاوية الداخلية سيكون دائماً أقل من 180 درجة، لذلك فإن أكبر قيمة لقياس الزاوية بعدد صحيح هي 179 درجة. ولكن يجب تدقيق إذا كان ذلك يعطي قيمة n بعدد صحيح، وهو ما ينطبق بالفعل، أي أن n تساوي 360 درجة.

السؤال السادس

$$g(n) = f(n) - f(n-1) = \frac{360}{n(n-1)}$$

السؤال السابع

10

إذا كانت $4 = \frac{360}{n(n-1)}$ فإن $n(n-1) = 90$. وبالتالي $n =$ 10 (من خلال تفحص عوامل 90).

السؤال الثامن

من الواضح أن المضلع المنتظم الذي عدد أضلاعه n يكون عدد زواياه الداخلية أيضاً n، وعليه فإن:

$$h(n) = n \times f(n) = 180(n-2)$$

ينطبق ذلك أيضاً على المضلع غير المنتظم. ويمكن توسيع هذا الموضوع بطرح السؤال التالي على الطلاب: "هل يمكن تطبيق العلاقة على المضلعات غير المنتظمة؟"

السؤال التاسع

$$h(n) - h(n-1) = 180$$

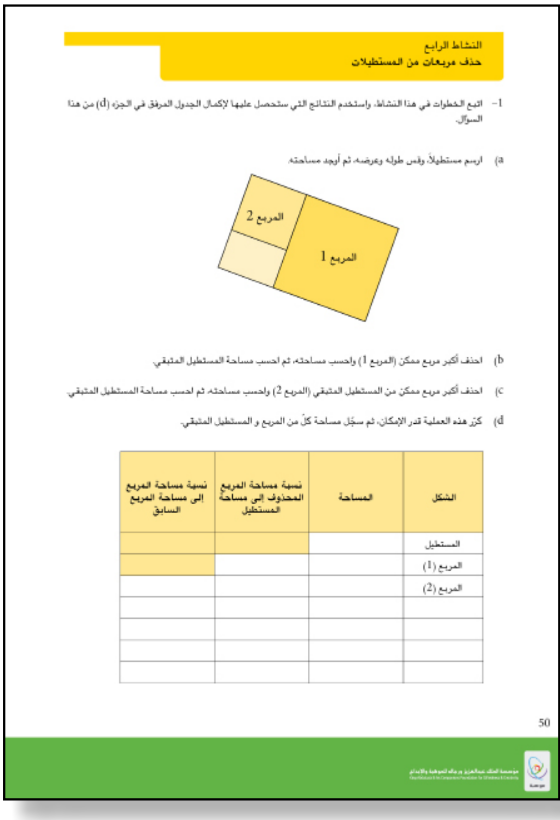
أي أن مجموع الزوايا الداخلية لمضلع منتظم عدد أضلاعه n يزيد بمقدار 180 درجة على مجموع الزوايا الداخلية لمضلع منتظم آخر عدد أضلاعه n-1. ويمكن تطبيق هذه القاعدة على المضلعات غير المنتظمة أيضاً.

فرص التقويم

يعطي السؤال 1 الطلاب فرصة إظهار قدراتهم على صياغة البرهان. وإذا تم تناول هذا النشاط بالدرجة الأولى كتمرينات جبرية، فإن الأسئلة الأخرى تقيس مدى فهم الطلاب للرموز الوظيفية وقدرتهم على صياغة المشكلة في معادلات ثم حلها. أما في حالة التعامل مع النشاط بالأسلوب العددي، فإن النجاح في حل الأسئلة التالية للسؤال الأول تقيس قدرتهم على استعمال تكنولوجيا المعلومات في حل المسائل.

هل الطلاب قادرون على تمييز واستعمال المهارات المطلوبة لحل المسائل؟

هل الطلاب قادرون على ربط خصائص الأشكال بالعبارات الجبرية وكتابة العبارة المطلوبة؟



النشاط الرابع
حذف مربعات من المستطيلات

1- اتبع الخطوات في هذا النشاط، واستخدم النتائج التي ستحصل عليها لإكمال الجدول المرفق في الجزء (d) من هذا السؤال.

a) ارسم مستطيلاً، وقس طوله وعرضه، ثم أوجد مساحته.

b) احذف أكبر مربع ممكن (المربع 1) واحسب مساحته، ثم احسب مساحة المستطيل المتبقي.

c) احذف أكبر مربع ممكن من المستطيل المتبقي (المربع 2) واحسب مساحته، ثم احسب مساحة المستطيل المتبقي.

d) كرّر هذه العملية قدر الإمكان، ثم سجّل مساحة كلٍّ من المربع و المستطيل المتبقي.

الشكل	المساحة	نسبة مساحة المربع المحذوف إلى مساحة المستطيل	نسبة مساحة المربع إلى مساحة المربع السابق
المستطيل			
المربع (1)			
المربع (2)			

50

حول هذا النشاط

يبدأ هذا النشاط بأسئلة ينتج عنها تشكيلة واسعة من النتائج المتباينة. وفي بعض الحالات يمكن إنتاج المستطيلات بأقل عدد من الخطوات (مثل المستطيلات التي طول أحد أضلاعها يساوي طول الضلع الآخر مرّة ونصف)، وأحياناً أخرى تتم إزالة عدة مربعات لتصغير المستطيل الأصلي تدريجياً.

تساعد طرق الاستكشاف هذه الطلاب على تطوير فهم أفضل لخصوصيات المستطيل الذهبي.

من المهم في السؤالين الأول والثاني تسجيل أطوال هذه المستطيلات المتتالية بدقة. والطلاب الذين يعتمدون على القياس (بما يتجاوز القياس الأولي لهذه المستطيلات) يستبعد أن يتمكنوا من الحفاظ على مستويات الدقة العالية. وإذا لم يلاحظ الطلاب أنه يمكن حساب الأطوال المتتابعة من التناسبات الأصلية، فيجب تنبيههم إلى ذلك.

خصائص الأداء المتقدم

- المجازفة: القدرة على تقبل عدم اليقين عند إجراء البحوث وقبول النتائج التي تستند إلى البحث
- امتلاك حس الدقة العلمية في ترتيب المقاسات

توصيات أسلوب التدريس

سحب مجموعة الطلبة الموهوبين، والعمل في مجموعات ثنائية، والمناقشة الجماعية

إجابات الأسئلة

السؤالان الأول والثاني

أنظر الملحوظة في بند "حول النشاط".

السؤال الثالث

قد يمكن إيجاد أنماط، ولكنها على الأرجح ستكون متنوعة وليست متجانسة.

السؤال الرابع

c) تحتوي النسبة بين الأضلاع على أعداد غير نسبية مثل: $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$، ولكن يمكن تقريبها إلى $1 : 1.618$.

d) نسبة المساحة هي أيضاً عدد غير نسبي، $1 : \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})$، ويمكن التقريب إلى $1 : 2.618$.

إذا لم يلاحظ الطلاب أن البداية بوحدة مربعة يعني أن مساحة المربع الأكبر تزيد بوحدة واحدة على طول ضلعه، فإنه يجب تنبيههم إلى هذه العلاقة، والتي تعتبر خاصية أخرى من خواص النسبة الذهبية.

فرص التقويم

تظهر الإجابة على أول سؤالين قدرة الطلاب على مراعاة الدقة في عملهم. والطلاب الذين يستعملون أسلوب الحساب في الإجابة دون توجيههم إلى ذلك يبرهنون على قدراتهم العالية في هذا المجال.

يكشف هذا النشاط أيضاً بشكل عام عن مدى قدرة الطلاب على تقبل عدم اليقين والاستمرار في الحسابات على الرغم من المجازفة التي ينطوي عليها ذلك.

هل الطلاب قادرون على إجراء البحث بمفردهم، بدون مشاركة المعلم؟

هل يستطيع الطلاب تقرير ما إذا كانت حساباتهم صحيحة وتتماشى مع توقعاتهم؟

الوحدة الثامنة
التناسب والتشابه

نظرة عامّة

تتكون الوحدة من عدة أنشطة متنوعة حول موضوع التناسب والتشابه، مع انتماء الكثير منها إلى السياقات الهندسية.

الهدف التعلمي للوحدة

- فهم تأثير التشابه على المساحات

المعرفة السابقة

- المعرفة بشروط التشابه وتأثيره على الأطوال

خصائص الأداء المتقدم

القيم والاتجاهات والسمات

- الاستقصاء (النشاط الرابع)
- الإبداع (النشاط الرابع)
- المثابرة (النشاط الثالث)
- التعاون (النشاط الثاني)

المهارات المتقدمة

- التعميم (النشاطان الثاني، والثالث)

المعرفة والفهم المتقدمان

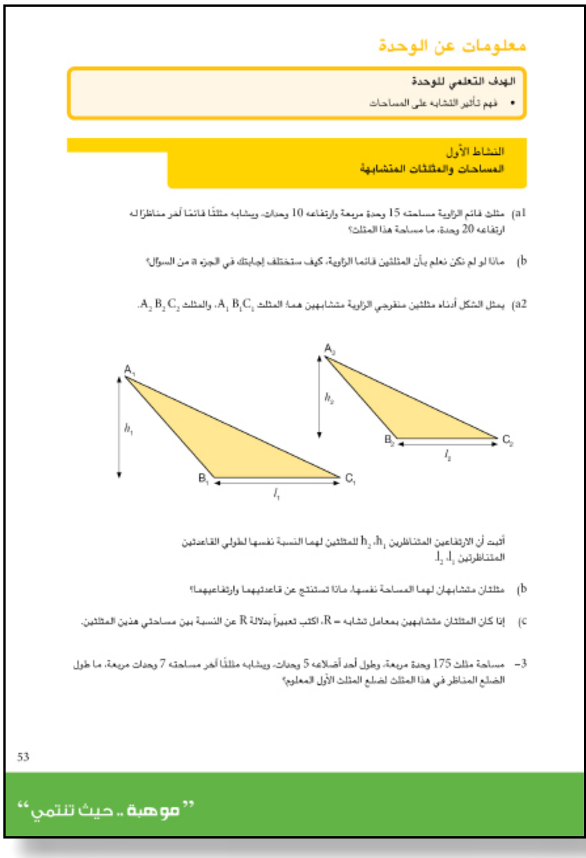
- تكوين الصور الذهنية (النشاط الأول)
- الاستدلال (النشاط الثالث)
- القدرات فوق المعرفية (النشاط الأول)
- النمذجة (النشاط الثاني)

مدة تدريس الوحدة

4 إلى 6 ساعات

المصادر

أوراق إضافية


معلومات عن الوحدة

الهدف التعلمي للوحدة

- فهم تأثير التشابه على المساحات

النشاط الأول
المساحات والمثلثات المتشابهة

a1) مثلث قائم الزاوية مساحته 15 وحدة مربعة وارتفاعه 10 وحدات. ويشابه مثلثًا قائمًا آخر مناظرًا له ارتفاعه 20 وحدة، ما مساحة هذا المثلث؟

b) ماذا لو لم نكن نعلم بأن المثلثين قائما الزاوية، كيف ستختلف إجابتك في الجزء a من السؤال؟

a2) يمثل الشكل أدناه مثلثين منفرجي الزاوية متشابهين هما: المثلث $A_1B_1C_1$، والمثلث $A_2B_2C_2$.

أثبت أن الارتفاعين المتناظرين h_1، h_2 للمثلثين لهما النسبة نفسها لطولي القاعدتين المتناظرتين l_1، l_2.

b) مثلثان متشابهان لهما المساحة نفسها. ماذا تستنتج عن قاعدتيهما وارتفاعيهما؟

c) إذا كان المثلثان متشابهين بمعامل تشابه = R، اكتب تعبيراً بدلالة R عن النسبة بين مساحتي هذين المثلثين.

3- مساحة مثلث 175 وحدة مربعة، وطول أحد أضلاعه 5 وحدات. ويشابه مثلثًا آخر مساحته 7 وحدات مربعة. ما طول الضلع المناظر في هذا المثلث لضلع المثلث الأول المعلوم؟

53

"موهبة .. حيث تنتمي"

حول هذا النشاط

يركز هذا النشاط على العلاقة بين المثلثات المتشابهة ومساحاتها، وهو مناسب للطلاب جميعهم، كما يمكن معالجة بعض المسائل الحسابية وحلها بطرائق غير معقدة نسبياً. ويستدعي النشاط بعض عناصر البرهان وتكوين الصور الذهنية، وكذلك ضرورة التفكير النير، وخصوصاً في السؤال الخامس. ويحتاج الطلاب في أواخر النشاط إلى فهم وإثبات أن المثلثات المتشابهة تكون دائماً متناسبة من حيث أطوال الأضلاع، وأن زواياها المتناظرة متطابقة دائماً. ويعتبر ذلك ضرورياً في السؤال الثاني. وكذلك يحتاج المعلم في السؤال الثاني فرع c إلى التأكد من أن جميع الطلاب قد فهموا أن معامل التكبير يكون دائماً مربعاً بسبب ضرب قيمتين تم تكبيرهما بمعامل التكبير نفسه.

خصائص الأداء المتقدم

- تقدير الروابط بين مجالات الرياضيات المتعلقة بالمثلثات والجبر
- الفهم العميق للبنية الرياضية الأساسية التي تتأثر بتشابه المثلثات

توصيات أسلوب التدريس

العمل الفردي والمناقشة الصفية

إجابات الأسئلة

السؤال الأول

a) 60 وحدة مربعة. يمكن حلّ هذا السؤال عن طريق حساب الأطوال الفعلية. ولكن، قد يدرك بعض الطلاب أنه إذا تضاعفت الأطوال فإن المساحة تتضاعف بمقدار أربع مرات.

b) المبدأ هو ذاته سواء كان المثلث قائم الزاوية أم لا. ويتم استكتشاف هذا الموضوع أكثر في الإجابة على السؤال 2.

السؤال الثاني

a) بتسمية قاعدة الارتفاعين D_1 و D_2 على التوالي، يتضح أن المثلثين $A_1B_1D_1$ و $A_2B_2D_2$ متشابهان حيث أن جميع زواياهما المتناظرة متساوية كذلك. وبالتالي فإن نسبة الارتفاعين h_1 إلى h_2 هي نفس نسبة A_1B_1 إلى A_2B_2، وحيث أن $A_1B_1C_1$ و $A_2B_2C_2$ متشابهين، فإن نسبة الارتفاعين h_1 إلى h_2 تساوي نسبة القاعدتين l_1 إلى l_2، وهو المطلوب.

b) بما أن نسبة طولي القاعدتين والارتفاعين هي نفسها، فإن المثلثين متطابقان.

c) نسبة المساحة تساوي R^2، لأن معامل التشابه يظهر مرتين في معادلة المساحة عند المقارنة بين مساحتي المثلثين المتشابهين.

السؤال الثالث

نسبة المساحة هي $\frac{175}{7}$، بما يساوي 25، وعليه فإن النسبة بين الطولين يجب أن تكون $\sqrt{25}$، أي 5، وعليه فإن طول الضلع المطلوب هو 1.

السؤال الرابع

10

بما أن النسبة بين المساحتين هي $\frac{1000}{10}$، أي 100، فإن معامل التشابه يجب أن يكون $\sqrt{100}$، أي 10.

السؤال الخامس

أ)

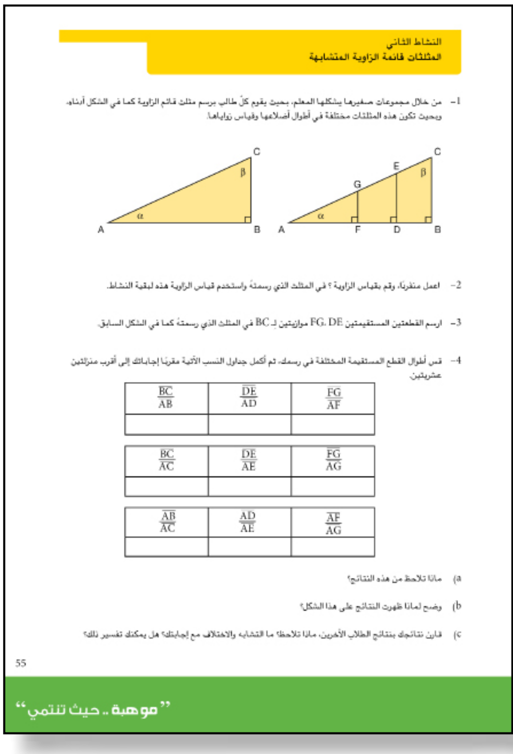
المساحة T_1	المساحة T_2	المساحة T_3	R
1	4	16	2
10	22.5	50.625	1.5
100	25	6.25	0.5
20	5	1.25	0.5
4	16	64	2
8.333	10	12	1.095

فرص التقويم

تُظهر طرق الحل المستخدمة في السؤال الأول مدى فهم الطلاب للبنى الرياضية الأساسية. كما يظهر النجاح في تناول السؤال الثاني أن الطالب يمتلك قدرة قوية على الاستدلال الرياضي. ويشير السؤال الخامس فرع a إلى وضوح التفكير وقدر من المنهجية المنظمة، بينما القدرة على كتابة مسائل ملائمة للسؤال الخامس فرع b فتكشف عن امتلاك بعض القدرات فوق المعرفية.

هل الطلاب قادرون على الربط بين خصائص المثلثات وتغيرات أبعادها من ناحية، والعبارات والمعادلات الجبرية، من ناحية أخرى؟

هل يدرك الطلاب تأثير التشابه على التغيرات الحاصلة في أبعاد المثلثات ومساحاتها؟



النشاط الثاني
المثلثات قائمة الزاوية المتشابهة

1- من خلال مجموعات صغيرها يشكلها المعلم، بحيث يقوم كلّ طالب برسم مثلث قائم الزاوية كما في الشكل أدناه، وبحيث تكون هذه المثلثات مختلفة في أطوال أضلاعها وقياس زواياها.

2- اعمل منفرداً، وقم بقياس الزاوية ؟ في المثلث الذي رسمتهُ واستخدم قياس الزاوية هذه لبقية النشاط.

3- ارسم القطعتين المستقيمتين FG، DE موازيتين لـ BC في المثلث الذي رسمتهُ كما في الشكل السابق.

4- قس أطوال القطع المستقيمة المختلفة في رسمك، ثم أكمل جداول النسب الآتية مقربًا إجاباتك إلى أقرب منزلتين عشريتين.

$\frac{BC}{AB}$	$\frac{DE}{AD}$	$\frac{FG}{AF}$

$\frac{BC}{AC}$	$\frac{DE}{AE}$	$\frac{FG}{AG}$

$\frac{AB}{AC}$	$\frac{AD}{AE}$	$\frac{AF}{AG}$

a) ماذا تلاحظ من هذه النتائج؟

b) وضح لماذا ظهرت النتائج على هذا الشكل؟

c) قارن نتائجك بنتائج الطلاب الآخرين. ماذا تلاحظ ما التشابه والاختلاف مع إجابتك؟ هل يمكنك تفسير ذلك؟

55

”موهبة .. حيث تنتمي“

حول هذا النشاط

الغرض من هذا النشاط هو تعريف الطلاب بالأفكار الأساسية لحساب المثلثات، انطلاقاً من تساوي نسب الأضلاع والزوايا في المثلثات المتشابهة قائمة الزاوية.

قياس الزاوية α يؤثر على الإجابات العددية وليس على العلاقات الرياضية، وهو أمر يلاحظه الطلاب أثناء تعاونهم معاً ومقارنة نتائجهم في السؤال الرابع فرع c .

يمكن للمعلم أن يخبر الطلاب بوجود جداول توضح نسب هذه العلاقات للزوايا المختلفة، وأن بعض آلات حاسبة تضم مفتاحاً يمكن الضغط عليه للحصول على قيمة نسب الزاوية المطلوبة.

خصائص الأداء المتقدم

- القدرة على بناء نموذج رياضي بناءً على نتائج البحث
- فهم "الأفكار الكبرى" للرياضيات المتعلقة بنسب حساب المثلثات

توصيات أسلوب التدريس

العمل الفردي والمناقشة الصفية

إجابات الأسئلة

بما أن كل طالب يستعمل الزاوية الخاصة به، لا يمكن إعطاء الإجابة على السؤالين الثالث والخامس.

السؤالان الأول والثاني

تأكد من أن كل طالب يستعمل مثلثاً يختلف عن باقي زملائه.

السؤال الثالث

تعطي الجداول قيم تقريبية للنسب المثلثية: الظل، والجيب، وجيب التمام للزاوية α.

السؤال الرابع

a) النسب المثلثية في كل صف متساوية (رهناً بنسبة خطأ معقولة في القياس).

b) المثلثات الثلاثة متشابهة، وبالتالي فإن نسب أطوال أضلاعها المتناظرة متساوية.

c) على الطلاب ملاحظة ما يأتي:

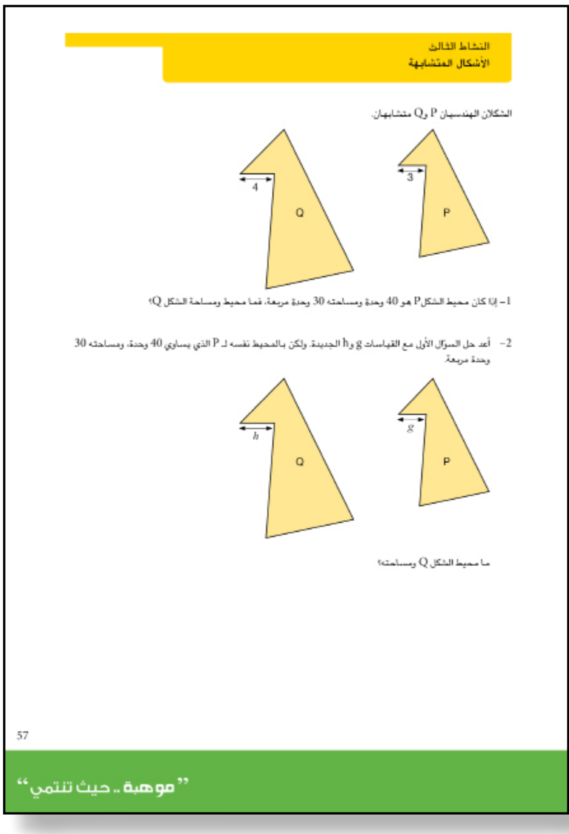
- تتغير القيم بين مختلف المثلثات التي بدأ بها الطلاب، ولكن النسب في كل صف لا تتغير لكل مجموعة من المثلثات.
- إذا كان قياس الزاوية α أكبر، تكون النسبة أكبر في أول صفين، ولكن النسبة في الصف الأخير تكون أقل.
- التغير في النسب لا يتناسب مع تغير قياس الزاوية (أي أنه إذا كان قياس الزاوية α ضعفي قياسها في مثلث مقارنة بآخر، فإن ذلك لا يعني بالضرورة مضاعفة أو تنصيف النسبة المناظرة).

فرص التقويم

تبين إجابة السؤال الخامس قدرة الطلاب على تطبيق ما تعلموه في حل بعض المسائل. وبعبارة أخرى: هل يستطيعون بناء نموذج رياضي من خلال تطبيق أوجه التشابه بين مثلث كل منهم والمثلث المعطى، مستخدمين النسب التي اكتشفوها بغرض قياس الأطوال؟

هل الطلاب قادرون على بناء نموذج رياضي يتعلق بالنسب المثلثية؟

هل لدى الطلاب القدرة على فهم الروابط بين الزوايا وبين أطوال الأضلاع في المثلثات المتشابهة؟


النشاط الثالث
الأشكال المتشابهة

الشكلان الهندسيان P وQ متشابهان.

1– إذا كان محيط الشكل P هو 40 وحدة ومساحته 30 وحدة مربعة، فما محيط ومساحة الشكل Q؟

2– أعد حل السؤال الأول مع القياسات g وh الجديدة، ولكن بالمحيط نفسه لـ P الذي يساوي 40 وحدة، ومساحته 30 وحدة مربعة

ما محيط الشكل Q ومساحته؟

57

"موهبة.. حيث تنتمي"

إجابات الأسئلة

السؤال الأول

أ) $53\frac{1}{3}$ وحدة

النسبة بين قياس الأطوال هي 3 : 4، لذلك فإن محيط الشكل $Q = \frac{4}{3} \times 40$ وحدة.

b) $53\frac{1}{3}$ وحدة مربعة

النسبة بين المساحات هي $4^2 : 3^2$، لذلك فإن محيط الشكل $Q = \frac{16}{9} \times 30$ وحدة.

السؤال الثاني

المحيط يساوي $40\frac{h}{g} = \frac{h}{g} \times 40$ ، والمساحة تساوي $30\,(\frac{h}{g})^2$

السؤال الثالث

مساحة الشكل الرباعي المظلل تساوي $1 - (\frac{ML}{KL})^2$

مساحة المثلث $JKL = 1$

مساحة المثلث $NML = 1 \times (\frac{ML}{KL})^2$

وبالتالي فإن مساحة الشكل الرباعي المظلل هي الفرق بين مساحتي المثلثين.

السؤال الرابع

$1 : \sqrt{2}$

السؤال الخامس

من المعطيات المستطيلات متشابهة وبالتالي فإن:

$y = zk$ ،$w = xk$ ،$u = vk$

مما يعني أن $u + w + y = (v + x + z)k$

أي أن النسبة بين أطوال الأضلاع هي $K : 1$ كما هو متوقع في المستطيلات الأصلية. وعليه، فإن المستطيل الجديد يشبه كلاً من المستطيلات الأصلية.

فرص التقويم

قد تكون هذه الأنشطة مربكة للطلاب، لذا يجب على المعلم التأكد من أنهم يدركون متى يتعاملون مع الأطوال ومتى يتعاملون مع المساحات، وما يترتب على ذلك من تأثيرات مختلفة. ولا تظهر قدرات الاستدلال القوية إلا إذا حافظ الطلاب على وضوح هذه المفاهيم. يضاف إلى ذلك أن هذا النشاط يحتاج أيضاً إلى المثابرة.

هل الطلاب قادرون على تخطي الصعوبات عندما يواجهون تعقيدات المعادلات الرياضية والجذور التربيعية؟

هل الطلاب قادرون على استعمال الاستدلال الواضح لتبرير المنهجية المتبعة في التوصل إلى الحل ونمذجته؟

حول هذا النشاط

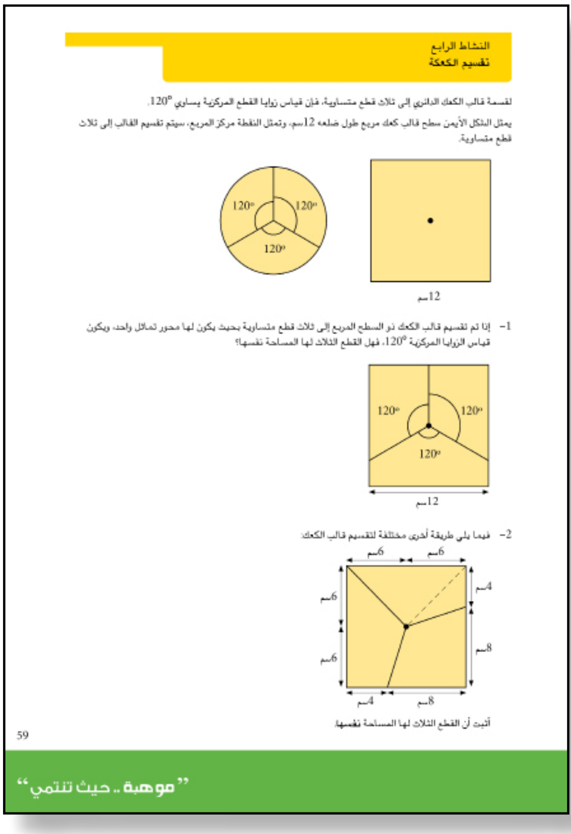
يتضمن هذا النشاط تحديات متنوعة تتعلق بأطوال ومساحات الأشكال الهندسية المتشابهة، وهي تحديات تعمق وتعزز حدس الطلاب تجاه التشابه في الأبعاد الثنائية والأحادية. ويجب على المعلم مراقبة العمليات الجبرية التي ينفذها الطلاب لأن دقتها تؤثر بقوة في صحة النتائج.

خصائص الأداء المتقدم

- المثابرة – المثابرة لتجاوز العوائق عند إجراء الحسابات باستخدام المعادلات المعقدة والجذور التربيعية
- امتلاك قدرة قوية على الاستدلال الرياضي عند تطبيق تشابه المثلثات في العمليات الحسابية

توصيات أسلوب التدريس

سحب مجموعة الطلبة الموهوبين، والعمل الفردي، والمناقشات الجماعية.



النشاط الرابع
تقسيم الكعكة

لقسمة قالب الكعك الدائري إلى ثلاث قطع متساوية، فإن قياس زوايا القطع المركزية يساوي 120^0.

يمثل الشكل الأيمن سطح قالب كعك مربع طول ضلعه 12سم، وتمثل النقطة مركز المربع، سيتم تقسيم القالب إلى ثلاث قطع متساوية.

1- إذا تم تقسيم قالب الكعك ذو السطح المربع إلى ثلاث قطع متساوية بحيث يكون لها محور تماثل واحد، ويكون قياس الزوايا المركزية 120^0، فهل القطع الثلاث لها المساحة نفسها؟

2- فيما يلي طريقة أخرى مختلفة لتقسيم قالب الكعك:

أثبت أن القطع الثلاث لها المساحة نفسها.

59

"موهبة .. حيث تنتمي"

حول هذا النشاط

يوفر هذا النشاط للطلاب فرصة استخدام فهمهم للقواعد الرياضية والتمرن على المهارات الجديدة التي اكتسبوها، وذلك في سياق مألوف لهم، وهو تقسيم الكعكة. ويشتمل النشاط على تقسيم كعكة دائرية إلى أجزاء متساوية الحجم في البداية، ثم يسأل الطلاب إذا كان تطبيق استراتيجية تقطيع الكعكة باستخدام زوايا متطابقة تسري على قالب الكعك ذو السطح المربع الشكل. وإذا كان الرد بالنفي، فما هي الاستراتيجية الأنسب؟

وتستدعي بعض مكونات الأسئلة مهلة تفكير طويلة. ففي السؤال الثالث، مثلاً، يحتاج بعض الطلاب إلى مساعدة المعلم على صياغة البرهان العام. ويجب تشجيع الطلاب على البدء بتجريب ترتيبات مختلفة والتأكد من أن مساحة كل قطعة تساوي 48 سم^2، ثم يقترح المعلم عليهم الانتقال إلى حالة عامة تشتمل على قيم غير معلومة.

في الأسئلة الرابع والخامس والسادس، يحتاج الطلاب إلى إجراء الاستقصاء واستكشاف مختلف الامكانات، حيث يختارون بأنفسهم القيم الواجب استخدامها، والحالات التي ينبغي تجربتها للتوصل إلى الاستنتاجات النهائية.

من الواضح بدايةً أنه ينبغي على الطلاب استخدام النسب المثلثية، وهو أمر ينبغي على المعلم رصده للتأكد من صحته.

خصائص الأداء المتقدم

- الاستقصاء – تطبق منهجية الاستقصاء عند دراسة المشكلة
- الابتكار – القدرة على ابتكار الطريقة الملائمة للموقف وتحديد المهارات والحقائق المطلوبة لحل المشكلة

توصيات أسلوب التدريس

العمل الفردي في مجموعات صغيرة والمناقشة الصفية

إجابات الأسئلة

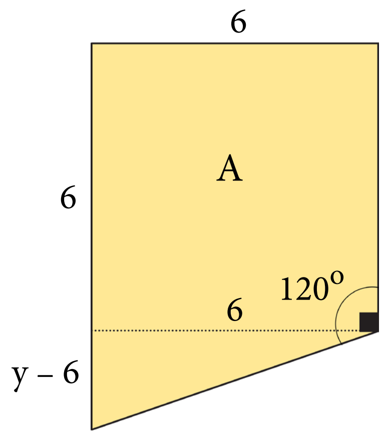
السؤال الأول

لا.

يمكن إثبات ذلك بتوضيح أن مساحة أي قطعة لا تساوي 48 سم^2، حيث أن تساوي القطع يعني أن مساحة كل قطعة يجب أن تكون:

$12^2 \div 3$ يساوي 48 سم^2.

مساحة شبه المنحرف A تساوي $\frac{6(6+y)}{2}$ سم^2، حيث y يتم حسابها من الشكل التالي

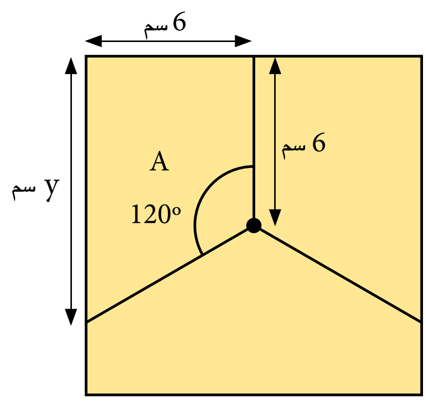


$\frac{(y-6)}{6} = \tan(30^o)$ وبالتالي فإن

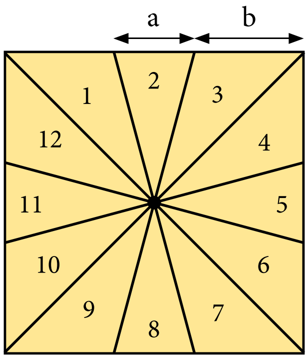
$y= 6+6 \times \tan(30^o) = 9.46$ سم

(مقربة إلى أقرب منزلتين عشريتين).

المساحة A تساوي 46.4 سم^2، وبالتالي فإن القطع ليست متساوية.

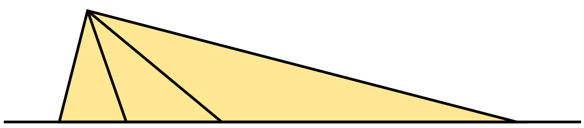


االوسيلة البديلة لحل المشكلة (بدون استخدام حساب المثلثات) هي اعتبار أن المربع مقسم إلى 12 قطعة بحيث أن الزاوية الموجودة في كل قطعة والواقعة في المركز كل منها = 30^o.



تقسيم الكعكة إلى قطع بزاويا 120 درجة يحتاج إلى أخذ 4 قطع متجاورة زاوية كل منها 30 درجة. ويكون ذلك إما قطعة واحدة في وسط ضلع (مثل القطعة 2) وثلاثة قطع مجاورة لركن (مثل القطع 1 و3 و4)، أو قطعتين في وسط ضلع (مثل القطعتين 2 و5) وقطعتين مجاورتين لركن (القطعتين 3 و4). ولكي يتساوى مجموعها، يجب أن تكون مساحة القطعة المجاورة للركن مساوية لمساحة القطعة الموجودة في وسط الضلع. وبما أن الأبعاد العمودية متطابقة، فإن أطوال القواعد يجب أن تكون متطابقة. وبالتالي فإنه، في الشكل المرافق للسؤال، يجب أن يتساوى المقطعان a وb.

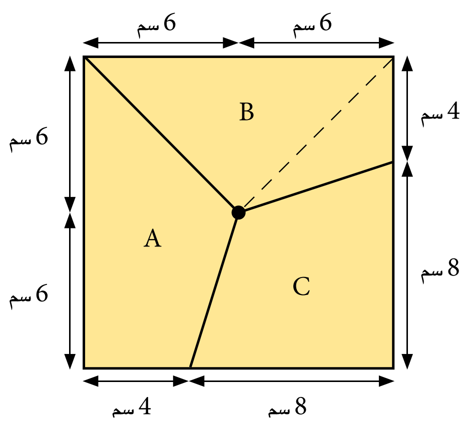
ولكن هذا الشرط لا يتوفر، وهو ما نراه في اختلاف الأطوال التي ينشأ منها زاوية متساوية عند النقطة.



السؤال الثاني

بخلاف السؤال الأول، حيث أثبت الطلاب أن مساحة قطعة لا تساوي ثلث المساحة الإجمالية، يجب على الطلاب هنا إثبات أن كل قطعة من القطع الثلاثة تساوي ثلث المساحة الكلية.

يمكن إيجاد مساحة A وB وC (كل منها يساوي 48سم^2) بعدة طرق مختلفة، منها طريقة تقسيم كل قطعة إلى مثلثات تتلاقى في رأس مشترك (أنظر الخط المنقط)، ثم ضرب طول قاعدة كل قطعة في الارتفاع الرأسي (المساوي 6سم في جميع الحالات).



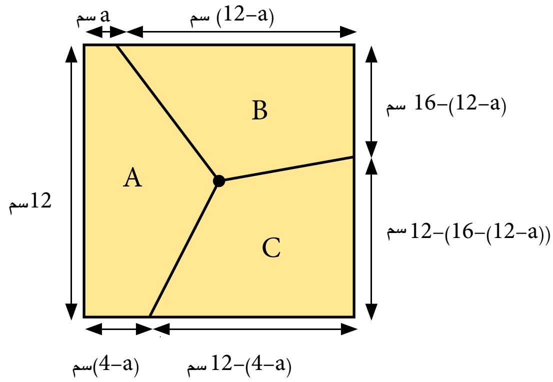
السؤال الثالث

بما أن طول الأضلاع الخارجية لكل قطعة هي 16 سم، فسنجد أن

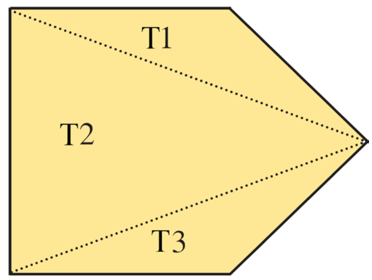
$a + b = 4$ وبالتالي فإن

$b = 4 - a$. كما هو موضح في الشكل.

الآن نقوم بحساب مساحة كل قطعة من الثلاث قطع.



مساحة A نقوم بتقسيم القطعة إلى ثلاث مثلثات: T3 وT2 وT1.



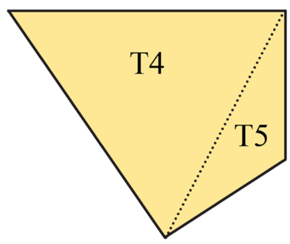
مساحة المثلث T1 $\frac{1}{2}(6)(a) = 3a$

مساحة المثلث T2 $\frac{1}{2}(6)(12) = 36$

مساحة المثلث T3 $\frac{1}{2}(4-a)(6) = 12 - 3a$

وبالتالي مساحة القطعة تساوي 48

مساحة B نقوم بتقسيم القطعة إلى مثلثين، T5 T4



مساحة المثلث T4 $\frac{1}{2}(12 - a)(6) = 36 - 3a$

مساحة المثلث T5 $\frac{1}{2}(4 + a)(6) = 12 + 3a$

مساحة القطعة تساوي 48

مساحة القطعة C:

= 144 – (مساحة B – مساحة A)

= 144 – 48 – 48 = 48.

السؤال الرابع

نعم، ينطبق ذلك على المربعات ذات المقاسات المختلفة.

السؤال الخامس

عندما يقسَّم المربع بمستقيمات من المحيط إلى المركز فقط، فإن مساحة كل جزء من المربع تتناسب مع طول الضلع.

السؤال السادس

تنطبق العلاقة السابقة على جميع الأشكال المنتظمة، كما أن استخدام الزوايا في الدائرة ممكن، وذلك لأن الزاوية تتناسب مع مقاس مقطع محيط الدائرة.

يمكن استعمال هذا السؤال لتوسعة نطاق النشاط. وسيحتاج الطلاب إلى تجريب نموذجهم على الأشكال المنتظمة الأخرى.

فرص التقويم

تتطلب الأسئلة الأول والثاني والثالث من الطلاب أن يجدوا المنهجية المناسبة للحل، بينما تتطلب الأسئلة الرابع والخامس والسادس إجراء استقصاء خاص لحلها. وسيساهم مراقبة جهود الطلاب في تحديد مدى قدرتهم على تنفيذ

هذه العمليات الرياضية.

هل الطلاب قادرون على إجراء البحث المستقل اللازم بناء على المعلومات المقدمة في السؤال؟

هل يستطيع الطلاب استعمال مهاراتهم بشكل مبدع في المواقف غير المألوفة؟

الوحدة التاسعة

التحويلات الهندسية

نظرة عامّة

توسع هذه الوحدة مدارك الطلاب حول موضوع التحويلات الهندسية وتعمق نظرتهم في البنية الرياضية المتضمنة، وتقديم واستكشاف تركيب التحويلات الهندسية. معظم العمل يعتمد الاستقصاء منهجًا لإيجاد كيف تعمل التحويلات الهندسية على النقاط والأشكال الهندسية.

الهدف التعلمي للوحدة

- تعميق فهم الطلاب لمواضيع الدوران والانعكاس والإزاحة والتمدّد

المعرفة السابقة

- معلومات أساسية عن الإزاحة والدوران حول النقطة والانعكاس في المستقيم والتمدّد من مركز معطى

خصائص الأداء المتقدم

القيم والاتجاهات والسمات

- الاستقصاء (النشاطان الثالث، والرابع)
- الإبداع (النشاط الأول)
- المثابرة (النشاط الثاني)
- التعاون (النشاط الثالث)

المهارات المتقدمة

- تكوين الصور الذهنية (النشاط الأول)
- التعميم (النشاط الثالث)

المعرفة والفهم المتقدمان

- وضوح المفاهيم (النشاط الثاني)
- الفهم المتعمق للبنية الرياضية الأساسية (النشاطان الأول، والرابع)
- فهم البرهان (النشاط الرابع)

مدة تدريس الوحدة

4 إلى 6 ساعات

المصادر

ورق رسم بياني، وورق شفاف

برمجية الرسم البياني (إذا توفرت)

معلومات عن الوحدة

الهدف التعلمي للوحدة

تعميق فهم التحويلات الهندسية الآتية: الدوران، والانعكاس، والإزاحة، والتمدّد.

النشاط الأول
الدوران والانعكاس

استخدم ورقة الرسم البياني، أو ورقة الرسم البياني المرفقة في البرمجية لاستكشاف حل المسائل الآتية:

a1) أوجد صورة النقطة (3, 4) بعد انعكاسها في المستقيم y = x.

b) أكمل هذه الجملة عن الانعكاس في المستقيم y = x.

إذا انعكست النقطة (a, b) في المستقيم y = x،
فإن إحداثيات النقطة بعد الانعكاس هي..........

c) ما النقاط التي لا يتغير إحداثياتها جراء انعكاسها في المستقيم y = x؟

a2) انعكست النقطة (3, 4) في المستقيم y = x، ثم انعكست صورتها في المستقيم y = −x. ما إحداثيي النقطة الناتجة من تركيب التحويلين الهندسيين؟

b) أكمل العبارة الآتية المتعلقة بالانعكاس في المستقيم y = x، ثم الانعكاس في المستقيم y = −x.

إذا انعكست النقطة (a, b) في المستقيم y = x، ثم اتّبع بانعكاس في المستقيم y = −x فإن إحداثيي القطعة الجديدة هما ......

c) ما النقاط التي لا يتغير إحداثيوها في تركيب هذين التحويلين الهندسيين؟

3- ما تأثير تركيب التحويلين الهندسيين: انعكاس شكل هندسي في المستقيم y = x، ثم انعكاسه في محور x؟

4- ما تأثير تركيب التحويلين الهندسيين: انعكاس شكل هندسي في المستقيم y = x، ثم انعكاسه في محور y؟

a5) ما ناتج تركيب التحويلات الهندسية الأربعة في السؤالين 4 و 3، أي الانعكاس في المستقيم y = x، ثم في محور x، ثم في المستقيم y = x، ثم الانعكاس في محور y؟

62

حول هذا النشاط

يهدف هذا النشاط إلى إثارة التفكير بشأن التحويلات الهندسية المركّبة، كما يُعرِّف الطلاب بفكرة ترتيب التحويلات وتأثيرها، وهي فكرة يتم تطويرها لاحقاً في أنشطة أخرى ضمن هذه الوحدة.

قد يساعد استعمال برمجية التمثيل البياني الطلاب على تعميق فهمهم لما يحصل، خاصة في الأسئلة الأخيرة.

خصائص الأداء المتقدم

- القدرة على تكوين صور ذهنية واضحة فيما يتعلق بالتحويلات الهندسية
- تعميق الفهم للبنى الرياضية الأساسية المتعلقة بالدوران والانعكاس

توصيات أسلوب التدريس

العمل في مجموعات صغيرة والمناقشة الصفية

إجابات الأسئلة

السؤال الأول

a) (4, 3)

b) (b, a)

c) أي نقطة على المستقيم y = x

السؤال الثاني

a) (-3 , -4)

b) (-a, -b)

c) فقط نقطة الأصل (0, 0) لا تتغير، لأنه إذا كانت (-a, -b) = (a, b)، فإن a = b = 0.

السؤال الثالث

التأثير الناتج هو دوران 90° مع اتجاه عقارب الساعة حول نقطة الأصل.

السؤال الرابع

التأثير الناتج هو دوران 90° عكس اتجاه عقارب الساعة حول نقطة الأصل.

السؤال الخامس

الناتج النهائي هو الشكل الأصلي نفسه، أي لا يوجد تغيير على الإحداثيات.

السؤال السادس

انعكاس في المستقيم الذي معادلته y = -3x.

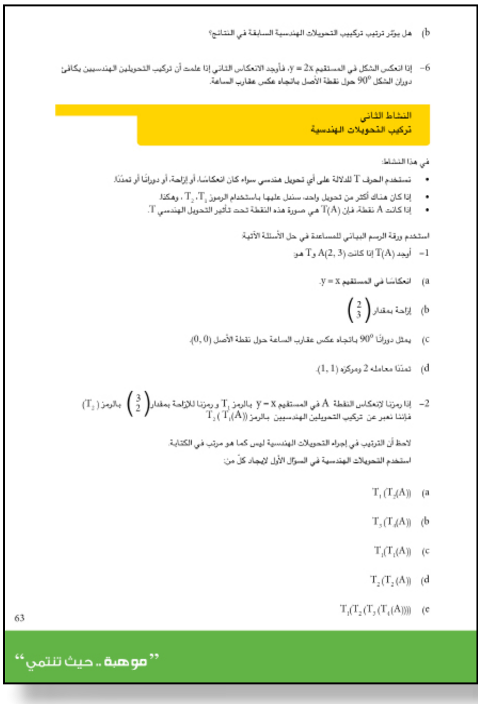
إذا رسم الطلاب شكلاً هندسياً (مثل المثلث) ثم تم عكسه حول المستقيم y = x2 ، ثم تدويره 90° عكس اتجاه عقارب الساعة، سيلاحظون أين (تقريباً) يكون محور الانعكاس المطلوب بحيث يكون مجموع الانعكاسين مساوياً للدوران.

فرص التقويم

تساعد الأسئلة من الأول إلى الرابع الطلاب على معرفة مدى استيعاب الطلاب للأفكار الأساسية المتعلقة بالتحويلات الهندسية وكيفية تركيبها. ويعمل السؤالان الخامس والسادس على توسعة هذه الأفكار قليلاً. وتظهر المحاولات الجيدة لحل هذه الأقسام أن الطالب يمتلك مهارات جيدة لتكوين الصور الذهنية.

هل الطلاب قادرون على وصف التحويلات الهندسية دون تمثيلها بيانياً؟

هل الطلاب قادرون على التعليق على التغيرات الناجمة على خصائص الأشكال وموقعها عند تطبيق الانعكاس والدوران؟



b) هل يؤثر ترتيب تركيب التحويلات الهندسية السابقة في النتائج؟

6- إذا انعكس الشكل في المستقيم $y = 2x$، فأوجد الانعكاس الثاني إذا علمت أن تركيب التحويلين الهندسيين يكافئ دوران الشكل 90^0 حول نقطة الأصل باتجاه عكس عقارب الساعة.

النشاط الثاني
تركيب التحويلات الهندسية

في هذا النشاط:

- تستخدم الحرف T للدلالة على أي تحويل هندسي سواء كان انعكاسًا، أو إزاحة، أو دورانًا أو تمدّدًا.
- إذا كان هناك أكثر من تحويل واحد، سندل عليها باستخدام الرموز T_1، T_2، وهكذا.
- إذا كانت A نقطة، فإن $T(A)$ هي صورة هذه النقطة تحت تأثير التحويل الهندسي T.

استخدم ورقة الرسم البياني للمساعدة في حل الأسئلة الآتية

1- أوجد $T(A)$ إذا كانت $A(2, 3)$ و T هو:

a) انعكاسًا في المستقيم $y = x$.

b) إزاحة بمقدار $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

c) يمثل دورانًا 90^0 باتجاه عكس عقارب الساعة حول نقطة الأصل $(0, 0)$.

d) تمددًا معامله 2 ومركزه $(1, 1)$.

2- إذا رمزنا لانعكاس النقطة A في المستقيم $y = x$ بالرمز T_1 و رمزنا للإزاحة بمقدار $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ بالرمز (T_2) فإننا نعبر عن تركيب التحويلين الهندسيين بالرمز $T_2(T_1(A))$

لاحظ أن الترتيب في إجراء التحويلات الهندسية ليس كما هو مرتب في الكتابة.

استخدم التحويلات الهندسية في السؤال الأول لإيجاد كلّ من:

a) $T_1(T_2(A))$

b) $T_3(T_4(A))$

c) $T_1(T_1(A))$

d) $T_2(T_2(A))$

e) $T_1(T_2(T_3(T_4(A))))$

63

"موهبة .. حيث تنتمي"

حول هذا النشاط

هذا النشاط توسعة لأعمال الطلاب في مجال التحويلات الهندسية، حيث أنهم مطالبون بتركيب هذه التحويلات وفقًا لمنهجية منظمة ثم يدرسون نتائجها. وتنحصر الأسئلة بشكل عام في أنواع محددة من التحويلات الهندسية والنقاط، وستكون بالتالي مناسبة إلى حد معقول لجميع الطلاب. من الضروري تنفيذ هذا النشاط في مجموعات ثنائية أو ثلاثية ليتسنى للطلاب مناقشة ما يتوصلوا إليه.

خصائص الأداء المتقدم

- المثابرة – المثابرة على تذليل الصعاب التي يواجهونها عند إيجاد إحداثيات النقاط التي تكون جزءاً من التحويل الهندسي المطلوب
- وضوح المفاهيم المتعلقة بالتحويلات الهندسية وتأثيرها على التغيرات في الإحداثيات

توصيات أسلوب التدريس

العمل الفردي والمناقشة الصفية

إجابات الأسئلة

السؤال الأول

a) $(3, 2)$ b) $(4, 6)$ c) $(-3, 2)$ d) $(3, 5)$

السؤال الثاني

a) باستخدام نتائج التحويلات في السؤال الأول نجد أن

b) $T_1(T_2(A)) = T_1(6,4) = (6,4)$

c) $T_3(T4(A)) = T_3(3,5) = (-5,3)$

d) $T_1(T_1(A)) = T_1(3,2) = (2,3) = A$

e) $T_2(T_2(A)) = T_2(4,6) = (6,9)$

$T1(T2(T3(T4(A)))) = T1(T2(-5,3)) =$

$T1(-3,6) = (6,-3)$

السؤال الثالث

إزاحة بمقدار $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

إزاحة بمقدار $\begin{pmatrix} -7 \\ 0 \end{pmatrix}$

إزاحة بمقدار $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

إزاحة بمقدار $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

إزاحة بمقدار $\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$

السؤال الرابع

الفقرة (a): الإزاحة الناتجة غير متكافئة. فعلى سبيل المثال إذا اخترنا النقطة $B = (1, 1)$ فإن ناتج التحويل هو $(4, 3)$ وهذا يعطينا الإزاحة $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ وهي تختلف عن الإزاحة الناتجة من النقطة A.

الفقرة (b): الإزاحة الناتجة غير متكافئة. فعلى سبيل المثال إذا اخترنا النقطة $B(1, 1)$ فإن ناتج التحويل هو $(-1, 1)$ وهذا يعطينا الإزاحة $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ وهي تختلف عن الإزاحة الناتجة من النقطة A.

الفقرة (c): الإزاحة الناتجة متكافئة وذلك لأننا نطبق الانعكاس حول المستقيم نفسه مرتين مما يعني الحصول على النقطة نفسها وبالتالي فإن الإزاحة هي $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

الفقرة (d): الإزاحة الناتجة متكافئة وذلك لأن ناتج أي إزاحتين هو إزاحة. لذا فإن الإزاحة الناتجة هي $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$.

الفقرة (e): الإزاحة الناتجة غير متكافئة. فعلى سبيل المثال إذا اخترنا النقطة $B = (1, 1)$ فإن ناتج التحويل هو $(4, 1)$ وهذا يعطينا الإزاحة $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$. وهي تختلف عن الإزاحة الناتجة من النقطة A.

فرص التقويم

يتطلب هذا النشاط الوضوح والانتباه. ويتضح من متابعة ملاحظة الطلاب أيهم يمتلك هذه الصفات، حتى أثناء العمل الجماعي.

هل ينجح الطلاب في أداء المطلوب منهم بدرجة أعلى من الدقة؟

هل يظهر الطلاب استيعابهم للمفاهيم عند عرض نماذجهم لحل المسألة؟


-3 أوجد تحويلاً هندسيًا يكافئ كلّ تركيب من التحويلات الهندسية في السؤال الثاني.

-4 إذا أجرينا تركيب التحويلات الهندسية نفسه في السؤال الثاني على النقطة B، فهل سيكافئ التحويل الهندسي الوحيد نفسه في السؤال الثالث؟

النشاط الثالث
معكوس التحويلات الهندسية

معكوس التحويل الهندسي T يعيد النقطة إلى موضعها الأصلي الذي كانت عليه قبل إجراء التحويل الهندسي، ويرمز إلى معكوس التحويل الهندسي بالرمز T^{-1}.
تركيب التحويل الهندسي مع معكوسه لا يحدث أيّ تأثير؛ أي أن:

$T(T^{-1}(A)) = A$ و $T^{-1}(T(A)) = A$

ابحث في حل الأسئلة الآتية مستخدمًا ورقة الرسم البياني.

-1 ما معكوس التحويل الهندسي لكلٍ من التحويلات الآتية، وفي كل حالة، تأكد من أنّ $T^{-1}(T(A)) = A$ و $T(T^{-1}(A)) = A$ لأكثر من نقطة، وليس لنقطة واحدة.

a) الانعكاس في $y = x$
b) إزاحة بمقدار $\binom{2}{3}$
c) دوران 90^{o} عكس اتجاه عقارب الساعة حول $(0, 0)$
d) تمدّد معامله 2 ومركزه $(1, 1)$

-2 اعمل مع زملائك ضمن مجموعات صغيرة لصياغة عبارات مناسبة تلخص النتائج التي توصلت إليها في السؤال 2 بشأن معكوس التحويلات الهندسية، وذلك كما يلي:

a) معكوس الانعكاس في [حدد مستقيم] هو ....
b) معكوس الإزاحة بمقدار [حدد المتجه] هو ....
c) معكوس الدّوران بمقدار [حدد المقدار والاتجاه ونقطة الدوران] هو ....
d) معكوس التمدّد بمقدار [حدد معامل المقياس ومركز التمدد] هو ....

64

حول هذا النشاط

يعدّ هذا النشاط مقدمة لمعكوس التحويلات الهندسية من المفترض أن الطلاب لم يدرسوا مثل هذه المفاهيم في المنهاج الأساسي. وقد يحتاج الطلاب إلى مثال يوضح لهم مغزى أول جملتين، على ألا يكون المثال عبارة عن تحويل هندسي مكافئ لمعكوسه (مثل الانعكاس في مستقيم) حيث أن بعض الطلاب قد يعتقد هذه الخاصية تتوفر في جميع معكوسات التحويلات الهندسية.

يجب العمل بشكل تعاوني في هذا النشاط، وخاصة في السؤالين 2 و3، ضمن مجموعات ثنائية أو صغيرة.

خصائص الأداء المتقدم

الاستقصاء – استعمال منحى الاستقصاء المتعلق بالتحويلات الهندسية

القدرة على التعميم من نتائج البحث وصياغة العبارات المناسبة

توصيات أسلوب التدريس

العمل في مجموعات صغيرة والمناقشة في الصف بأكمله

إجابات الأسئلة

السؤال الأول

a) الانعكاس في $y = x$

b) الإزاحة بمقدار $\binom{-2}{-3}$

c) الدوران بمقدار 90 درجة حول النقطة $(0, 0)$ باتجاه عقارب الساعة

d) تمدّد معامله $\frac{1}{2}$ ، ومركزه $(1 ,1)$.

لاحظ أن معكوس التمدد T هو التمدد T^{-1} الذي معامله $\frac{1}{2}$ ، ومركزه $I(1 ,1)$ بحيث: $T^{-1}(A) = B$ يمكن تمثيله بالنقطة الواقعة في المنتصف بين النقطتين A و $(1 ,1)$.

السؤال الثاني

ستختلف الألفاظ، ولكن يجب أن تدل عامة على ما يلي:

a) معكوس الانعكاس في مستقيم معطى هو انعكاس في المستقيم نفسه.

b) معكوس الإزاحة بمقدار متجه محدد هو إزاحة بمقدار سالب لهذا المتجه.

c) معكوس الدوران بمقدار محدّد وباتجاه محدد حول نقطة معطاة هو دوران بالزاوية نفسها حول النقطة نفسها وبعكس الاتجاه.

d) معكوس التمدّد بمعامل تمدّد معطى ومركز تمدّد محدّد هو تمدّد معامله مقلوب معامل التمدّد المعطى ومركزه هو مركز التمدّد نفسه.

فرص التقويم

تعطي الإجابة على السؤال 2 مؤشرًا على ثقة الطلاب وقدرتهم على التعميم، وتطبيق منهجية منظمة في البحث.

هل الطلاب قادرون على الاستقصاء بشكل منفرد وتوضيح طرق تفكيرهم؟ هل هم قادرون على التعميم من خلال صياغة العبارات ذات الصلة بالتحويلات الهندسية التي يدرسونها؟

النشاط الرابع
هل يؤثر الترتيب في التحويلات الهندسية؟

يستعمل مصطلح "الإبدالية" في الرياضيات للدلالة على الحالات التي لا يكون الترتيب مهماً فيها.

ففي العمليات على الأعداد، مثلاً، تعتبر عملية الجمع إبدالية، أي أنّ $a + b = b + a$، ولكن عملية الطرح ليست إبدالية، وذلك لأن $b - a \neq a - b$.

يحقق التحويلان الهندسيان T_1، T_2 شروط الإبدالية إذا كان ترتيب إجرائهما غير مهم، أي أن: $T_2(T_1(A)) = T_1(T_2(A))$.

1- اعتمد التحويلات الهندسية الأربعة الآتية:
- T_1 انعكاس في $y = x$.
- (T_2) إزاحة بمقدار
- (T_3) دوران 90^o عكس اتجاه عقارب الساعة حول $(0, 0)$.
- (T_4) تمدّد بمعامل مقياس يساوي 2 ومركزه $(1, 1)$.

ادرس التركيبات المختلفة للتحويلات الهندسية السابقة وبيّن أيها يحقق شروط الإبدالية.
هل التحويل T_1 متبوعاً بالتحويل T_2 يكافئ التحويل T_2 متبوعاً بالتحويل T_1؟
وهل التحويل T_3 متبوعاً بالتحويل T_4 يكافئ التحويل T_4 متبوعاً بالتحويل T_3؟ وهكذا.
اعرض نتائجك مستعملاً عبارات مثل:
"تركيب التحويلين T_y، T_x ابدالي"، أو "تركيب التحويلين T_y، T_x ليس ابدالياً".

2- بيّن أي تركيب من التحويلات الهندسية الآتية يحقق الخاصية الابدالية:

a) انعكاس في مستقيم يتبعه انعكاس آخر في مستقيم آخر

b) إزاحة تتبعها إزاحة أخرى مختلفة.

c) دوران حول نقطة يتبعه دوران آخر حول النقطة نفسها.

d) تمدّد يتبعه تمدّد حول النقطة نفسها.

قدم مثالاً عكسيًا أو برهانًا على كل استنتاجاتك.

65

"موهبة .. حيث تنتمي"

حول هذا النشاط

يقدم هذا النشاط إلى الطلاب قواعد الإبدال في التحويلات الهندسية، على افتراض أن المنهج الأساسي لم يتناول هذا الموضوع بعد. وقد يحتاج الطلاب إلى مثال يساعدهم على استيعاب المفهوم ورموزه. يجب منح الطلاب مهلة لدراسة السؤال الأول باستعمال الرسم التقريبي أو برمجية الرسم البياني.

خصائص الأداء المتقدم

- الاستقصاء – استعمال منهجية الاستقصاء في حل المسائل
- الفهم المتعمق للبنى الرياضية الأساسية المتعلقة بالتحويلات الهندسية والإبدال

توصيات أسلوب التدريس

الفصل بأكمله

إجابات الأسئلة

السؤال الأول

T_1 و T_4 يحققان الخاصية الإبدالية.

باقي أزواج التحويلات غير إبدالية (باستثناء حالة تساوي التحويلان، مثل T_1 وT_1).

السؤال الثاني

a) هذان التحويلان ليسا إبداليّين.

المثال المضاد صورة النقطة $(2, 3)$ بالانعكاس في المحور Y ثم انعكاس في المستقيم $y = x$.

إذا أجري الانعكاس في محور الصادات أولاً تلاه انعكاس في المستقيم $y = x$، فإن صورة النقطة هي $(3, -2)$.

إذا تم الانعكاس في المستقيم $y = x$ أولاً، تلاه انعكاس في محور y، فإن صورة النقطة هي $(-3, 2)$.

b) هذان التحويلان إبداليّان

إن التحويل الإجمالي لإزاحتين هو مجموع عنصري محور x ومجموع عنصري محور y. ويكون لأي تركيب لتحويلين كهذا الناتج نفسه، بما يشمل إجراء الإزاحتين نفسيهما بترتيب معاكس.

c) هذان التحويلان إبداليّان.

يتم، في الواقع، جمع درجات الدورانين، مع اعتبار الدوران في الاتجاه العكسي سالباً. وحيث أن عملية الجمع إبدالية، فإن ترتيب الدورانين ليس مهماً.

d) هذان التحويلان الهندسيان إبداليان.

تركيب تمددين لهما مركز تمدد واحد هو ضرب معاملي التمدد. وحيث أن الضرب إبدالي، فإن ترتيب التمددين ليس مهماً.

فرص التقويم

يستدعي جزء هذا النشاط من الطلاب أجراء استقصاء مستقل، واتخاذ قرارات مستقلة، وترتيب عملهم بطريقة منهجية منظمة. وتكشف مراقبة جهود الطلاب أي الطلاب لديه قدرات عالية في هذا المجال، وأيهم يحتاج إلى المزيد من الوقت لتطوير قدراته.

يتطلب السؤال الثاني من الطلاب مثالاً مضاداً، أو برهانًا لتبرير النتائج، وتعطي الإجابة عليه مؤشرًا جيدًا على التقدم الذي وصل إليه الطلاب في هذا المجال.

هل الطلاب قادرون على تدارس كل النتائج الممكنة؟

هل يدرك الطلاب القواعد الرياضيات اللازمة لحل هذه المسائل، وهل يمكنهم الربط بينها؟

الوحدة العاشرة
الدوائر

نظرة عامّة

توسع هذه الوحدة فهم الطلاب للدوائر عبر أنشطة وبحوث واسعة التنوع.

الهدف التعلمي للوحدة

- تعميق فهم العلاقات بين الدوائر مختلفة المقاسات

المعرفة السابقة

- المعرفة بمحيط الدائرة و كيفية حساب مساحتها
- المعرفة الأساسية عن المماسات ومعادلات الدائرة (النشاط الرابع)
- الطلاقة في بعض المعالجات الجبرية (النشاط الرابع)

خصائص الأداء المتقدم

القيم والاتجاهات والسمات

- الاستقصاء (النشاط الثالث)
- التعاون (النشاط الثالث)

المهارات المتقدمة

- تكوين الصور الذهنية (النشاط الثاني)
- الاستدلال (النشاط الثاني)
- التعميم (الأنشطة الأول، والثالث، والرابع)
- الطلاقة (النشاطان الثاني، والرابع)
- الدقة (النشاط الأول)

المعرفة والفهم المتقدمان

- وضوح المفاهيم (النشاط الرابع)
- الفهم المتعمق للبنى الرياضية الأساسية (الأنشطة الأول، والثاني، والثالث)
- الربط بين المواضيع الرياضية (النشاط الرابع)
- فهم البرهان (النشاط الأول)

مدة تدريس الوحدة

4 إلى 6 ساعات

المصادر

أوراق ومقصّات (النشاط الثاني)

معلومات عن الوحدة

الهدف التعلمي للوحدة

- تعميق فهم العلاقات بين الدوائر مختلفة المقاسات

النشاط الأول
النسبة بين مساحتين

يمثل الشكل أدناه مربعاً رسمت بداخله دائرة تمس أضلاع المربع جميعها.
ثم رسمت دائرة خارجية أخرى تمر برؤوس المربع الأربعة.

1- افرض أن طول ضلع المربع هو 10سم.

a) ما مساحة الدائرة الدخلية؟

b) ما طول قطر المربع؟

c) ما مساحة الدائرة الخارجية؟

d) ما العلاقة بين مساحتي الدائرتين الداخلية والخارجية؟

2- إذا كانت نتيجة ما حصلت عليه من العلاقة بين مساحتي الدائرتين صحيحة في السؤال 1d، فهل تكون صحيحة مهما كان طول ضلع المربع؟ أثبت ذلك.

3- إذا رسمت مربعاً خارجياً كبيراً يمس الدائرة الخارجية

a) فما مساحته؟

b) هل العلاقة بين مساحتي المربعين صحيحة أيضاً مهما كان طول ضلع المربع الأصلي؟ أثبت ذلك.

67

"موهبة .. حيث تنتمي"

حول هذا النشاط

يستدعي هذا النشاط معرفة نظرية فيثاغورس والمساحة. وتقدم الأجزاء الأربعة من السؤال الأول بنية رياضية يستفيد منها الطلاب في حل بقية الأسئلة.

خصائص الأداء المتقدم

- الدقة فيما يتعلق بالتعامل مع الأبعاد والكميات
- القدرة على بناء البرهان الرياضي باستعمال الحقائق المعلومة مسبقاً

توصيات أسلوب التدريس

العمل الفردي والمناقشة الصفية

إجابات الأسئلة

السؤال الأول

a) 25π أو 78.6سم^2

نصف قطر الدائرة الصغرى هو نصف طول ضلع المربع، أي نصف 10 يساوي 5سم، وعليه فإن مساحة الدائرة هي $5 \times 5 \times \pi$ يساوي 78.6 سم^2

في حين أن معظم الطلاب يفضلون إيجاد قيمة عددية للمساحة، يفضل البعض الآخر الإجابة بدلالة π، أي أن: 25π. ويجب تشجيعهم على ذلك حيث أنه يدعم قدراتهم على التعميم.

b) $\sqrt{200}$ أو 14.14سم

باستعمال نظرية فيثاغورس، فإن طول القطر هو $d^2 = 10^2 + 10^2 = 200$، وبالتالي فإن
$$d = \sqrt{200} = 14.14 \text{ cm}$$

مرة أخرى، يجب التشجيع على الاحتفاظ بالإجابة الدقيقة، $\sqrt{200}$.

c) 50π أو 157.1cm^2

القطر هو نفسه قطر الدائرة الكبرى، وعليه فإن نصف قطر الدائرة الكبرى هو $14.14 \div 2 = 7.07$ فتصبح مساحة الدائرة الخارجية مساوية
$$7.07 \times 7.07 \times \pi = 157.1\text{cm}^2$$

في حالة الإجابة بدلالة الجذر التربيعي، تكون الإجابة على النحو التالي: $\pi \times \left(\frac{\sqrt{200}}{2}\right)^2 = 50\pi$.

d) مساحة الدائرة الكبرى ضعفي مساحة الدائرة الصغرى.

السؤال الثاني

نتيجة السؤال الأول d صحيحة مهما كان مقاس المربع الأصلي. وقد يرغب بعض الطلاب في تجريب ذلك من خلال اختيار عدة قيم لطول ضلع المربع، وعلى المعلم قبول ذلك حيث أنه يعزز فهم الطلاب للنتيجة العامة. إلا أنه يجب في مرحلة ما إقناع الطلاب بالتخلي عن تدقيق النتائج في كل مرة، وأن للتعميم أهمية حاسمة في العمل.

باتباع نمط المثال العددي، افترض أن طول ضلع المربع يساوي $2y$، فيكون نصف قطر الدائرة الصغرى y ومساحتها تساوي πy^2.

وباستعمال نظرية فيثاغورس فإن ، $d^2 = (2y)^2 + (2y)^2$،
إذن $d = \sqrt{8}\,y$.

نصف قطر الدائرة الكبرى يساوي $\sqrt{8}\,\frac{y}{2} = \sqrt{2}\,y$، وبالتالي فإن مساحتها تساوي $\pi \times (\sqrt{2}y)^2 = 2\pi y^2$ ، إذن مساحة الدائرة الكبرى تساوي ضِعْفَي مساحة الدائرة الصغرى، مهما كان طول ضلع المربع الأصلي.

السؤال الثالث

a) 200

b) المربعات المتتالية تضاعف المساحة، مهما كان طول ضلعها.

تتبع طريقة البرهان خطوات البرهان نفسها في السؤال الثاني: افرض أن طول ضلع المربع يساوي هو $2y$، وبالتالي فإن مساحته $4y^2$.

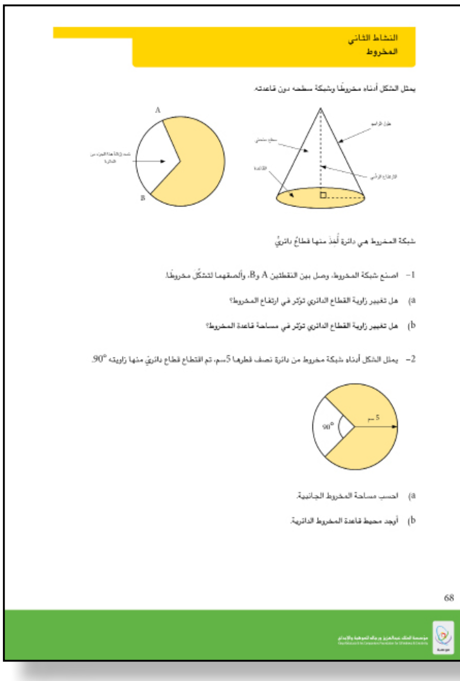
طول نصف قطر الدائرة الخارجية $\sqrt{2}\,y$، أي نصف طول ضلع المربع الخارجي. وبذلك فإن مساحة المربع الخارجي هي $(2\sqrt{2}y)^2 = 8y^2$، أي أن مساحة المربع الأكبر تساوي ضِعْفَي مساحة المربع الأصغر، مهما كان طول ضلع المربع الأصلي.

فرص التقويم

يتطلب هذا النشاط الدقة في طريقتي العمل المتوفرتين، وهما إما العمل على أعداد مقربة لأقرب 3 منازل عشرية مثلاً، أو بدلالة π والجذر التربيعي للعدد 2 كثابت. ويفضل في البرهان بشكل خاص باستعمال العدد الثابت للتمكن من إجراء المقارنة الدقيقة. وبالتالي فإن هذا النشاط يوفر سياقاً جيداً لقياس مستوى مراعاة الطلاب للدقة، وقدرتهم على إنشاء برهان عام.

هل يدقق الطلبة في قيم وترتيب الأبعاد التي يحصلون في إجاباتهم؟

هل يستطيع الطلبة بناء البرهان الرياضي بناء على نتائج البحث ويستعملون الحقائق المتوفرة في هذه العملية؟


النشاط الثاني
المخروط

يمثل الشكل أدناه مخروطًا وشبكة سطحه دون قاعدته.

شبكة المخروط هي دائرة أُخذ منها قطاعٌ دائريٌ

1- اصنع شبكة المخروط، وصل بين النقطتين A وB، وألصقهما لتشكّل مخروطًا.

a) هل تغيير زاوية القطاع الدائري تؤثر في ارتفاع المخروط؟

b) هل تغيير زاوية القطاع الدائري تؤثر في مساحة قاعدة المخروط؟

2- يمثل الشكل أدناه شبكة مخروط من دائرة نصف قطرها 5سم، تم اقتطاع قطاع دائريّ منها زاويته 90°.

a) احسب مساحة المخروط الجانبية.

b) أوجد محيط قاعدة المخروط الدائرية.

68

حول هذا النشاط

يبين هذا النشاط الصلة بين شبكة المخروط والأشكال المخروطية ثلاثية الأبعاد، ويستدعي من الطلبة فهم خصائص القطاعات الدائرية.

تعتبر المناقشة المتكررة مع الطلاب ضرورية لمساعدتهم على تكوين الصور الذهنية والربط بين الشبكات والمجسمات ثلاثية الأبعاد. ويحتاج الطلبة في بداية النشاط إجراء بعض الخطوات العملية، حيث يكوِّنوا المخاريط من الدوائر الورقية ومشبك الورق (أو أداة شبيهة).

خصائص الأداء المتقدم

- القدرة على تكوين صور ذهنية واضحة عن المخروط وخصائصه.
- تعميق الفهم بالبنية الرياضية الأساسية المتعلقة بخصائص المخروط

توصيات أسلوب التدريس

سحب مجموعة الطلبة الموهوبين، والعمل الفردي، والمناقشات الجماعية.

إجابات الأسئلة

السؤال الأول

a) تكبير زاوية القطاع الدائري لا يؤثر على طول راسم المخروط (بينما اختيار دائرة أكبر في البداية يعطي طول راسم أكبر)، ولكن الارتفاع الرأسي يزداد.

b) طول القوس المكون لقاعدة المخروط هو $r\,\theta$ بحيث أن r هي نصف قطر الدائرة و θ تمثل الزاوية المتشكلة من القوس $(\overset{\frown}{AB})$ وتقابل القطاع المظلل. يمثل طول القوس محيط القاعدة الدائرية المكونة للمخروط . نرمز لنصف قطر القاعدة بالرمز R. هذا يعني أن $2\pi R = r\theta$. نتيجة لذلك فإنه عند تزايد زاوية القطاع المقطوع فإن الزاوية θ تتناقص وهذا يؤدي إلى أن نصف قطر القاعدة R سيتناقص ومن ثم فإن مساحة القاعدة تتناقص أيضاً..

السؤال الثاني

a) 58.9سم^2

مساحة السطح الجانبي تساوي مساحة الجزء المظلل من شبكة المخروط، بما يعادل $\frac{3}{4}$ من الشبكة الدائرية الإجمالية (حيث أن 90 تساوي $\frac{1}{4}$ الإجمالي 360).

فالمساحة الجانبية تساوي
$\frac{3}{4} \times \pi \times 5 \times 5 =$ 58.9سم^2

b) 23.56سم

محيط قاعدة المخروط يساوي $\frac{3}{4}$ من محيط الدائرة الكاملة لشبكة المخروط، لذا فإن محيط قاعدة المخروط تساوي

$\frac{3}{4} \times 2 \times \pi \times 5 = 23.56$ سم

السؤال الثالث

a) 10سم

طول راسم المخروط يساوي نصف قطر دائرة شبكة المخروط، أي 10سم.

b) 6.67سم

محيط قاعدة المخروط يساوي $\frac{2}{3}$ محيط الدائرة الكاملة لشبكة المخروط (حيث أن 120 يساوي $\frac{1}{3}$ الـ 360).

محيط القاعدة $= \frac{2}{3} \times 2 \times \pi \times 10$

إذا كانت r تساوي نصف قطر قاعدة المخروط، فإن:

$$\frac{2}{3} \times 2 \times \pi \times 10 = 2 \times \pi \times r$$

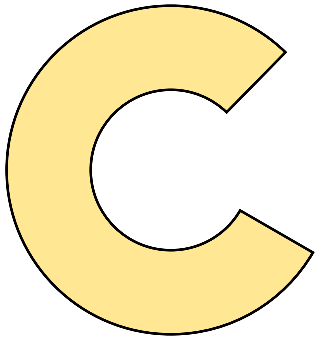
$$r = \frac{2}{3} \times 10 = 6.67 \text{ سم}$$

c) مساحة قاعدة المخروط

$\pi r^2 = \pi \times (\frac{2}{3} \times 10)^2 =$ 139.63سم^2

السؤال الرابع

شجّع الطلاب على رسم شبكة المخروط على ورقة ثم قصها لتشكيل الجزء المتبقي من المخروط الناقص.



السؤال الخامس

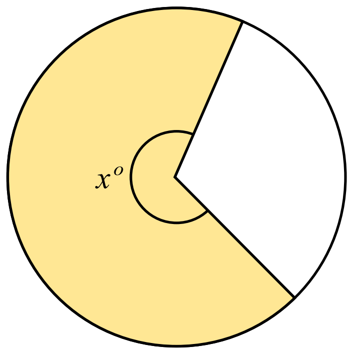
a) مربع الإرتفاع الرأسي يساوي

$= 25^2 - 20^2$

الارتفاع الرأسي

$\sqrt{225} = 15$ سم

b) $72°$



نصف قطر دائرة شبكة المخروط $= 25$ سم

محيط دائرة شبكة المخروط تساوي $= 2 \times \pi \times 25$

$= 50\pi$

محيط قاعدة المخروط $2 \times \pi \times 20 = 40\pi$

$$\frac{x}{360} = \frac{40\pi}{50\pi}$$

$$x = 0.8 \times 360°$$
$$= 288°$$

زاوية الجزء المقتطع $360° - 288° = 72°$

فرص التقويم

توفر الإجابة على السؤالين الأول والرابع الفرصة لتقويم قدرة الطلاب على تكوين الصور الذهنية. بينما يوفر السؤالان الثالث والخامس اختباراً جيداً لقدراتهم على الاستدلال.

هل الطلاب قادرون على مناقشة خصائص المخروط دون رسمه؟

هل الطلاب قادرون على الربط بين البنى الرياضية المختلفة التي يحتاجون إليها في حل المسألة؟

النشاط الثالث: المثلثات المتماسة مع الدوائر


النشاط الثالث
المثلثات المتماسة مع الدوائر

سوف تتعاون مع بعض زملائك في هذا النشاط، علماً بأنك ستبدأ العمل بمفردك في بادئ الأمر.

1- اتبع التعليمات الآتية لرسم الشكل بدقة.

a) ارسم دائرة نصف قطرها 6سم.

b) ارسم أيّ نصف قطر ومدّه إلى الخارج لتصل إلى النقطة A التي تبعد 4سم تمامًا عن المحيط.

c) والآن، ارسم مستقيمين متماسين مع الدائرة، من النقطة A، وسمِّ نقطتي التماس C ،B.

d) اختر أيّ نقطة D على القوس الواصل بين النقطتين B وC، وارسم مماسًا للدائرة عند النقطة D يقطع المستقيم AB في E، و المستقيم AC في F.

e) الآن، أوجد محيط المثلث AEF.

2- قارن بين قيمتي المحيط للمثلث AEF في رسمك مع المحيط المثلث الموجود في رسم كل زميلك / زملائك.

يختار كل منكم موقعًا مختلفًا للنقطة D على القوس AB، ومن المحتمل أن بعض هذه النقاط متطابق. على أي حال، افترض أن اختياراتكم صحيحة، وعليه، يجب أن تكون قيمة المحيط 16سم.

محيط المثلث AEF ثابت بغض النظر عن موقع النقطة D، وضّح ذلك.

3- ما محيط المثلث AEF إذا كان طول نصف قطر الدائرة يساوي 5سم، وبعد النقطة A يساوي 8سم عن محيط الدائرة؟

4- أوجد معادلة تعطي محيط المثلث AEF لأيّ دائرة نصف قطرها يساوي r سم، والنقطة A تبعد مسافة y سم عن محيط الدائرة.

70

حول هذا النشاط

ينفذ الطلبة هذا النشاط في مجموعات صغيرة أو ثنائية. ولن يجد جميع الطلبة التعميم أمراً سهلاً، لذا يفضّل أن ينضم إلى كل مجموعة طالب يقدم إلى زملائه الدعم والمساعدة في التوصل إلى الحل. والهدف الأساسي من هذا النشاط هو أن يستخدم الطلبة معارفهم بشأن نظريات الدائرة وحساب المثلثات لبناء برهان رياضي بسيط وإيجاد النتيجة العامة.

في السؤال الأول، يجب على الطلبة العمل بشكل مستقل لإتباع تعليمات إنشاء الشكل البياني. ويجب التشديد على ضرورة توخي الدقة في الرسم. وفي حين أن الطلبة يعملون بمفردهم، يجب تشجيعهم على اختيار مواقع مختلفة للنقطة D على محيط الدائرة، حيث أن الجزء التالي يعتمد على هذا الاختيار. وإذا اختار جميع طلبة المجموعة نفس النقطة، فإن عليهم إعادة الرسم ثانية حتى يتبين لهم أن محيط المثلثات متساوية مهما كان موقع النقطة D.

بعد ذلك يجب أن يعمل الطلبة في مجموعات صغيرة أو ثنائية، حيث يبدأ العمل بتحديد سبب كون المحيط 16سم بغض النظر عن الموقع المختار للنقطة D. وسيحتاج الطلبة لتنفيذ هذه الخطوة لمعرفة أن ED = EB، وأن FC = FD. وقد يحتاج بعضهم إلى التذكير بأن مماسي الدائرة المتقاطعان في نقطة واحدة يتساويان في الطول من نقطتي التماس إلى نقطة التقاطع.

خصائص الأداء المتقدم

- القدرة على تعميم النتائج التي حصلوا عليها من البحث
- تعميق الفهم للبنية الرياضية الأساسية المتعلقة بالدوائر وخصائصها

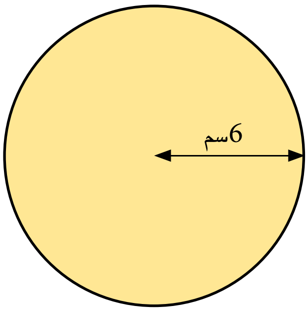
توصيات أسلوب التدريس

العمل الفردي والمناقشة الصفية

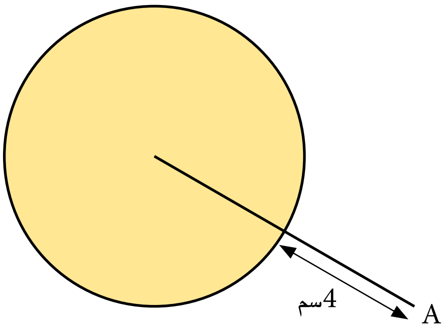
إجابات الأسئلة

السؤال الأول

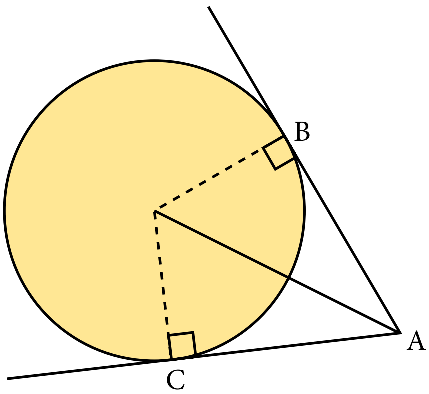
أ)



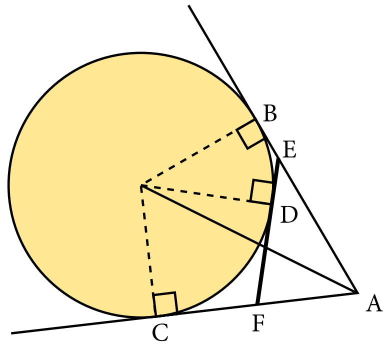
b)



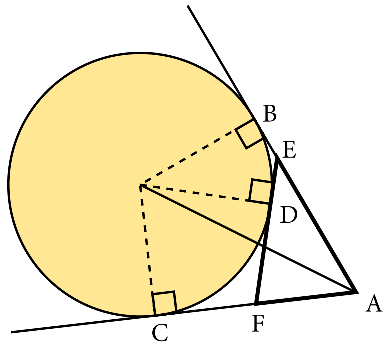
c)



(d



(e



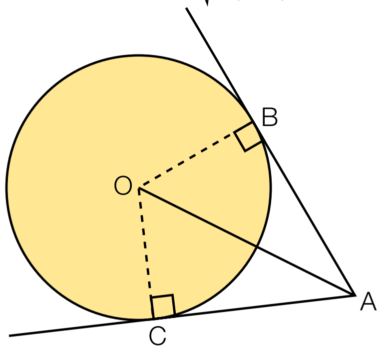
السؤال الثاني

سيكون لدى كل الطلبة مثلث محيطه 16سم، إذا كانوا قد توخوا العناية في الرسم

طول $\overline{BO}$ يساوي 6 سم (نصف قطر الدائرة)

وطول $\overline{AO}$ يساوي 10 سم (نصف القطر + 4سم)

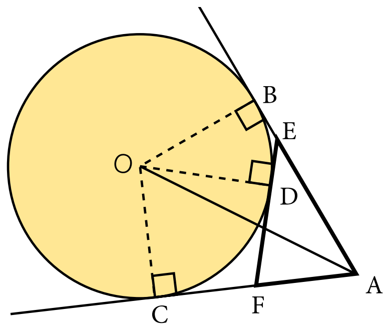
$$\overline{AB} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8 \text{ cm}$$



وللسبب نفسه فإن 8سم = $\overline{AC}$، ولذا فإن $\overline{AB} = \overline{AC}$ (مماسان للدائرة من نقطة خارجية متساويان في الطول).

$\overline{EB} = \overline{ED}$ (المماسان المرسومان من نقطة خارج الدائرة متساويان في الطول)

$\overline{DF} = \overline{FC}$ (المماسان المرسومان من نقطة خارج الدائرة متساويان في الطول)



محيط المثلث AEF يساوي

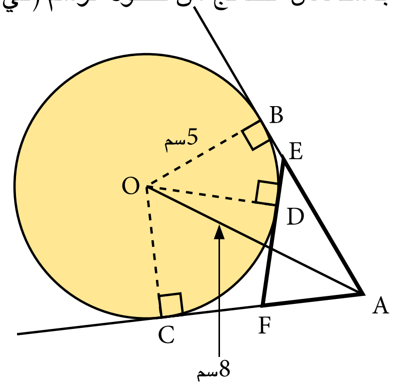
$$\overline{AE} + \overline{EF} + \overline{FA}$$
$$= \overline{AE} + \overline{ED} + \overline{DF} + \overline{FA}$$
$$= \overline{AE} + \overline{EB} + \overline{FC} + \overline{FA}$$
$$= \overline{AB} + \overline{AC}$$

$= 2 \times 8 = 16$ سم

السؤال الثالث

24 سم

باستعمال النتائج من خطوة الرسم (في السؤال الأول):



محيط المثلث $\overline{AB} + \overline{AC} = AEF$

إذا 5سم = $\overline{OB}$ و 13سم = $\overline{OA} = 5 + 8$

إذاً سم $\overline{AB} = \sqrt{169 - 25} = 12$

بالتالي فإن المحيط 24سم = $AEF = 2 \times 12$

السؤال الرابع

$\sqrt{[(r+y)^2 - r^2]}$ أو $\sqrt{[(y(2r+y)]}$

$OB = r$ cm و $OA = (r + y)$

إذاً $(AB)^2 = (r + y)^2 - r^2$

بالتالي فإن المحيط $AEF = \sqrt{[(r+y)^2 - r^2]}$

وقد يبسّط بعض الطلاب القاعدة على الصورة:

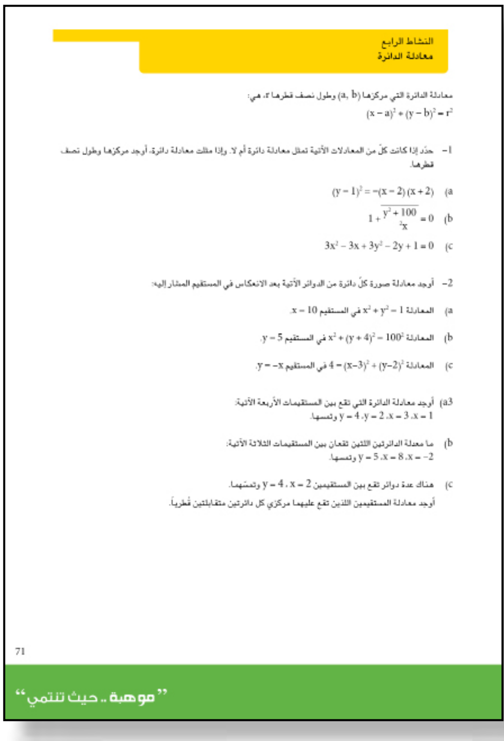
$$AEF \quad = \sqrt{[(r+y)^2 - r^2]}$$
$$= \sqrt{[r^2 + 2ry + y^2 - r^2]}$$
$$= \sqrt{y(2r + y)}$$

فرص التقويم

يجب على المعلم مراقبة عمل المجموعات ليعرف من الطلاب الذين يؤدون الدور الرائد في التوصل إلى التفسيرات والنتائج، حيث يوفر يتضح من ذلك مَن أفضل الطلاب فهماً للبرهان والتعميم، مع الانتباه إلى أن بعض الطلاب المتميزين في هذه القدرات قد لا يكشفون عنها لأسباب شخصية واجتماعية.

هل الطلاب قادرون على تعميم النتائج التي توصلوا إليها فيما يتعلق بالمثلث وخصائصه؟

هل الطلاب قادرون على إدراك خصائص المثلث المعروفة واستعمالها في بناء برهان جديد؟



النشاط الرابع
معادلة الدائرة

معادلة الدائرة التي مركزها (a, b) وطول نصف قطرها r، هي:
$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

1– حدّد إذا كانت كلّ من المعادلات الآتية تمثل معادلة دائرة أم لا. وإذا مثلت معادلة دائرة، أوجد مركزها وطول نصف قطرها.

a) $(y-1)^2=-(x-2)(x+2)$

b) $1+\sqrt{\frac{y^2+100}{x^2}}=0$

c) $3x^2-3x+3y^2-2y+1=0$

2– أوجد معادلة صورة كلّ دائرة من الدوائر الآتية بعد الانعكاس في المستقيم المشار إليه:

a) المعادلة $x^2+y^2=1$ في المستقيم $x=10$.

b) المعادلة $x^2+(y+4)^2=100^2$ في المستقيم $y=5$.

c) المعادلة $(x-3)^2+(y-2)^2=4$ في المستقيم $y=-x$.

3a) أوجد معادلة الدائرة التي تقع بين المستقيمات الأربعة الآتية: $x=1$، $x=3$، $y=2$، $y=4$ وتمسها.

b) ما معدلة الدائرتين اللتين تقعان بين المستقيمات الثلاثة الآتية: $x=-2$، $x=8$، $y=5$ وتمسها.

c) هناك عدة دوائر تقع بين المستقيمين $x=2$ ، $y=4$ وتمسّهما.
أوجد معادلة المستقيمين اللذين تقع عليهما مركزي كل دائرتين متقابلتين قُطرياً.

71

"موهبة .. حيث تنتمي"

حول هذا النشاط

يبني هذا النشاط على معرفة الطلاب السابقة بمعادلة الدائرة. وتستدعي الأسئلة من الطلاب التمتع بالقدرة على الرسم السريع والدقيق، إما على الورق أو باستعمال برمجية حاسوبية، وخاصة في السؤالين 2 و 3. كذلك يحتاج الطلاب إلى الدراية بالمفاهيم الأساسية للهندسة الإحداثية، بما يشمل معادلات الخط المستقيم، إضافة إلى أن السؤال 1 يستدعي المعرفة بالجبر.

صمم السؤال 1 لتمرين الطلاب على الاستعمال الجبري للمعادلات الرياضية، وتعميق درايتهم بالصيغة القياسية لمعادلة الدائرة. ومن السهل تكوين أمثلة جديدة شبيهة بمضمون السؤال. وبالنسبة للجزء b من السؤال، فإنه لا يمثل دائرة لأن r2 قيمة سالبة. وقد يجدر بالطلاب التفكير في النقاط (إن وجدت) التي تحقق هذه المعادلة.

يجب على الطلاب رسم المستقيمات المعطاة في السؤال 2 من أجل فهم المهمة المطلوبة منهم. وتجب ملاحظة أنه في الجزء b سيكون نصف القطر كبيراً ومن غير العملي إكمال الرسم. وسيتضح في كل حالة أن مركز الدائرة هو فقط ما يستدعي الاهتمام، لأن نصف القطر لا يتغيّر بالانعكاس. ويجب أن يدرك الطلاب في الجزء c من السؤال أن انعكاس المستقيم بزاوية 45 درجة ينطوي جزئياً على تبادل الإحداثيين x وy .

خصائص الأداء المتقدم

- الطلاقة في المهارات الرياضية المتعلقة بالجبر
- وضوح المفاهيم المتعلقة بخصائص الدائرة

توصيات أسلوب التدريس

سحب مجموعة الطلبة الموهوبين / التدريس الفارقي

إجابات الأسئلة

السؤال الأول

a) نعم، المركز $(0, 1)$، نصف القطر = 2

b) لا، حيث أن $x^2 + y^2 = -100$

c) نعم، المركز $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$، ونصف القطر = $\frac{1}{6}$

السؤال الثاني

a) $(x - 20)^2 + y^2 = 1$

b) مركز الدائرة $x^2 + (y+4)^2 = 100^2$ هو $(0, -4)$.
النقطة الناتجة من انعكاس المركز حول المستقيم $y = 5$ هي $(0, 14)$ وبالتالي فإن معادلة الدائرة الناتجة من الانعكاس هي $x^2 + (y - 14)^2 = 100^2$

c) النقطة الناتجة من انعكاس مركز الدائرة $(3, 2)$ حول المستقيم $y = -x$ هي $(-2, -3)$ وبالتالي فإن معادلة الدائرة الناتجة من الانعكاس

$$(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 4$$

السؤال الثالث

a) تكوّن المستقيمات الأربع مربع طول ضلعه 2 بحيث أن قطري المربع يتقاطعان في النقطة (2 ,3) والتي تمثل مركز الدائرة الداخلية والتي نصف قطرها 1:
$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 1$$

b) المسافة بين المستقيم الرأسي $x = -2$ و $x = 8$ تساوي 10. يمكننا تكوين مربعين بطول 10 فوق وتحت المستقيم $y = 5$. مركزي الدائرتين الداخليتين هما (3 ,0) و (3 ,10) ونصف القطر يساوي 5.
معادلة الدائرتين هما:

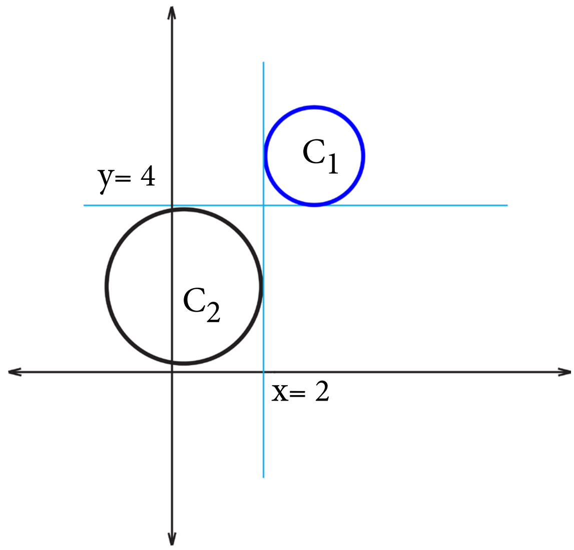
$$(x - 3)^2 + y^2 = 25 \text{ و } (x - 3)^2 + (y - 10)^2 = 25$$

c) مركزي الدائرتين C_1 وَ C_2 المتقابلتين هو

$$(2+a\,,4+a)\,,(2-b\,,4-b)$$

بحيث أن a و b هما عددين حقيقيين. معادلة المستقيم المار بالمركزين هو $y = x + 2$.

وبالطريقة نفسها يمكننا إيجاد معادلة المستقيم المار في المركزين الآخرين المتقابلين وهو $y = -x + 6$.



فرص التقويم

تعطي الإجابة على السؤال الأول مؤشرًا جيدًا على ثقة الطلاب في معالجة المعادلات الجبرية، حيث أنه يستدعي استعمال الجبر لحل المسائل الهندسية. وتعطي إجابة السؤال الثاني دليلاً واضحاً على ثقتهم بأنفسهم عند التعامل مع التحويلات الهندسية، لأن حل المسألة المتعلقة بالدائرة يتطلب إجراء الانعكاس.

هل الطلاب قادرون على استعمال معادلة الدائرة بشكل دقيق؟

هل الطلاب قادرون على استعمال معرفتهم السابقة حول خصائص المثلثات لحل المسائل واكتساب معارف جديدة؟

الوحدة الحادية عشرة

قاعدة بنفورد

مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع
King Abdulaziz & his Companions Foundation for Giftedness & Creativity

نظرة عامّة

هذه الوحدة هي استكشاف لظاهرة مهمة في الإحصاءات تعرف باسم "قانون بنفورد".

الهدف التعلمي للوحدة

- تقدير قيمة تطبيق الرياضيات على المسائل والمشاكل اليومية في الحياة

المعرفة السابقة

- فهم التوزيعات البيانية
- المعرفة التامة بالنسب العادية والنسب المئوية

خصائص الأداء المتقدم

القيم والاتجاهات والسمات

- الاستقصاء
- التعاون

المهارات المتقدمة

- ربط الرياضيات بالحياة
- النمذجة
- التعميم

المعرفة والفهم المتقدمان

- الفهم المتعمق للبنية الرياضية الأساسية
- فهم "الأفكار الكبرى"

مدة تدريس الوحدة

أربع ساعات تقريبًا

المصادر

ورق رسم بياني، وورق مسودات إضافي

إمكانية تصفح الإنترنت

معلومات عن الوحدة

معلومات عن الوحدة

الهدف التعلمي للوحدة

- تقدير قيمة تطبيق الرياضيات على المسائل والمشاكل اليومية في الحياة

الإستقصاء

في عام 2009م، كان عدد سكان المملكة العربية السعودية 28.687 مليون نسمة، وكان ترتيبها 41 ضمن الدول من حيث عدد السكان.

أما عدد السكان الكويت فكان 2.693 مليون نسمة، وترتيبها 139 ضمن الدول من حيث عدد السكان.

73

"موهبة .. حيث تنتمي"

يعمل الطلاب بشكل مستقل عن المعلمين للحصول على البيانات وتحليلها، ثم تفسير النتائج التي يتوصلون إليها في ضوء المواد المتاحة مجاناً على شبكة الانترنت. وسيكون من المفيد أن يتعاون الطلاب في مجموعات ثنائية.

تمنح مرحلة البحث الأولى الفرصة للطلاب لكي يفهموا السياق الذي يعملون فيه والتأمل في النتائج. وتقدم لهم المرحلة الثانية نموذجًا رياضيًا يستخدم في الحياة العملية للكشف عن حالات التزوير. ولا يتأتى بسهولة فهم أهمية هذا النموذج، ولكن فهمه الكامل ليس ضروري للطلاب في هذا السياق، بل المهم أن يكتسبوا فكرة عن مدى تعقيد الرياضيات، بما يشجعهم على إحراز التقدم فيها.

يساهم إعداد النتائج في صيغة متاحة للآخرين (مثلاً في عرض موجز) في تشجيع الطلاب على التواصل بشكل واضح، وهذا بدوره يشجعهم على المزيد من التأمل في عملهم. وقد يجدر بالمعلم إنشاء منتدى على الانترنت لمساعدة الطلاب على مناقشة مواضيع الرياضيات التي يبحثون فيها مع طلاب من المدارس الأخرى، وبذلك يفيدون من نقاشاتهم في توضيح المفاهيم ذات الصلة.

يكون دور المعلم في أثناء البحث الاستماع وطرح الأسئلة التي تحث الطلاب على التفكير والتأمل، مثل: "هل أخذتم بالحسبان.... ؟"، و"هل يفيدنا التفكير في .... ؟"، و"هل تستطيع شرح معنى ذلك؟"، وهكذا.

خصائص الأداء المتقدم

- الاستقصاء: اتباع نهج استقصائي
- القدرة على ربط الرياضيات بالحياة (وبالعكس)
- القدرة على إنشاء نموذج رياضي
- فهم "الأفكار الكبرى" في الرياضيات

توصيات أسلوب التدريس

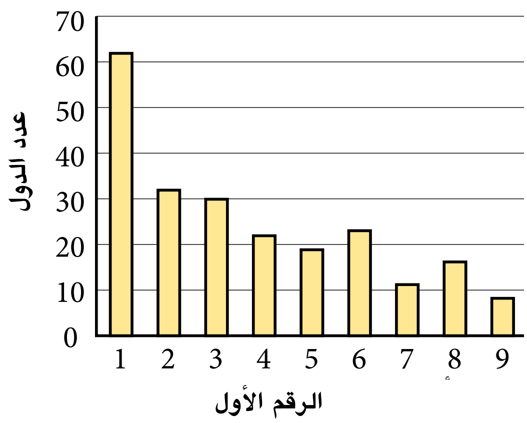
سحب مجموعة الطلبة الموهوبين

المرحلة الأولى من البحث

السؤال الأول

سيرى الطلاب من خلال دراسة توزيع الأرقام الأولى في تعداد السكان حول العالم، أن هذه الأرقام ليست موزعة توزيعاً منتظماً، وهنا يجب تشجيعهم على التفكير في الطريقة المناسبة لاكتساب المعلومات ومعالجتها وتقديمها بشكل فعّال، باستعمال الجداول الالكترونية، على سبيل المثال كما في هذا الشكل.

توزيع الأرقام الأولى التي تمثل في تعداد سكان دول العالم



شجّع الطلاب دائماً على تأمل هذه النتيجة. لماذا لا يتّسم توزيع الأرقام بالانتظام؟

يمكنك أن تشجّع الطلاب على البحث في مجموعات بيانات أخرى، مثل مساحات البحيرات أو أطوال الأنهار أو أسعار الأسهم أو عناوين الشوارع أو معدلات الوفيات، أو أعداد من مقالات الصحف. هل هناك نمط مماثل في النتائج التي يتم التوصل إليها؟ (يمكن أن يتبادل الطلاّب البيانات التي جمعوها مع طلاّب آخرين في المنتدى على شبكة الانترنت).

المرحلة الثانية من البحث

السؤال الثاني والثالث والرابع

يتضح من التاريخ أن صياغة الكثير من النماذج الرياضية جاءت نتيجة الملاحظة أولاً، يليها في مرحلة لاحقة تبرير هذه النماذج، وبعد ذلك بفترة يتم تطبيقها عملياً.

1298هـ/1881م - عالم الفلك والرياضيات سيمون نيوكومب:

- لاحظ العالِم أن الصفحات الأولى في كتب جداول اللوغاريتمات كانت أكثر اتساخاً من الصفحات الأخيرة، مما يشير إلى بحث القراء عن الأعداد التي تبدأ بأرقام صغيرة أكثر من الأعداد التي تبدأ بأرقام كبيرة.
- بناء على ذلك، استنتج العالِم مبدأ أن أي قائمة أعداد مأخوذة من مجموعة بيانات عشوائية، فإن الأعداد التي تبدأ بالرقم 1 عادة ما تكون أكثر من الأعداد الأخرى.

1356هـ/1938م - عالم الفيزياء فرانك بنفورد:

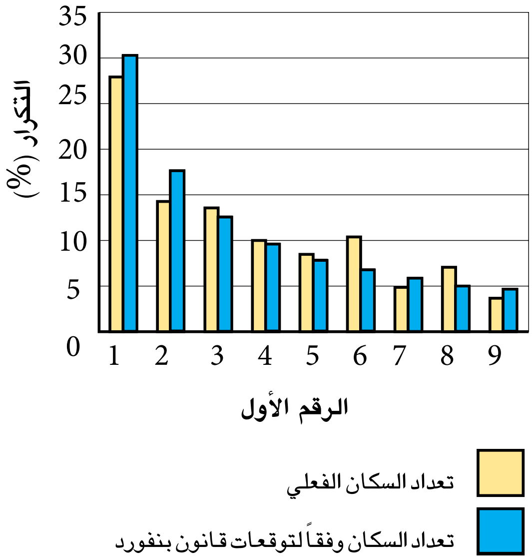
- أعاد اكتشاف هذا النمط، ووجد أنه في قوائم أعداد المستقاة من مصادر كثيرة للبيانات (وليس جميعها)، يكون الرقم الأول موزعاً بدون انتظام، حيث يظهر الرقم 1 في ثلث الأعداد، والرقم 9 في أقل من 5% منها.
- ووجد القانون التالي، $\log_{10}(1+\frac{1}{n})$.
- (لا يوجد تطبيق لهذا القانون أو تفسير حتى تاريخه).

1380هـ/ 1961م - عالم الرياضيات روجر بنكام:

- أظهر العالم بعض التبصّر في تفسير هذا القانون.
- (لم يزل القانون بدون تطبيق).

1417هـ/1997م- المحاسب مارك نجريني:

- طبق القانون في تدقيق حسابات الشركات وكشف العديد من حالات التزوير، وكان ذلك بداية مهنة جديدة: المحاسبة الجنائية!



دراسة مجموعات البيانات

من المستبعَد أن يكون الطلاب قد درسوا اللوغارتيمات من قبل، ولكن بإمكانك تشجيعهم على اكتشاف طريقة تقييم فائدتها، وربما يرغبون في البحث في هذا الموضوع بأنفسهم إذا توفر لهم الوقت اللازم. وفي السياق الحالي، فإن القانون الأساسي يؤدي إلى التوزيعات التكرارية التالية:

الرقم	التكرار (%)
1	30.1
2	17.6
3	12.5
4	9.7
5	7.9
6	6.7
7	5.8
8	5.1
9	4.6

فهم سبب التوزيع غير المنتظم للأرقام:

يوجد على الانترنت عدد من المواقع باللغة الإنجليزية التي تحاول شرح مبدأ عمل قانون بنفورد، ومنها على سبيل المثال:

http://en.wikipedia.org/wiki/Benford's_Law

http://www.mathpages.com/HOME/kmath302/kmath302.htm

http://plus.maths.org/issue9/features/benford/

http://www.youtube.com/watch?v=O8N26edbqLM

وفي حين أن استيعاب هذا الشرح قد يتعذر على الطلاب، فإنه من المهم إعطائهم مهلة كافية لمحاولة فهم القواعد الرياضية ذات الصلة، حتى ولو استحال عليهم فهم الشرح بالكامل، وعلى المعلم تشجيعهم على محاولة فهم ما يرون ويقرأون. وعندما يحاول الطلاب فهم قانون بنفورد، سيكون من المفيد لهم فهم متى ينطبق ومتى لا ينطبق، والأمر الأهم هو أنه لا ينطبق إذا كان نطاق الأعداد مقيداً لأسباب طبيعية أو اصطناعية، إذ لا يخضع لقانون بنفورد سوى الأعداد التي لا يكون نطاقها مقيداً.

ويمكن ببعض الحدس ملاحظة أن التوزيع غير المتساوي ينطبق على اختيار "أي عدد من 1 إلى x"، لأنه إذا كانت $x = 9$ فإن الأعداد من 1 إلى 9 تكون موزعة بالتساوي. أما إذا كانت x من 1 إلى 19، فإن أكثر من نصف الأعداد سيبدأ بالرقم 1، وإذا كانت x من 1 إلى 29 فإن ثلث الأعداد سيبدأ بالرقم 1، وهكذا، وبالمثل فإن الأرقام الأولى ضمن المدى من 10 إلى 99، أو من 100 إلى 999 موزعة بالتساوي، ولكن من 10 إلى 199 أو من 100 إلى 1999 يكون هناك عدد أكبر من الأعداد التي تبدأ بالرقم 1. وبالتالي فإنه إذا أمكن أن تساوي x أي رقم، فإن الترجيح يكون تجاه الأرقام الأصغر.

ولكي نفهم لماذا ينتج عن ذلك مقياساً لوغارتيماً، لا بد من استكشاف آلية عمل اللوغارتيمات (حيث قيمة لوغارتيم $\text{س}^{\text{ن}}$ للأساس 10 تساوي ن)، حيث الفرق بين 1 و 10 في أساس لوغارتيم الأساس 10 يساوي الفرق بين 10 و 100، وهكذا.

فرص التقويم

ستعطى مشاركة الطلاب في هذا النشاط بشكل عام مؤشراً جيداً على ثقتهم في أساليب الاستقصاء، حيث يباشر بعض الطلاب بالبحث عن المصادر على شبكة الانترنت، ولكنهم لن يرغبوا في فهم قواعد الرياضيات ذات الصلة. أما الطلاب الذي لا يدركون جدوى هذا الاستقصاء، فقد تكون قدرتهم على إنشاء النماذج الرياضية ضعيفة، وهي قدرة ضرورية لتحقق الغاية والفائدة من الاستقصاء، إذ لا بد أن يدركوا أهمية توزيع القيم وأنه لا يتقيد بتوقعاتهم الأولية (القائمة على نموذج رياضي بسيط).

هل لدى الطلاب القدرة على:

- استقصاء القضايا المثارة؟
- تطبيق الرياضيات على الواقع؟
- إبداع نماذج رياضية لتفسير الظواهر؟
- فهم الأفكار الكبرى وراء الإحصاءات؟

مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع
King Abdulaziz & his Companions Foundation for Giftedness & Creativity

بوابة موهبة الإلكترونية

شاركنا التجربة واكتشف عالم بوابة موهبة
المرجع الرئيسي للموهبة والإبداع والابتكار في العالم العربي

بوابة موهبة الإلكترونية بوابةٌ علمية متخصصة في إرساء أسس تربية الموهوبين والمبدعين في المملكة العربية السعودية والعالم العربي. تقدّم خدمات متنوعة للموهوبين والقائمين على رعايتهم، وتعتبر مصدرًا معرفيًا متجددًا ومجالاً تفاعليًا للمشاركة المجتمعية.

Info@mawhiba.org.sa
الرقم المجاني: 8006123333

"موهبة .. حيث تنتمي"